

Capitolul 7

ELEMENTE DE TEORIA CÂMPURILOR

7.1 Definiții și proprietăți

7.1.1 Câmpuri scalare. Câmpuri vectoriale

Fie $D \subset \mathbb{R}^3$. Numim **câmp scalar** pe D o funcție (cu valori scalare) $u : D \rightarrow \mathbb{R}$. Numim **câmp vectorial** pe D o funcție (cu valori vectoriale) $\vec{F} : D \rightarrow \mathbf{V}_3$. Astfel, oricărui punct $M \in D$ i se poate asocia un scalar (în cazul câmpurilor scalare), respectiv un vector (în cazul câmpurilor vectoriale). Atunci când un astfel de câmp nu depinde decât de poziția punctului M , el se numește **staționar**, în cazul în care el depinde și de alte variabile (de obicei de timp) numind-se **nestaționar**.

7.1.2 Aspecte fizice

De exemplu, oricărui punct de pe suprafața Pământului i se poate asocia temperatura în acel punct, obținându-se un câmp scalar (evident, nestaționar). Același lucru se poate realiza asociindu-i umiditatea relativă, presiunea atmosferică, ș.a.m.d.

Similar, oricărui punct de pe suprafața Pământului i se poate asocia intensitatea câmpului gravitațional în acel punct (direcționată către centrul de masă al Pământului, necesitând utilizarea unui vector pentru caracterizare completă), obținându-se un câmp vectorial (staționar). Același lucru se poate realiza asociind viteza și direcția vântului în acel punct (care, din nou, necesită utilizarea unui vector pentru caracterizare completă), obținându-se însă în acest caz un câmp

vectorial netaționar.

Vom nota uneori $u(M)$, în loc de $u(x, y, z)$, (respectiv $\vec{F}(M)$, în loc de $\vec{F}(x, y, z)$) pentru a sublinia dependența câmpului de punctul M , mai degrabă decât de coordonatele x, y, z ale acestuia, în special în cazul în care câmpul respectiv corespunde unei realități fizice.

Câmpuri de componente

Fie un câmp vectorial $\vec{F} : D \rightarrow \mathbf{V}_3$,

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Pentru determinarea acestui câmp vectorial este deci necesară determinarea a trei câmpuri scalare P, Q, R , numite **câmpuri de componente**.

Câmp vectorial de clasă C^k

Se spune că \vec{F} este **câmp vectorial de clasă C^k** , $k \geq 0$, în situația în care câmpurile scalare (funcțiile) componente P, Q, R au această proprietate.

7.2 Câmpuri scalare. Gradientul unui câmp scalar

7.2.1 Suprafețe de nivel

Fie $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ un câmp scalar. Numim **suprafață de nivel (suprafață echipotențială)** a câmpului u locul geometric al tuturor punctelor lui D pentru care valoarea lui u rămâne constantă.

Ecuția unei suprafețe de nivel

Suprafețele de nivel ale lui u au deci ecuația $u(x, y, z) = C$, $C \in \mathbb{R}$. În particular, ecuația suprafeței de nivel care trece printr-un punct dat $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este $u(M) = u(M_0)$, unde M este un punct curent de pe suprafață, forma analitică a acestei ecuații fiind $u(x, y, z) = u(x_0, y_0, z_0)$.

Să observăm de asemenea că printr-un punct al domeniului D trece o singură suprafață de nivel, în vreme ce două suprafețe de nivel oarecare fie coincid (dacă au același C), fie nu se intersectează (daca ele corespund la valori diferite ale lui C).

Exemplu. Fie câmpul scalar $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Atunci suprafețele de nivel $u(x, y, z) = C$, $C > 0$, sunt sfere cu centrul în $O(0, 0, 0)$ și rază \sqrt{C} , în vreme ce suprafața de nivel $u(x, y, z) = 0$ constă dintr-un singur

| punct, anume originea O .

7.2.2 Derivata unui câmp scalar după direcția unui vector

Fiind dat un câmp scalar u , dorim să studiem variația acestuia după o direcție dată, într-o vecinătate a unui punct dat. Prin analogie cu cazul funcțiilor de o singură variabilă reală, pentru care studiul monotoniei se putea realiza cu ajutorul derivatei, vom defini acum noțiunea de **derivată după o direcție**.

Fie $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ un câmp scalar, fie $M_0 \in D$ și fie \vec{v} un vector oarecare. Numim **derivată a lui u în M_0 după direcția lui \vec{v}** , notată $\left. \frac{du}{d\vec{v}} \right|_{M_0}$, mărimea care măsoară viteza de variație a lui u în această direcție, raportată la unitatea de lungime, definită prin

$$\left. \frac{du}{d\vec{v}} \right|_{M_0} = \lim_{l(\overrightarrow{M_0M}) \rightarrow 0} \frac{u(M) - u(M_0)}{l(\overrightarrow{M_0M})}$$

unde $l(\overrightarrow{M_0M})$ reprezintă lungimea orientată a vectorului $\overrightarrow{M_0M}$,

$$l(\overrightarrow{M_0M}) = \begin{cases} \|\overrightarrow{M_0M}\|, & \text{pentru } \overrightarrow{M_0M} = t\vec{v}, t \geq 0, \\ -\|\overrightarrow{M_0M}\|, & \text{pentru } \overrightarrow{M_0M} = t\vec{v}, t < 0. \end{cases}$$

Să observăm că $\left. \frac{du}{d\vec{v}} \right|_{M_0}$ ia în calcul, în fapt, nu doar direcția, ci și sensul lui \vec{v} .

Monotonia unui câmp scalar după direcția unui vector

Observăm atunci următoarele

- Dacă $\left. \frac{du}{d\vec{v}} \right|_{M_0} > 0$, atunci câmpul scalar u crește într-o vecinătate a lui M_0 după direcția (și sensul) lui \vec{v} ,
- Dacă $\left. \frac{du}{d\vec{v}} \right|_{M_0} < 0$, atunci câmpul scalar u scade într-o vecinătate a lui M_0 după direcția (și sensul) lui \vec{v} .

Legătura cu conceptul de derivată parțială

Conceptul de derivată după direcția unui vector îl generalizează pe cel de derivată parțială. Astfel, pentru $v = \vec{i}$ obținem că $\frac{du}{d\vec{i}} = \frac{\partial u}{\partial x}$, iar pentru $\vec{v} = \vec{j}$, respectiv $\vec{v} = \vec{k}$, obținem că $\frac{du}{d\vec{j}} = \frac{\partial u}{\partial y}$, respectiv $\frac{du}{d\vec{k}} = \frac{\partial u}{\partial z}$.

Formulă de calcul

Teorema 7.1. Dacă u este de clasă C^1 pe o vecinătate a lui M_0 , iar $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ este un vector nenul, atunci

$$\frac{du}{d\vec{v}} \Big|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M_0} \frac{v_1}{\|\vec{v}\|} + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{M_0} \frac{v_2}{\|\vec{v}\|} + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{M_0} \frac{v_3}{\|\vec{v}\|} \quad (7.1)$$

Întrucât $\frac{v_1}{\|\vec{v}\|}$, $\frac{v_2}{\|\vec{v}\|}$, $\frac{v_3}{\|\vec{v}\|}$ sunt componentele versorului director al lui \vec{v} cu același sens ca și \vec{v} , membrul drept reprezintă produsul scalar dintre vectorul $\vec{n} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M_0} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{M_0} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{M_0} \vec{k}$ normal la suprafața de nivel a lui u prin M_0 și versorul asociat lui \vec{v} cu același sens ca și \vec{v} .

