Paul GEORGESCU, Gabriel POPA

ALGEBRĂ LINIARĂ.
PROBLEME PROPUSE

27 Decembrie 2008

MATRICE

1 Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, precizaţi care dintre produsele AB şi BA se poate efectua şi calculaţi produsul respectiv.

2 Dacă $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(X) = X^2 - 3X + 5$, calculaţi $P(A)$, unde $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3 Dacă $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, este întotdeauna adevărat că $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

4 Determinaţi toate matricele $A \in M_2(\mathbb{C})$ care comută cu $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5 Rezolvaţi în $M_2(\mathbb{R})$ ecuaţia $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

6 Dacă $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, să se calculeze A^n, $n \geq 2$, exprimând mai întâi A sub forma $A = I_2 + B$, cu $B^2 = O_2$.

7 Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, să se calculeze A^n, $n \geq 2$.

8 Dacă $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, iar $P \in \mathbb{R}[X]$, demonstraţi că

$$P(A) = \begin{pmatrix} P(a) & P'(a) & \frac{1}{2}P''(a) \\ 0 & P(a) & P'(a) \\ 0 & 0 & P(a) \end{pmatrix}.$$

9 Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, să se calculeze A^n, $n \geq 2$.

10 Fie $R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Demonstraţi că $R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha+\beta)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. Determinaţi $R(\alpha)^n$, $n \geq 2$.

11 Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi mulţimea $C(A) = \{X \in M_3(\mathbb{C}); XA = AX\}$.

1. Dacă $X, Y \in C(A)$, demonstraţi că $XY \in C(A)$.
2. Arătaţi că $X \in C(A)$ dacă şi numai dacă există $a, b, c \in \mathbb{C}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

12 Dacă $A \in M_n(\mathbb{R})$, notăm cu $\operatorname{Tr} A$ suma elementelor de pe diagonală principală a matricei A.

1. Demonstraţi că $\operatorname{Tr}(A + B) = \operatorname{Tr} A + \operatorname{Tr} B$, iar $\operatorname{Tr}(aA) = a \operatorname{Tr} A$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$ şi $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.
2. Fie $M = \{X \in M_n(\mathbb{R}); \operatorname{Tr} A = 0\}$. Arătaţi că matricea unitate I_n nu poate fi scrisă ca sumă de elemente ale lui M.
3. Dacă $\operatorname{Tr}(AA^t) = 0$, atunci $A = O_n$.

13 Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ şi funcţia $f : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$, $f(X) = AX - XA$.

1. Demonstraţi că $f(aX) = af(X)$ şi $f(X + Y) = f(X) + f(Y)$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$ şi $X, Y \in M_3(\mathbb{R})$.
2. Arătaţi că funcţia f nu este nici injectivă, nici surjectivă.

DETERMINANŢI

14 Calculaţi determinantul $D = \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix}$, ştiind că a, b, c, $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $\varepsilon^3 = 1$, $\varepsilon \neq 1$.

15 Calculaţi determinantul $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix}$, ştiind că

1. a_1, $a_2, \ldots, a_9$ sunt în progresie aritmetică;
2. a_1, $a_2, \ldots, a_9$ sunt în progresie geometrică.

16 Calculaţi determinantul $D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, ştiind că x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^3 + px + q = 0$.

17 Fie $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$. Calculând în două moduri $\det A$, să se deducă egalitatea

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz).$$

18 Calculaţi determinantul $D = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix}$.

19 Calculaţi determinantul $D = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$.

20 Calculaţi determinantul $D = \begin{vmatrix} a & b & -a & -b \\ -b & a & b & -a \\ c & d & c & d \\ -d & c & -d & -c \end{vmatrix}$.

21 Calculaţi determinantul $V(a,b,c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

22 Calculaţi determinantul $V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

23 Dacă $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, demonstraţi că

1. $\det(A+B) + \det(A-B) = 2(\det(A) + \det(B))$;
2. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

24 Dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, calculaţi $\det \left(\sum_{k=0}^{n} A^k \right)$.

25 Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Arătaţi că

1. Are loc egalitatea
$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = O_2.$$
2. Dacă $\det A = 0$, atunci $A^n = (a+d)^{n-1}A$.
3. Dacă există $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, astfel ca $A^n = O_2$, atunci $A^2 = O_2$.

26 Fie $A \in M_m(\mathbb{C})$, $B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $C \in M_{n,m}(\mathbb{C})$, $D \in M_n(\mathbb{C})$. Demonstraţi că
$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det D.$$

27 Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Demonstraţi că $A^n \neq O_3$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

28 Fie $A \in M_2(\mathbb{R})$ o matrice cu proprietatea că $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Demonstraţi că $\det A \in \{-1, 1\}$.
2. Determinaţi matricele A cu proprietatea dată.