Practic, valorile derivatelor parțiale ale lui u , calculate în punctul M_0 , se înmulțesc cu componentele corespunzătoare ale versorului obținut prin împărțirea lui \vec{v} la norma sa, adunându-se apoi rezultatele.

De asemenea, formula de mai sus se poate pune și sub forma

$$\frac{du}{d\vec{v}} \Big|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M_0} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{M_0} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{M_0} \cos \gamma,$$

unde $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ sunt cosinuzii directori ai lui \vec{v} .

Exemplu. Determinați derivata câmpului scalar

$$u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(x, y, z) = x^3 + x^2 - xyz$$

în $M_0(1, -3, 2)$ după direcția vectorului $\vec{v} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$. Crește u într-o vecinătate a punctului M_0 după direcția lui \vec{v} , sau scade după această direcție? Determinați ecuația suprafeței de nivel a lui u pe care se află M_0 .

Soluție. Calculăm mai întâi derivatele parțiale ale lui u . Au loc relațiile

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + x^2 - xyz) = 3x^2 + 2xy - yz \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + x^2 - xyz) = x^2 - xz \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(x^3 + x^2 - xyz) = -xy. \end{aligned}$$

Precizăm acum valorile acestor derivate parțiale în punctul M_0 . Pentru $x = 1$, $y = -3$, $z = 2$, obținem că

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} = 3, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} = -1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} = 3.$$

De asemenea,

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3,$$

iar versorul asociat lui \vec{v} cu același sens ca și \vec{v} este

$$\frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v} = \frac{1}{3}(2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}.$$

Atunci

$$\left. \frac{du}{d\vec{v}} \right|_{M_0} = 3 \cdot \frac{2}{3} + (-1) \left(-\frac{2}{3} \right) + 3 \frac{1}{3} = \frac{11}{3} > 0.$$

Deducem de aici că într-o vecinătate a punctului M_0 câmpul scalar u crește după direcția (și sensul) lui \vec{v} . Deoarece $u(M_0) = 1^3 + 1^2(-3) - 1(-3)2 = 4$, rezultă că ecuația suprafeței de nivel a lui u pe care se află M_0 este $u(M) = 4$.

7.2.3 Gradientul unui câmp scalar

Fie $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ un câmp scalar de clasă C^1 . Numim **gradient** al lui u câmpul vectorial definit prin

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}.$$

Exemplu. Determinați $\text{grad } u$, unde $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ este câmpul scalar definit prin

$$u(x, y, z) = x^2 + yz.$$

Soluție. Se obține că

$$\text{grad } u = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + yz)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + yz)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + yz)\vec{k} = 2x\vec{i} + z\vec{j} + y\vec{k}.$$

Exemplu. Determinați $\text{grad } u$, unde $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ este câmpul scalar definit

prin

$$u(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \|\vec{r}\|$$

(norma vectorului de poziție $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ atașat lui $M(x, y, z)$).

Soluție. Pentru $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, se obține că

$$\begin{aligned} \text{grad } u &= \frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\vec{k} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{k} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}). \end{aligned}$$

Are deci loc relația

$$\text{grad}(\|\vec{r}\|) = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}, \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

Gradientul ca vector normal

Să observăm că $\text{grad } u|_{M_0}$ (vectorul gradient calculat într-un punct M_0) este coliniar cu versorii normali la suprafața de nivel a lui u care trece prin punctul M_0 . În fapt, în ipoteza că $\text{grad } u|_{M_0} \neq \vec{0}$, unul dintre versorii normali este

$$\vec{n} = \frac{\text{grad } u|_{M_0}}{\|\text{grad } u|_{M_0}\|},$$

celălalt fiind $-\vec{n}$.

Proprietatea de proiecție

Conform (7.1), rezultă că, pentru un vector \vec{v} dat,

$$\left. \frac{du}{d\vec{v}} \right|_{M_0} = \text{grad } u|_{M_0} \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \text{pr}_{\vec{v}}(\text{grad } u|_{M_0}),$$

unde „ \cdot ” notează produsul scalar a doi vectori. Obținem că **derivata după direcția unui vector este proiecția scalară a gradientului pe acel vector.**

Direcția celei mai rapide creșteri (descreșteri)

Conform (7.1), rezultă că, pentru un versor \vec{v} dat,

$$\left. \frac{du}{d\vec{v}} \right|_{M_0} = \text{grad } u|_{M_0} \cdot \vec{v}.$$

De aici, calculând derivata după direcția versorului \vec{n} (în fapt, direcția gradientului), obținem

$$\left. \frac{du}{d\vec{n}} \right|_{M_0} = \text{grad } u|_{M_0} \cdot \vec{n} = \text{grad } u|_{M_0} \cdot \frac{\text{grad } u|_{M_0}}{\|\text{grad } u|_{M_0}\|} = \|\text{grad } u|_{M_0}\|.$$

Deducem de aici că direcția lui \vec{n} (în fapt, direcția gradientului) este o direcție de creștere a lui u . Similar, direcția lui $-\vec{n}$ (în fapt, direcția opusă gradientului) este o direcție de descreștere a lui u .

Deoarece

$$\left. \frac{du}{d\vec{v}} \right|_{M_0} = \text{grad } u|_{M_0} \cdot \vec{v} = \|\text{grad } u|_{M_0}\| \vec{n} \cdot \vec{v} = \|\text{grad } u|_{M_0}\| \cos \theta,$$

unde θ este unghiul dintre \vec{n} și \vec{v} , obținem atunci

$$\left. \frac{du}{d\vec{v}} \right|_{M_0} = \left. \frac{du}{d\vec{n}} \right|_{M_0} \cos \theta.$$

Cum $|\cos \theta| \leq 1$, **direcția celei mai rapide creșteri (descreșteri) a câmpului scalar u este cea a unui versor al normalei la suprafață.** De asemenea, **sensul de creștere este sensul gradientului, sensul de descreștere fiind sensul opus gradientului.**

Exemplu. Fie câmpul scalar

$$u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$$

și fie $A(2, 1, -2)$. Să se determine suprafața de nivel ce trece prin A , gradientul câmpului scalar u în acest punct și un versor director al normalei în A la suprafața de nivel a lui u . Precizați dacă u crește sau scade după direcția acestui versor.

Soluție. Deoarece $u(A) = 7$, urmează că suprafața de nivel a lui u care trece prin A are ecuația $u(x, y, z) = u(A) = 7$, adică $x^2 - y^2 + z^2 = 7$, fiind un hiperboloid cu o pânză. Deoarece

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z,$$

rezultă că

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = 2x\vec{i} - 2y\vec{j} + 2z\vec{k} \implies \text{grad } u|_A = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}.$$

Un versor director al normalei la suprafața de nivel a lui u care trece prin A este

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \frac{\text{grad } u|_A}{\|\text{grad } u|_A\|} = \frac{1}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2}}(4\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}) = \frac{1}{6}(4\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}) \\ &= \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}.\end{aligned}$$

Deoarece \vec{n} are sensul gradientului, se obține că u crește după direcția lui \vec{n} .

Proprietăți de calcul

Au loc următoarele proprietăți, consecințe imediate ale proprietăților derivatelor parțiale cu ajutorul cărora este definit gradientul (aditivitate, omogenitate, formula de derivare a produsului, formula de derivare a raportului, regula lanțului).

Teorema 7.2. Fie u_1, u_2 două câmpuri scalare de clasă C^1 pe D și fie $c \in \mathbb{R}$. Atunci

1. $\text{grad}(u_1 + u_2) = \text{grad } u_1 + \text{grad } u_2$;
2. $\text{grad}(cu_1) = c \text{grad}(u_1)$;
3. $\text{grad}(u_1 u_2) = (\text{grad } u_1)u_2 + u_1(\text{grad } u_2)$,

iar dacă $u_2 \neq 0$ are loc și

$$4. \text{grad} \left(\frac{u_1}{u_2} \right) = \frac{1}{u_2^2} [(\text{grad } u_1)u_2 - u_1(\text{grad } u_2)].$$

Fie de asemenea φ un câmp scalar de clasă C^1 pe D și fie $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1 . Atunci

$$\text{grad } \varphi(u) = \varphi'(u) \text{grad } u.$$

Exemplu. Dacă

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

determinați $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^1 astfel încât $\vec{r} \cdot \text{grad } f(\|\vec{r}\|) = \|\vec{r}\|^2$ pentru orice $\vec{r} \in \mathbf{V}_3$.

Soluție. Conform regulii lanțului, rezultă că

$$\text{grad } f(\|\vec{r}\|) = f'(\|\vec{r}\|) \text{grad}(\|\vec{r}\|) = f'(\|\vec{r}\|) \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}, \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

De aici, pentru orice $\vec{r} \neq \vec{0}$,

$$\vec{r} \cdot \text{grad } f(\|\vec{r}\|) = \vec{r} \cdot f'(\|\vec{r}\|) \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \frac{f'(\|\vec{r}\|)}{\|\vec{r}\|} \vec{r} \cdot \vec{r} = \frac{f'(\|\vec{r}\|)}{\|\vec{r}\|} \|\vec{r}\|^2 = f'(\|\vec{r}\|) \|\vec{r}\|.$$

Urmează că

$$f'(\|\vec{r}\|) \|\vec{r}\| = \|\vec{r}\|^2 \implies f'(\|\vec{r}\|) = \|\vec{r}\|, \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

Atunci $f'(u) = u$ pentru orice $u \in (0, \infty)$ (de fapt, prin continuitate, și pentru $u = 0$), iar $f(u) = \int u du = \frac{u^2}{2} + C, C \in \mathbb{R}$.

7.3 Câmpuri vectoriale. Divergența și rotorul unui câmp vectorial

În cele ce urmează, vom încerca să caracterizăm atât „intensitatea”, cât și rotația unui câmp vectorial \vec{F} . Ambele concepte vor fi mai ușor de urmărit dacă ne imaginăm câmpul vectorial respectiv ca descriind mișcarea unui fluid. Intuitiv,

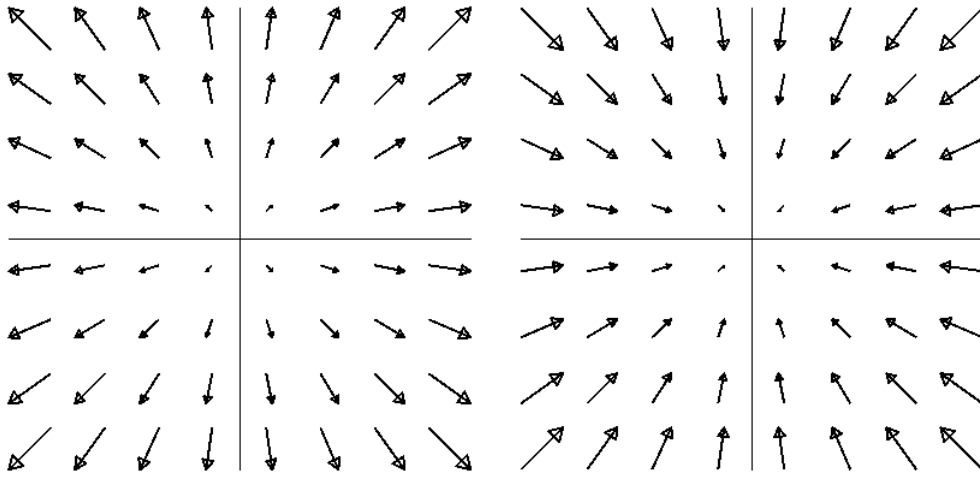


Figura 7.1: $F_1, F_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbf{V}_3, F_1(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j}, F_2(x, y, z) = -x\vec{i} - y\vec{j}$

figurile de mai sus, în care câmpurile vectoriale respective sunt reprezentate cu ajutorul unor săgeți par să descrie patru situații distincte.

În prima, câmpul vectorial pare a fi în expansiune, având ca sursă principală originea, care pare să „emită” câmpul vectorial. În cea de-a doua, originea pare să „absoarbă” câmpul vectorial. În cea de-a treia, câmpul vectorial pare să execute o mișcare de rotație în jurul originii. Toate aceste situații sunt „pure”, în sensul

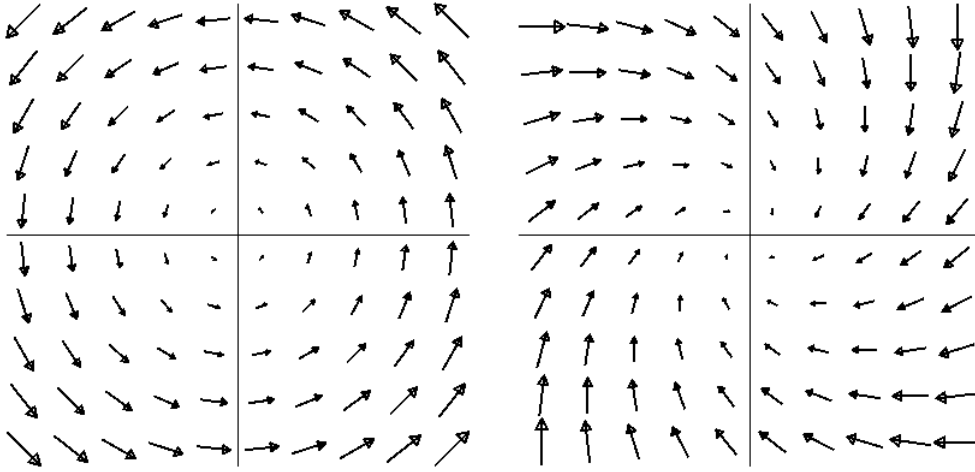


Figura 7.2: $F_3, F_4 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbf{V}_3$, $F_3(x, y, z) = -y\vec{i} + x\vec{j}$, $F_4(x, y, z) = (y - x)\vec{i} - (x + y)\vec{j}$

că în primele două exemple câmpul (sau fluidul) execută o mișcare radială (de îndepărtare sau apropiere de centru), corespunzătoare „emisiei” sau „absorbției”, fără rotație, în vreme ce în al treilea exemplu este executată o mișcare de rotație.