RANGUL UNEI MATRICE. MATRICE INVERSABILE

29 Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea $A = \begin{pmatrix} m+1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ m-2 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ să aibă rangul 2.

30 Stabiliţi care este rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 1+m & m & m \\ m & 1+m & m \\ m & m & 1+m \end{pmatrix}$ în funcţie de $m \in \mathbb{R}$.

31 Fie $A \in M_2(\mathbb{C})$ o matrice cu proprietatea că $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^2)$. Demonstraţi că $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^n)$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

32 Dacă $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ sunt astfel ca $\text{rang}(AB) = \text{rang}((AB)^2)$, $\text{rang}(BA) = \text{rang}((BA)^2)$, demonstraţi că $\text{rang}(AB) = \text{rang}(BA)$.

33 Dacă $A \in M_{3,2}(\mathbb{C})$ şi $B \in M_{2,3}(\mathbb{C})$ sunt astfel ca $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, demonstraţi că $\text{rang}(BA) = 2$.

34 Dacă $A \in M_{n+1,n}(\mathbb{C})$, atunci $\det(AA^t) = 0$.

35 Dacă $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, calculaţi A^{-1}.

36 Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$, calculaţi A^{-1}.

37 Calculaţi inversele matricelor $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

38 Fie $A \in M_m(\mathbb{C})$, A inversabilă, $B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $C \in M_{n,m}(\mathbb{C})$, $D \in M_{n,n}(\mathbb{C})$. Demonstraţi că

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B)$$

39 Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$.

1. Arătaţi că $A^2 + 15I_3 = 16A$.

2. Folosind egalitatea de mai sus, demonstraţi că A este inversabilă şi determinaţi A^{-1}.

40 Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = A - I_4$.

1. Arătaţi că $(I_4 - A)(I_4 + A + A^2 + A^3) = I_4$.

2. Demonstraţi că matricea B este inversabilă şi determinaţi B^{-1}.

SISTEME LINIARE

41 Rezolvaţi sistemul

$$\begin{cases} 3x+2y+2z=7 \\ x-y+2z-t=2 \\ 2x+y-z+t=3 \\ x+y+z+t=6 \end{cases}.$$

42 Rezolvaţi sistemul

$$\begin{cases} 2x+y-z+2t=-3 \\ 4x-3y+5z-4t=5 \\ x-2y+3z-3t=4 \end{cases}.$$

43 Rezolvaţi sistemul

$$\begin{cases} x-3y+z-t=0 \\ 2x+y-z+2t=0 \end{cases}.$$

44 Rezolvaţi sistemul

$$\begin{cases} x+5y+4z-13t=3 \\ 3x-y+2z+5t=2 \\ 5x+y+5z+t=3 \end{cases}.$$

45 Rezolvaţi sistemul

$$\begin{cases} x+y-2z=-11 \\ 4x+2y+z=7 \\ 7x+4y+z=7 \end{cases}.$$

46 Determinaţi $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel ca sistemul

$$\begin{cases} (1+\lambda)x+y+z+t=0 \\ x+(1+\lambda)y+z+t=0 \\ x+y+(1-\lambda)z+t=0 \\ x+y+z+(1-\lambda)t=0 \end{cases}$$

să aibă şi soluţii nebanale.

47 Demonstraţi că dacă $a, b, c \in \mathbb{Z}$, atunci sistemul

$$\begin{cases} ax + by + cz = \dfrac{1}{2}x \\ cx + ay + bz = \dfrac{1}{2}y \\ bx + cy + az = \dfrac{1}{2}z \end{cases}$$

admite numai soluţia banală.

48 Rezolvaţi sistemul matriceal

$$\begin{cases} -2X + Y = A \\ 3X - 2Y = B \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

SUBSPAŢII LINIARE

49 Fie $V \neq \{0\}$ un spaţiu liniar. Demonstraţi că mulţimea V este infinită.

50 Precizaţi care dintre următoarele submulţimi ale lui $\mathbb{R}^3$ sunt subspaţii liniare ale acestuia în raport cu operaţiile uzuale de adunare a vectorilor şi înmulţire a vectorilor cu scalari.

1. $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; x_3 = 0 \right\}$;
2. $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; x_3 = 1 \right\}$;
3. $S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \right\}$;
4. $S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - x_3^2 = 0 \right\}$;
5. $S_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 \right\}$.