În fine, cea de-a patra situație este „mixtă”, în sensul că sunt executate în același timp o mișcare de rotație și una de apropiere de centru („absorbție”).

Pentru a studia aceste fenomene („emisie” și „absorbție” pe de o parte), respectiv rotație pe de altă parte, vom introduce în cele ce urmează doi operatori diferențiali, numiți **divergență** și **rotor**.

7.3.1 Divergența unui câmp vectorial

Fie $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbf{V}_3$ un câmp vectorial de clasă C^1 ,

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Numim **divergență** a câmpului vectorial \vec{F} câmpul scalar definit prin

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

În aceste condiții, referindu-ne la primele două exemple,

$$\operatorname{div}(\vec{F}_1) = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(0) = 2 > 0,$$

$$\operatorname{div}(\vec{F}_2) = \frac{\partial}{\partial x}(-x) + \frac{\partial}{\partial y}(-y) + \frac{\partial}{\partial z}(0) = -2 < 0,$$

deducând, intuitiv, faptul că divergența pozitivă este asociată unor fenomene de „emisie”, iar divergența negativă unora de „absorbție” (o justificare mai detaliată va fi oferită ulterior). Ceea ce este poate mai puțin intuitiv este faptul că **toate** punctele domeniului „emit”, respectiv „absorb”, originea nefiind singurul punct cu această proprietate, așa cum pare să indice desenul.

De asemenea,

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{F}_3) &= \frac{\partial}{\partial x}(-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) + \frac{\partial}{\partial z}(0) = 0, \\ \operatorname{div}(\vec{F}_4) &= \frac{\partial}{\partial x}(y-x) + \frac{\partial}{\partial y}(-x-y) + \frac{\partial}{\partial z}(0) = -2 < 0,\end{aligned}$$

ceea ce confirmă intuiția inițială (în al treilea exemplu are loc doar o mișcare de rotație, fără „emisie” sau „absorbție”, iar în cel de-al patrulea are loc o „absorbție”).

Să observăm că putem defini similar și divergența unui câmp vectorial $\vec{G} : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{V}_2$. Astfel, dacă $\vec{G} : E \rightarrow \mathbf{V}_2$ este un câmp vectorial de clasă C^1 ,

$$\vec{G}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j},$$

vom numi divergența a câmpului vectorial \vec{G} câmpul scalar definit prin

$$\operatorname{div} \vec{G} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Câmpuri vectoriale solenoidale

Fie $\vec{F} : D \rightarrow \mathbf{V}_3$ un câmp vectorial de clasă C^1 . Spunem că \vec{F} este **solenoidal** în D dacă $\operatorname{div} \vec{F}$ este identic nul în D .

Conform cu observațiile anterioare, un câmp solenoidal este un câmp **fără surse** (pozitive sau negative, adică atât fără „emisie” cât și fără „absorbție”). Să observăm că, utilizând notațiile de mai sus, \vec{F}_3 este un câmp vectorial solenoidal.

Proprietăți de calcul

Au loc următoarele proprietăți.

Teorema 7.3. Fie \vec{F}_1, \vec{F}_2 două câmpuri vectoriale de clasă C^1 pe D , fie u un câmp scalar pe D și fie $c \in \mathbb{R}$. Atunci

1. $\operatorname{div}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \operatorname{div}(\vec{F}_1) + \operatorname{div}(\vec{F}_2)$;
2. $\operatorname{div}(c\vec{F}_1) = c \operatorname{div}(\vec{F}_1)$;

$$3. \operatorname{div}(u\vec{F}_1) = (\operatorname{grad} u) \cdot \vec{F}_1 + u \operatorname{div}(\vec{F}_1).$$

Ultima formulă este un rezultat analog formulei de derivare a unui produs, cu deosebirea că lui u , fiind un câmp scalar și nu unul vectorial, nu i se poate aplica divergența.

Exemplu. Determinați $\operatorname{div} \vec{F}$, unde $\vec{F} : D \rightarrow \mathbf{V}_3$ este câmpul vectorial definit prin

$$F(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

($\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ reprezintă vectorul de poziție atașat lui $M(x, y, z)$)

Soluție. Se obține că

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Are deci loc relația

$$\operatorname{div}(\vec{r}) = 3.$$

Exemplu. Determinați $\operatorname{div} \vec{F}$, unde $\vec{F} : D \rightarrow \mathbf{V}_3$ este câmpul vectorial definit prin

$$F(x, y, z) = \|\vec{r}\|^2 \vec{r}$$

($\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ reprezintă vectorul de poziție atașat lui $M(x, y, z)$)

Soluție. Se obține că

$$\operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{div}(\|\vec{r}\|^2 \vec{r}) = \operatorname{grad}(\|\vec{r}\|^2) \cdot \vec{r} + \|\vec{r}\|^2 \operatorname{div}(\vec{r}).$$

Cu notația $\varphi(x) = x^2$, deducem

$$\operatorname{grad}(\|\vec{r}\|^2) = \operatorname{grad} \varphi(\|\vec{r}\|) = \varphi'(\|\vec{r}\|) \operatorname{grad} \|\vec{r}\| = 2\|\vec{r}\| \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = 2\vec{r}, \quad r \neq \vec{0}.$$

Deoarece

$$\operatorname{div} \vec{r} = 3,$$

rezultă că

$$\operatorname{div} \vec{F} = 2\vec{r} \cdot \vec{r} + 3\|\vec{r}\|^2 = 2\|\vec{r}\|^2 + 3\|\vec{r}\|^2 = 5\|\vec{r}\|^2.$$

Soluție alternativă. Observăm că

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

$$= x(x^2 + y^2 + z^2)\vec{i} + y(x^2 + y^2 + z^2)\vec{j} + z(x^2 + y^2 + z^2)\vec{k},$$

și atunci

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{F}) &= \frac{\partial}{\partial x}((x^2 + y^2 + z^2)x) + \frac{\partial}{\partial y}((x^2 + y^2 + z^2)y) + \frac{\partial}{\partial z}((x^2 + y^2 + z^2)z) \\ &= 2x^2 + (x^2 + y^2 + z^2) + 2y^2 + (x^2 + y^2 + z^2) + 2z^2 + (x^2 + y^2 + z^2) \\ &= 5(x^2 + y^2 + z^2). \end{aligned}$$

7.3.2 Rotorul unui câmp vectorial

Fie $\vec{F} : D \rightarrow \mathbf{V}_3$ un câmp vectorial de clasă C^1 ,

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Numim **rotor** al câmpului vectorial \vec{F} câmpul vectorial $\operatorname{rot} \vec{F}$ definit prin

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Referindu-ne la exemplele de mai sus,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F}_1 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(y) \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(x) - \frac{\partial}{\partial x}(0) \right) \vec{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(y) - \frac{\partial}{\partial y}(x) \right) \vec{k} = \vec{0}, \end{aligned}$$

similar observându-se că $\operatorname{rot} \vec{F}_2 = \vec{0}$. Aceasta confirmă, din nou, intuiția inițială (lipsa fenomenului de rotație din primele două exemple). În plus,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F}_3 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(x) \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(-y) - \frac{\partial}{\partial x}(0) \right) \vec{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y) \right) \vec{k} = 2\vec{k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F}_4 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-x & -x-y & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(-x-y) \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(y-x) - \frac{\partial}{\partial x}(0) \right) \vec{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(-x-y) - \frac{\partial}{\partial y}(y-x) \right) \vec{k} = -2\vec{k}. \end{aligned}$$

Notăție alternativă

În loc de $\operatorname{rot} \vec{F}$ se mai folosește și notația $\operatorname{curl} \vec{F}$ („to curl”, din limba engleză, înseamnă „a se răsuci”, „a se ondula”).

Câmpuri vectoriale irotaționale

Fie $\vec{F} : D \rightarrow \mathbf{V}_3$ un câmp vectorial de clasă C^1 . Spunem că \vec{F} este **irotațional** în D dacă $\operatorname{rot} \vec{F}$ este identic nul în D .

Să observăm că, utilizând notațiile de mai sus, \vec{F}_1 și \vec{F}_2 sunt câmpuri vectoriale irotaționale.

Proprietăți de calcul

Au loc următoarele proprietăți.

Teorema 7.4. Fie \vec{F}_1, \vec{F}_2 două câmpuri vectoriale de clasă C^1 pe D , fie u un câmp scalar de clasă C^1 pe D și fie $c \in \mathbb{R}$. Atunci

1. $\operatorname{rot}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \operatorname{rot}(\vec{F}_1) + \operatorname{rot}(\vec{F}_2)$;
2. $\operatorname{rot}(c\vec{F}_1) = c \operatorname{rot}(\vec{F}_1)$;
3. $\operatorname{rot}(u\vec{F}_1) = \operatorname{grad} u \times \vec{F}_1 + u \operatorname{rot} \vec{F}_1$.

Ultima formulă este, din nou, un rezultat analog formulei de derivare a unui produs, cu mențiunea că lui u , fiind un câmp scalar și nu unul vectorial, nu i se poate aplica rotorul.

Exemplu. Fie câmpul vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbf{V}_3$,

$$\vec{F}(x, y, z) = (y+z)\vec{i} + (z+x)\vec{j} + (x+y)\vec{k}.$$

Demonstrați că \vec{F} este atât irotațional, cât și solenoidal.

Soluție. Se obține că

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(x+y) - \frac{\partial}{\partial z}(z+x) \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(y+z) - \frac{\partial}{\partial x}(x+y) \right) \vec{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(z+x) - \frac{\partial}{\partial y}(y+z) \right) \vec{k} \\ &= (1-1)\vec{i} + (1-1)\vec{j} + (1-1)\vec{k} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Are deci loc relația

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{0},$$

câmpul vectorial \vec{F} fiind irotațional. De asemenea

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(y+z) + \frac{\partial}{\partial y}(z+x) + \frac{\partial}{\partial z}(x+y) = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Are deci loc relația

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 0,$$

câmpul vectorial \vec{F} fiind și solenoidal.

Exemplu. Determinați $\operatorname{rot} \vec{F}$, unde $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbf{V}_3$ este câmpul vectorial definit prin

$$F(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

($\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ reprezintă vectorul de poziție atașat lui $M(x, y, z)$).

Soluție. Se obține că

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(z) - \frac{\partial}{\partial z}(y) \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(x) - \frac{\partial}{\partial x}(z) \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(y) - \frac{\partial}{\partial y}(x) \right) \vec{k} \\ &= 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Are deci loc relația

$$\operatorname{rot}(\vec{r}) = \vec{0}.$$

Exemplu. Determinați $\text{rot } \vec{F}$, unde $\vec{F} : D \rightarrow \mathbf{V}_3$ este câmpul vectorial definit prin

$$F(x, y, z) = \|\vec{r}\|^2 \vec{r}$$

($\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ reprezintă vectorul de poziție atașat lui $M(x, y, z)$)

Soluție. Se obține că

$$\text{rot } \vec{F} = \text{rot}(\|\vec{r}\|^2 \vec{r}) = \text{grad}(\|\vec{r}\|^2) \times \vec{r} + \|\vec{r}\|^2 \text{rot}(\vec{r}).$$

Cu notația $\varphi(x) = x^2$, obținem

$$\text{grad}(\|\vec{r}\|^2) = \text{grad } \varphi(\|\vec{r}\|) = \varphi'(\|\vec{r}\|) \text{grad } \|\vec{r}\| = 2\|\vec{r}\| \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = 2\vec{r}, \quad r \neq \vec{0}.$$

Deoarece

$$\text{rot } \vec{r} = \vec{0},$$

urmează că

$$\text{rot } \vec{F} = 2\vec{r} \times \vec{r} + \vec{0} = \vec{0}.$$

Soluție alternativă. Observăm că

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= (x^2 + y^2 + z^2)(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \\ &= x(x^2 + y^2 + z^2)\vec{i} + y(x^2 + y^2 + z^2)\vec{j} + z(x^2 + y^2 + z^2)\vec{k}, \end{aligned}$$

și atunci

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{F}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x(x^2 + y^2 + z^2) & y(x^2 + y^2 + z^2) & z(x^2 + y^2 + z^2) \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(z(x^2 + y^2 + z^2)) - \frac{\partial}{\partial z}(y(x^2 + y^2 + z^2)) \right) \vec{i} \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial z}(x(x^2 + y^2 + z^2)) - \frac{\partial}{\partial x}(z(x^2 + y^2 + z^2)) \right) \vec{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(y(x^2 + y^2 + z^2)) - \frac{\partial}{\partial y}(x(x^2 + y^2 + z^2)) \right) \vec{k} \\ &= (2yz - 2yz)\vec{i} + (2zx - 2zx)\vec{j} + (2xy - 2xy)\vec{k} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Exemplu. Fiind dat un câmp scalar u , precizați dacă următoarele operații au ca rezultat scalari, vectori, sau nu sunt bine definite

1. $\operatorname{div}(\operatorname{rot} u)$,
2. $\operatorname{grad}(\operatorname{div} u)$,
3. $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$,
4. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u)$.

Soluție. Operația 1 nu este bine definită, întrucât $\operatorname{rot} u$ nu este bine definit (rotorul se poate aplica unui câmp vectorial, nu unuia scalar).

Operația 2 nu este bine definită, întrucât $\operatorname{div} u$ nu este bine definit (divergența se poate aplica unui câmp vectorial, nu unuia scalar).

Operația 3 este bine definită, cu rezultat un scalar (divergența vectorului $\operatorname{grad} u$ este un scalar).

Operația 4 este bine definită, cu rezultat un vector (rotorul vectorului $\operatorname{grad} u$ este un vector).

Exemplu. Fiind dat un câmp vectorial \vec{F} , precizați dacă următoarele operații au ca rezultat scalari, vectori, sau nu sunt bine definite

1. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \vec{F})$,
2. $\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F})$,
3. $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F})$,
4. $\operatorname{rot}(\operatorname{div} \vec{F})$.

Soluție. Operația 1 nu este bine definită, întrucât $\operatorname{grad} \vec{F}$ nu este bine definit (gradientul se poate aplica unui câmp scalar, nu unuia vectorial).