51 Precizaţi care dintre următoarele submulţimi ale lui $F[a,b] = \{f; f : [a,b] \to \mathbb{R}\}$ sunt subspaţii ale acestuia în raport cu operaţiile uzuale de adunare a funcţiilor şi înmulţire a funcţiilor cu scalari.

1. $S_1 = \{f \in F[a,b]; f(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]\}$;
2. $S_2 = \{f \in F[a,b]; f \text{ crescătoare}\}$;
3. $S_3 = \{f \in F[a,b]; f \text{ injectivă}\}$;
4. $S_4 = \{f \in F[a,b]; f(a) = 0\}$.

52 Fie $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a+b & 0 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Demonstraţi că S este subspaţiu liniar al lui $M_{2,3}(\mathbb{R})$.

53 Fie $S = \{\vec{v} \in V_2; \vec{v} \text{ coliniar cu } \vec{u}\}$, unde $\vec{u} \in V_2$ este un vector nenul dat. Demonstraţi că S este un subspaţiu liniar al lui V_2.

SISTEME LINIAR INDEPENDENTE. SISTEME DE GENERATORI

54 Fie $S = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$. Demonstraţi că S este sistem liniar dependent şi precizaţi o relaţie de dependenţă liniară între vectori.

55 Studiaţi liniara independenţă a sistemelor de vectori

1. $S_1 = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ în $M_2(\mathbb{R})$;
2. $S_2 = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ în $\mathbb{R}^4$;
3. $S_3 = \{v_1 = -X^2 + X + 1, v_2 = X^2 - X + 1, v_3 = X^2 + X - 1\}$ în $\mathbb{R}_2[X]$.

56 Fie $S = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Determinaţi α şi β astfel ca S să fie liniar independent.

57 Determinaţi numărul maxim de vectori liniar independenţi din sistemul

$$S = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

58 Fie $v_1,\ v_2 \in \mathbb{R}^3$ şi $S = \{w_1 = v_1 + 2v_2, w_2 = v_1 - v_2, w_3 = 2v_1 + v_2\}$.

1. Este S sistem liniar independent?
2. Este S sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^3$?

59 Dacă $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ este sistem liniar independent în $\mathbb{R}^m$, studiaţi liniara independenţă a sistemelor de vectori

1. $S_1 = \{w_1 = v_1 + v_2, w_2 = v_2 + v_3, \ldots, w_n = v_n + v_1\}$;
2. $S_1 = \{w_1 = v_1 - v_2, w_2 = v_2 - v_3, \ldots, w_n = v_n - v_1\}$.

60 Fie $S = \{v_1 = X^3 + X + 2, v_2 = 2X^3 - X^2 + 1, v_3 = 2X^2 + 3\}$.

1. Demonstraţi că S este sistem liniar independent în $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Precizaţi care dintre polinoamele $P = 4X + 3$ şi $Q = X + 1$ aparţine $\operatorname{span} S$.
3. Este S sistem de generatori pentru $\mathbb{R}_3[X]$?

BAZĂ ŞI DIMENSIUNE

61 Justificaţi printr-un raţionament imediat de ce următoarele sisteme de vectori nu sunt baze în spaţiile considerate

1. $S_1 = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ în $\mathbb{R}^3$;
2. $S_2 = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ în $\mathbb{R}^3$;
3. $S_3 = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ în $M_2(\mathbb{R})$;
4. $S_4 = \{v_1 = 2 + X, v_2 = 1 + X^2\}$ în $\mathbb{R}_2[X]$.
5. $S_5 = \left\{ \vec{v}_1 = \vec{i} + \vec{j}, \vec{v}_2 = 2\vec{i}, \vec{v}_3 = 3\vec{j} \right\}$ în V_2.

62 Fie $B' = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Demonstraţi că B' este o bază în $\mathbb{R}^3$ şi determinaţi coordonatele lui $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ în această bază.

63 Fie $B' = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

1. Demonstraţi că B' este bază în $\mathbb{R}^3$.
2. Determinaţi coordonatele lui $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ în raport cu această bază.
3. Există vreo bază în raport cu care v are coordonatele 1, 1, 1?

64 Fie sistemele de vectori

$$B_1 = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}, \quad B_2 = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

1. Să se demonstreze că B_1, B_2 sunt baze în $\mathbb{R}^3$.

2. Să se determine matricea de trecere S_{B_1,B_2} de la B_1 la B_2.

65 Determinaţi dimensiunea spaţiului liniar generat de sistemul de vectori

$$S = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$$

precum şi o bază în acesta. Este S un sistem de generatori în $\mathbb{R}^4$? Dar o bază?