Operația 2 este bine definită, cu rezultat un vector (gradientul scalarului $\operatorname{div} \vec{F}$ este un vector).

Operația 3 este bine definită, cu rezultat un scalar (divergența vectorului $\operatorname{rot} \vec{F}$ este un scalar).

Operația 4 nu este bine definită, întrucât $\operatorname{rot}(\operatorname{div} \vec{F})$ nu este bine definit (rotorul se poate aplica unui câmp vectorial, în timp ce $\operatorname{div} \vec{F}$ este unul scalar).

7.3.3 Operatorul ∇ al lui Hamilton

Operatorii de bază ai teoriei câmpurilor menționați mai sus, anume grad , div și rot , se pot exprima sub o formă simplificată cu ajutorul următorului operator diferențial ∇ , numit și **operatorul lui Hamilton**,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}.$$

Acest operator poate fi gândit ca un vector simbolic, cu convenția că produsul fiecăruia dintre simbolurile $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ cu o funcție (câmp scalar) u este derivata parțială corespunzătoare a acestei funcții.

Exprimarea gradientului

Astfel, pentru un câmp scalar u de clasă C^1 ,

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = \text{grad } u,$$

operație care trebuie gândită similar înmulțirii dintre un vector și un scalar.

Exprimarea divergenței

Similar, pentru un câmp vectorial \vec{F} de clasă C^1 ,

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

rezultă că

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \text{div } \vec{F},$$

operație care trebuie gândită similar produsului scalar a doi vectori. Să remarcăm, totuși, că operația respectivă **nu** este comutativă. Într-adevăr

$$\vec{F} \cdot \nabla = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y} + R \frac{\partial}{\partial z}.$$

Exprimarea rotorului

De asemenea

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \text{rot } \vec{F},$$

operație care trebuie gândită similar produsului vectorial a doi vectori.

Reținem deci

$$\nabla u = \text{grad } u, \quad \nabla \cdot \vec{F} = \text{div } \vec{F}, \quad \nabla \times \vec{F} = \text{rot } \vec{F}.$$

7.3.4 Operatorul Δ al lui Laplace

Prin analogie cu operatorul ∇ al lui Hamilton, putem introduce următorul operator diferențial Δ , numit și **operatorul lui Laplace**, sau **laplacian**

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Din nou, se face convenția că produsul fiecăruia dintre simbolurile $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ cu o funcție (câmp scalar) u este derivata parțială corespunzătoare acestei funcții.

Δ aplicat unui câmp scalar

Astfel, pentru un câmp scalar u ,

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Se observă că, în fapt,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) &= \operatorname{div} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u. \end{aligned}$$

Altfel scris,

$$\Delta u = \nabla \cdot (\nabla u) = \nabla^2 u$$

 Δ aplicat unui câmp vectorial

Pentru un câmp vectorial \vec{F} ,

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

rezultă că

$$\Delta \vec{F} = \Delta(P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) = (\Delta P)\vec{i} + (\Delta Q)\vec{j} + (\Delta R)\vec{k},$$

operatorul Δ aplicându-se pe componentele lui \vec{F} .

7.3.5 Productivitatea unui domeniu și circulația unui câmp vectorial**Productivitatea unui domeniu**

Fie $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbf{V}_3$ un câmp vectorial de clasă C^1 . Vom numi **productivitate** a domeniului $V \subset D$ cantitatea $\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV$.

Circulația unui câmp vectorial

Vom numi **circulația** câmpului vectorial \vec{F} de-a lungul curbei $(\Gamma) \subset D$ mărimea (scalară)

$$C = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz.$$

Observăm că dacă \vec{F} este un câmp de forțe, atunci C reprezintă lucrul mecanic efectuat de \vec{F} de-a lungul lui (Γ) .

Să presupunem acum că (Γ) mărginește un domeniu plan D_1 . Definim atunci

$$C_m = \frac{1}{\text{aria}(D_1)} \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

ca fiind **circulația medie pe unitatea de arie a lui D_1** .

7.3.6 Definiția revizuită a rotorului

Putem defini atunci rotorul unui câmp vectorial \vec{F} , nu neapărat de clasă C^1 , precizând proiecția (scalară) a lui pe un versor arbitrar \vec{n} din \mathbf{V}_3 cu ajutorul formulei

$$\text{pr}_{\vec{n}} \text{rot } \vec{F}(M) = \lim_{\substack{\text{aria}(D_1) \rightarrow 0 \\ M \in D_1}} \frac{1}{\text{aria}(D_1)} \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

(Γ) fiind curba închisă care mărginește D_1 , un domeniu conținut într-un plan perpendicular pe \vec{n} , atunci când această limită există.

Dacă \vec{F} este un câmp vectorial de clasă C^1 , această definiție se reduce la definiția inițială. Totuși, această din urmă definiție precizează sensul fizic al rotorului ca fiind **circulația infinitezimală pe unitatea de arie**.

7.4 Câmpuri vectoriale particulare

Vom începe prin a menționa câteva proprietăți de legătură între gradient, divergență și rotor.

Teorema 7.5. 1. Pentru orice câmp scalar u de clasă C^2 ,

$$\text{rot}(\text{grad } u) = \vec{0}.$$

2. Pentru orice câmp vectorial \vec{F} de clasă C^2 ,

$$\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = 0.$$

Demonstrație. 1. Fiind dat un câmp scalar u de clasă C^2 , să observăm că

$$\text{rot}(\text{grad } u) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right) \vec{j}$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) \vec{k} = \vec{0},$$

conform egalității derivatelor parțiale mixte ale lui u .

2. Fiind dat un câmp vectorial \vec{F} de clasă C^2 ,

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

să observăm că

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) &= \operatorname{div} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} \\ &= 0, \end{aligned}$$

conform egalității derivatelor parțiale mixte ale lui P, Q, R . ■

7.4.1 Câmpuri potențiale

Fie un câmp vectorial $\vec{F} : D \rightarrow \mathbf{V}_3$,

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Vom spune că \vec{F} este un **câmp potențial** dacă el este gradientul unui câmp scalar, adică există $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ astfel ca $\vec{F} = \operatorname{grad} u$, câmpul scalar u numindu-se **potențialul** sau **funcția de forță** a câmpului vectorial \vec{F} .

Legătura între potențialul unui câmp vectorial și potențialul unei forme diferențiale

Se observă de aici că dacă \vec{F} este un câmp potențial,

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

iar u este potențialul său, atunci

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R.$$

Altfel spus,

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

este un câmp potențial dacă și numai dacă forma diferențială asociată

$$d\mathcal{F} = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

este formă diferențială exactă, iar u este un potențial pentru \vec{F} dacă și numai dacă este un potențial pentru $d\mathcal{F}$. Obținem atunci următoarea consecință a Teoremei 4.10.

Teorema 7.6. Fie $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un câmp de clasă C^1 pe domeniul simplu conex D . Următoarele afirmații sunt echivalente.

1. $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ este independentă de drum în D .
2. $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ pentru orice curbă închisă netedă pe porțiuni (C) conținută în D .
3. \vec{F} este câmp potențial.
4. \vec{F} este câmp irotațional.

Dacă D nu este simplu conex, atunci primele trei condiții sunt echivalente, iar cea de-a patra este o condiție necesară pentru celelalte trei, nu neapărat și suficientă. În plus, are loc următoarea formulă de calcul, similară formulei Leibniz-Newton pentru integrala definită.

Corolar 7.6.1. Fie $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un câmp potențial pe D și fie \widehat{AB} o curbă netedă pe porțiuni în D . Atunci

$$\int_{\widehat{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = u(x_B, y_B, z_B) - u(x_A, y_A, z_A),$$

unde u este potențialul lui \vec{F} .

Exemplu. Fie câmpul vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbf{V}_3$ definit prin

$$\vec{F}(x, y, z) = xyz(yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}).$$

Demonstrați că \vec{F} este un câmp potențial și determinați un potențial al acestuia.

Soluție. Observăm că

$$\vec{F}(x, y, z) = xy^2z^2\vec{i} + x^2yz^2\vec{j} + x^2y^2z\vec{k},$$

iar

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z^2 & x^2yz^2 & x^2y^2z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(x^2y^2z) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2yz^2) \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(xy^2z^2) - \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2z) \right) \vec{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2yz^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xy^2z^2) \right) \vec{k} \\ &= (2x^2yz - 2x^2yz)\vec{i} + (2xy^2z - 2xy^2z)\vec{j} + (2xyz^2 - 2xyz^2)\vec{k} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Urmează că \vec{F} este irotațional și, fiind definit pe întreg \mathbb{R}^3 (care este simplu conex), este și câmp potențial. Fie u potențialul său. Atunci

$$\frac{\partial u}{\partial x} = xy^2z^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2yz^2, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^2y^2z.$$

Deducem că

$$u = \int xy^2z^2 dx = \frac{1}{2}x^2y^2z^2 + \varphi_1(y, z).$$

Observăm că $u(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2y^2z^2$ verifică toate cele trei egalități, fiind deci un potențial al lui \vec{F} .

Exemplu. Fie câmpul vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbf{V}_3$ definit prin

$$\vec{F}(x, y, z) = (x + y + z)(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}).$$

Demonstrați că \vec{F} nu este un câmp potențial.

Soluție. Observăm că

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + xy + xz)\vec{i} + (y^2 + yx + yz)\vec{j} + (z^2 + zx + zy)\vec{k},$$

iar

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + xy + xz & y^2 + yx + yz & z^2 + zx + zy \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}(z^2 + zx + zy) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2 + yx + yz) \right) \vec{i} \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial z}(x^2 + xy + xz) - \frac{\partial}{\partial x}(z^2 + zx + zy) \right) \vec{j} \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(y^2 + yx + yz) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + xy + xz) \right) \vec{k} \\
&= (z - y)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (y - x)\vec{k}.
\end{aligned}$$

De aici, rot \vec{F} este neidentic nul în \mathbb{R}^3 , iar \vec{F} nu este irotațional. Nefiind un câmp irotațional, \vec{F} nu este nici un câmp potențial.

Exemplu. Fie câmpul vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbf{V}_3$ definit prin

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^n (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}).$$

Demonstrați că \vec{F} este un câmp potențial și determinați un potențial al acestuia.

Soluție. Observăm că

$$\vec{F}(x, y, z) = \|\vec{r}\|^{2n} \vec{r}, \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Căutăm atunci un potențial u de forma $u = \varphi(\|\vec{r}\|)$. Atunci

$$\text{grad } u = \text{grad } \varphi(\|\vec{r}\|) = \varphi'(\|\vec{r}\|) \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}, \quad \vec{r} \neq \vec{0},$$

iar

$$\|\vec{r}\|^{2n} = \varphi'(\|\vec{r}\|) \frac{1}{\|\vec{r}\|} \implies \varphi'(\|\vec{r}\|) = \|\vec{r}\|^{2n+1}, \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

De aici,

$$\varphi'(r) = r^{2n+1}, \quad r > 0 \implies \varphi(r) = \int r^{2n+1} dr = \frac{r^{2n+2}}{2n+2} + C.$$

Se obține că un potențial al lui \vec{F} este

$$u(x, y, z) = \frac{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^{2n+2}}{2n+2} = \frac{1}{2n+2} (x^2 + y^2 + z^2)^{n+1}.$$

7.4.2 Câmpuri solenoidale

Reamintim că un câmp vectorial $\vec{F} : D \rightarrow \mathbf{V}_3$ de clasă C^1 se numește **solenoidal** în D dacă $\operatorname{div} \vec{F}$ este identic nul în D .

Următoarele proprietăți sunt atunci consecințe ale formulei lui Stokes, respectiv ale formulei Gauss-Ostrogradski și formulelor de legătură menționate în Teorema 7.5.

Teorema 7.7. 1. Fluxul unui câmp solenoidal de clasă C^1 printr-o suprafață netedă închisă este 0.

2. Rotorul unui câmp \vec{G} de clasă C^2 este un câmp solenoidal.

7.4.3 Câmpuri armonice

Fie $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbf{V}_3$. Vom spune că \vec{F} este **armonic** dacă este în același timp solenoidal și irotational.

Dacă D este simplu conex, atunci \vec{F} este de asemenea un câmp potențial. Fie u potențialul acestuia. Atunci

$$\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \operatorname{div} \vec{F} = 0. \quad (7.2)$$

O funcție u de clasă C^2 care satisface ecuația (7.2), numită **ecuația lui Laplace**, va fi numită **funcție armonică**.

Exemplu. Fie câmpul vectorial \vec{F} definit prin $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbf{V}_3$,

$$\vec{F} = (y + z)\vec{i} + (z + x)\vec{j} + (x + y)\vec{k}.$$

Determinați un câmp vectorial \vec{A} astfel ca $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{A}$.

Soluție. Fie $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbf{V}_3$,

$$\vec{A}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Atunci

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k},$$

de unde

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = y + z \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = z + x \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x + y. \end{cases}$$

Din motive de simetrie, căutăm P, Q, R astfel încât

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{1}{2}(y + z), & \frac{\partial Q}{\partial z} = -\frac{1}{2}(y + z) \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{2}(z + x), & \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{1}{2}(z + x) \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2}(x + y), & \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{2}(x + y). \end{cases}$$

Deoarece

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{2}(z + x),$$

rezultă că

$$P = \int \frac{1}{2}(z + x)dz = \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{2}zx + \varphi_1(x, y).$$

Similar, deoarece

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{2}(x + y),$$

rezultă că

$$P = \int -\frac{1}{2}(x + y)dy = -\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}xy + \varphi_2(x, z).$$

Comparând cele două expresii ale lui P , observăm că o posibilă soluție este

$$P = \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{2}zx - \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}xy = -\frac{1}{4}(y^2 - z^2) - \frac{1}{2}x(y - z).$$

Din considerente similare obținem

$$Q = -\frac{1}{4}(z^2 - x^2) - \frac{1}{2}y(z - x), \quad R = -\frac{1}{4}(x^2 - y^2) - \frac{1}{2}z(x - y).$$

Câmpul vectorial căutat este atunci

$$\begin{aligned} \vec{F} = & - \left[\frac{1}{4}(y^2 - z^2) + \frac{1}{2}x(y - z) \right] \vec{i} - \left[\frac{1}{4}(z^2 - x^2) + \frac{1}{2}y(z - x) \right] \vec{j} \\ & - \left[\frac{1}{4}(x^2 - y^2) + \frac{1}{2}z(x - y) \right] \vec{k}. \end{aligned}$$

Exemplu. Fie câmpul vectorial \vec{F} definit prin $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbf{V}_3$,

$$\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Demonstrați că nu există un câmp vectorial \vec{A} de clasă C^2 astfel ca $\vec{F} = \text{rot } \vec{A}$.