66 Fie $S = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \right\}$. Determinaţi $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel ca

1. $\dim \operatorname{span}(S) = 1$;
2. $\dim \operatorname{span}(S) = 2$;
3. $\dim \operatorname{span}(S) = 3$.

67 Fie $S = \{1, 1 + X, 1 + X + X^2, \ldots, 1 + X + X^2 + \ldots + X^n\} \subset \mathbb{R}[X]$.

1. Determinaţi $\operatorname{span}(S)$.
2. Completaţi S la o bază în $\mathbb{R}_m[X]$, $m > n$.

68 Fie $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Demonstraţi că V este subspaţiu liniar al lui $M_{2,3}(\mathbb{R})$ şi precizaţi o bază în V.
2. Conţine V cinci vectori nenuli?
3. Conţine V cinci vectori liniar independenţi?
4. Precizaţi un subspaţiu liniar W al lui $M_{2,3}(\mathbb{R})$ astfel ca $V \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Există subspaţii liniare W ale lui $M_{2,3}(\mathbb{R})$ astfel ca $V \cap W = \emptyset$?

5. Există subspaţii liniare ale lui V de dimensiune 3?
6. Daţi exemple de subspaţii liniare ale lui V de dimensiune 1.
7. Există subspaţii liniare W ale lui $M_{2,3}(\mathbb{R})$ de dimensiune 3 astfel ca $V + W = M_{2,3}(\mathbb{R})$?

69 Demonstraţi că mulţimea soluţiilor sistemului

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

este subspaţiu liniar în $\mathbb{R}^4$ şi determinaţi o bază în acest subspaţiu.

70 Fie V_1 şi V_2 subspaţii liniare ale unui spaţiu liniar V cu $\dim V_1 = 6$, $\dim V_2 = 5$, $\dim V = 10$. Arătaţi că $V_1 \cap V_2 \neq \{0\}$.

71 Fie V_1, V_2 subspaţii liniare ale unui spaţiu liniar V, cu $\dim V_1 = 3$, $\dim V_2 = 4$, $\dim V = 6$.

1. Precizaţi dimensiunea minimă a lui $V_1 \cap V_2$.
2. Conţine $V_1 \cap V_2$ zece vectori nenuli?
3. Conţine $V_1 \cap V_2$ zece vectori liniar independenţi?

72 Fie V_1, V_2 subspaţii liniare ale unui spaţiu liniar V, $V_1 \neq V_2$. Dacă $\dim V_1 = 3$, $\dim V_2 = 4$, $\dim V = 5$, arătaţi că $V_1 + V_2 = V$ şi $\dim(V_1 \cap V_2) = 2$.

73 Există subspaţii liniare V_1, V_2 ale lui $\mathbb{R}^3$, de dimensiune 2, astfel ca $V_1 \cap V_2 = \{0\}$?

74 Fie $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$, $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}; y_3 = 0 \right\}$.

1. Arătaţi că V_1, V_2 sunt subspaţii liniare în $\mathbb{R}^3$.
2. Determinaţi $V_1 + V_2$.
3. Verificaţi că $\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$.

75 Demonstraţi printr-un raţionament imediat că următoarele aplicaţii nu sunt izomorfisme de spaţii liniare

1. $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.
2. $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_n[X]$, $T \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 + a_2 X + \ldots + a_n X^{n-1}$.
3. $T : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$, $T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$.
4. $T : M_2(\mathbb{R}) \to V_2$, $T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{11} + a_{12})\vec{i} + (a_{21} + a_{22})\vec{j}$.

5. $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+a \\ x_2+a \\ \vdots \\ x_n+a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

6. $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{pmatrix}$.

7. $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

76 Fie $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a+b & a \\ c & 0 & a \end{pmatrix} ; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Demonstraţi că V este subspaţiu liniar al lui $M_3(\mathbb{R})$, precizaţi dimensiunea sa şi o bază în V.

2. Arătaţi că $V \simeq \mathbb{R}^3$ şi precizaţi izomorfismul.

77 Fie aplicaţia $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definită prin $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Demonstraţi că T este izomorfism de spaţii liniare dacă şi numai dacă $\det A \neq 0$.