Soluție. Dacă ar exista un câmp vectorial \vec{A} de clasă C^2 astfel ca $\vec{F} = \text{rot } \vec{A}$, atunci ar trebui ca

$$\text{div } \vec{F} = \text{div}(\text{rot } \vec{A}) = 0.$$

Observăm că

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 + 1 + 1 = 3 \neq 0,$$

de unde deducem că nu există un câmp vectorial \vec{A} cu proprietățile căutate.

Aplicații

7.1. Fie $\vec{a} \in \mathbf{V}_3$ un vector constant. Demonstrați că

$$\text{grad}(\vec{a} \cdot \vec{r}) = \vec{a}, \quad \text{div}(\vec{a} \times \vec{r}) = 0, \quad \text{rot}(\vec{a} \times \vec{r}) = 2\vec{a}.$$

7.2. Fie $\vec{a} \in \mathbf{V}_3$ un vector constant. Demonstrați că

$$\text{grad}((\vec{a} \cdot \vec{r})^n) = n(\vec{a} \cdot \vec{r})^{n-1}\vec{a}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

7.3. Fie $\vec{a} \in \mathbf{V}_3$ un vector constant. Demonstrați că

$$\text{grad}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{\|\vec{r}\|^n}\right) = \frac{\vec{a}}{\|\vec{r}\|^n} - n \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{\|\vec{r}\|^{n+2}} \vec{r}, \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

7.4. Determinați o funcție $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^1 pentru care

$$\vec{r} \cdot \text{grad } f(\|\vec{r}\|) = \|\vec{r}\|.$$

7.5. 1. Demonstrați că

$$\text{grad}\left(\frac{1}{\|\vec{r}\|^n}\right) = -n \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^{n+2}}, \quad \vec{r} \neq \vec{0}, n \in \mathbb{N}.$$

2. Demonstrați că $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbf{V}_3$,

$$\vec{F}(x, y, z) = -\frac{C}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r}, \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad C \in \mathbb{R}, C > 0,$$

(câmpul forțelor de atracție gravitațională) este un câmp potențial.

7.6. Fie $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbf{V}_3$,

$$\vec{F}(x, y, z) = (yz + 4x)\vec{i} + (xz + 4y)\vec{j} + (xy + 4z)\vec{k}.$$

Calculați $\text{rot } \vec{F}$ și arătați că \vec{F} este irotațional.

7.7. Fie $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbf{V}_3$,

$$\vec{F}(x, y, z) = (xy - 2z^2)\vec{i} + (4xz - y^2)\vec{j} + (yz - 2x^2)\vec{k}.$$

Calculați $\text{div } \vec{F}$ și arătați că \vec{F} este solenoidal.

7.8. Determinați $\varphi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^1 astfel încât câmpul vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = x\varphi(x)\vec{i} - y\varphi(x)\vec{j} + x^2z\vec{k}$$

să fie solenoidal. Pentru φ astfel determinat, precizați $\text{rot } \vec{F}$.

7.9. 1. Dacă $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție de clasă C^1 , iar $\vec{a} \in \mathbf{V}_3$ este un vector constant, demonstrați că

$$\text{div}(f(\|\vec{r}\|)\vec{a}) = \frac{f'(\|\vec{r}\|)}{\|\vec{r}\|}(\vec{r} \cdot \vec{a}), \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

2. Demonstrați că

$$\text{div} \left(\frac{\vec{a}}{\|\vec{r}\|} \right) = -\frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{\|\vec{r}\|^3}, \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

7.10. 1. Dacă $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție de clasă C^1 , demonstrați că

$$\text{div}(f(\|\vec{r}\|)\vec{r}) = f'(\|\vec{r}\|)\|\vec{r}\| + 3f(\|\vec{r}\|), \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

2. Demonstrați că

$$\text{div} \left(\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} \right) = \frac{2}{\|\vec{r}\|}, \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

3. Determinați $p \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\text{div}(\|\vec{r}\|^p \vec{r}) = 0.$$

7.11. 1. Dacă $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție de clasă C^2 , demonstrați că

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(\|\vec{r}\|)) = f''(\|\vec{r}\|) + 2\frac{f'(\|\vec{r}\|)}{\|\vec{r}\|}, \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

2. Demonstrați că

$$\operatorname{div} \left(\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} \right) = \frac{2}{\|\vec{r}\|}, \quad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

7.12. Fiind date două câmpuri vectoriale \vec{F}, \vec{G} de clasă C^1 , demonstrați că

$$\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{G} - \operatorname{rot}(\vec{G}) \cdot \vec{F}.$$

7.13. Demonstrați că dacă două câmpuri vectoriale \vec{F}, \vec{G} de clasă C^1 sunt irotaționale, atunci $\vec{F} \times \vec{G}$ este solenoidal.

7.14. Fie u, v două câmpuri scalare de clasă C^1 și fie \vec{F} câmpul vectorial definit prin

$$\vec{F} = \operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} v.$$

1. Demonstrați că F este solenoidal.

2. Demonstrați că $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{A}$, unde $\vec{A} = \frac{1}{2}(u \operatorname{grad} v - v \operatorname{grad} u)$.

7.15. Fie \vec{F} un câmp vectorial de clasă C^2 . Demonstrați că

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{F}) = \nabla^2 \vec{F} + \nabla \times (\nabla \times \vec{F}),$$

adică

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F}) = \Delta \vec{F} + \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{F})$$

(prima formă este mai ușor de reținut, întrucât toți membrii conțin „pătrate” în care intervine operatorul Hamilton, putând fi și privită prin analogie cu formula de derivare a unui produs).

7.16. Demonstrați că, folosind notația

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad \text{pentru } \vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k},$$

au loc relațiile

$$\operatorname{div} \vec{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \vec{F}, \quad \operatorname{rot} \vec{F} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \vec{F}.$$

7.17. 1. Demonstrați că, pentru orice $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{V}_3$,

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}.$$

2. Fie \vec{F}, \vec{G} două câmpuri vectoriale de clasă C^1 . Demonstrați că

$$\nabla \times (\vec{F} \times \vec{G}) = [(\nabla \cdot \vec{G})\vec{F} - (\nabla \cdot \vec{F})\vec{G}] + [(\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F} - (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{G}]$$

(prima parte este similară celei din formula de mai sus, iar a doua este „completarea” ei, după schimbarea ordinii în produsele simbolice, care, reamintim, sunt necomutative).

3. Demonstrați (și pe această cale) că dacă $\vec{a} \in \mathbf{V}_3$ este un vector constant, atunci

$$\text{rot}(\vec{a} \times \vec{r}) = 2\vec{a}.$$