OPERATORI LINIARI

78 Precizaţi care dintre aplicaţiile următoare sunt operatori liniari

1. $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 \\ 2x_3 - 1 \end{pmatrix}$.
2. $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2^2 \\ x_3^3 \end{pmatrix}$.
3. $T_3 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $T_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + B$, $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $B \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
4. $T_4 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $T_4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$.
5. $T_5 : C^{k+1}[a,b] \to C^k[a,b]$, $T_5(f) = f'$.
6. $T_6 : C[a,b] \to \mathbb{R}$, $T_6(f) = \int_a^b f(x)dx$.

79 Fie $T \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ astfel ca $T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ şi $T \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calculaţi $T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

80 Există $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ astfel ca $T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$?

81 Fie $T_1 \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, $T_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - 2x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$, $T_2 \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $T_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$.
Calculaţi $T_1 \circ T_2$ şi $T_2 \circ T_1$.

82 Fie $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$. Demonstraţi că $T \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ şi precizaţi matricea lui T în raport cu perechea de baze canonice din $\mathbb{R}^2$, respectiv $\mathbb{R}^3$.

83 Fie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - x_3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$.

1. Precizaţi matricea lui T în raport cu baza canonică din $\mathbb{R}^3$.
2. Demonstraţi că T este injectiv.
3. Folosind eventual teorema rangului, demonstraţi că T este surjectiv.
4. Există $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ astfel ca $Ty = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$? Câte soluţii are problema?
5. Există $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $u \neq v$, astfel ca $Tu = Tv = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$?
6. Determinaţi T^{-1}.

84 Fie $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix}$.

1. Precizaţi matricea lui T în raport cu perechea de baze canonice din $\mathbb{R}^2$, respectiv $\mathbb{R}^3$.

2. Precizaţi matricea lui T în raport cu perechea de baze $B_1 = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, $B_1' = \left\{ v_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

85 Fie $T \in L(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}_2[X])$ a cărui matrice în raport cu baza canonică în $\mathbb{R}_2[X]$ este $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Determinaţi $T(1 - X + 2X^2)$.

86 Fie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ asrfel ca $T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. Determinaţi expresia explicită a lui T.

2. Determinaţi $T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

87 Fie $S = \{e_1' = 2, e_2' = 2X+1, e_3' = X^2+3\}$.

1. Arătaţi că S este o bază în $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Determinaţi matricea operatorului de derivare în raport cu această bază.

88 Fie $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Dacă matricea lui T în raport cu o bază oarecare $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ este $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\4 & 1 & 1\\2 & 1 & 2\end{pmatrix}$, determinaţi matricea lui T în raport cu bazele

1. $B_1' = \{e_2, e_1, e_3\}$;
2. $B_2' = \{2e_1, 3e_2, 4e_3\}$;
3. $B_3' = \{e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3\}$.

89 Fie $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, $T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x_1+x_2+x_3\\x_1-x_2+x_3\\x_1+x_2-x_3\end{pmatrix}$. Demonstraţi că T este bijectiv şi precizaţi T^{-1}.

90 Determinaţi $T \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ astfel ca $T\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ şi $T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

91 Fie $T \in L(V_1, V_2)$ cu $\dim V_1 = 5$, $\dim V_2 = 4$, $\operatorname{def} T = 2$. Demonstraţi că T nu este surjectiv.

92 Fie $T : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ definit prin

$$(Tp)(X) = Xp'(X).$$

1. Demonstraţi că T nu este injectiv şi precizaţi $\ker T$ şi $\operatorname{def} T$.
2. Demonstraţi că T nu este nici surjectiv.
3. Precizaţi matricea lui T în raport cu baza canonică din $\mathbb{R}_n[X]$.

93 Fie $T : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_{n+1}[X]$ definit prin

$$(Tp)(X) = Xp(X)$$

1. Demonstraţi că T este injectiv.

2. Demonstraţi că T nu este surjectiv şi precizaţi $\operatorname{Im} T$.

3. Precizaţi matricea lui T în raport cu perechea de baze canonice din $\mathbb{R}_n[X]$ şi $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.

VECTORI ŞI VALORI PROPRII

94 Fie $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_3 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix}$.

1. Determinaţi matricea A a lui T în raport cu baza canonică în $\mathbb{R}^3$.
2. Precizaţi valorile proprii, vectorii proprii şi subspaţiile proprii asociate lui A.
3. Demonstraţi că A este diagonalizabilă şi precizaţi forma diagonală.
4. Cu ajutorul formei diagonale, calculaţi A^n şi A^{-1}.

95 Fie $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$.

1. Determinaţi matricea A a lui T în raport cu baza canonică în $\mathbb{R}^3$.
2. Precizaţi valorile proprii, vectorii proprii şi subspaţiile proprii asociate lui A.
3. Demonstraţi că A este diagonalizabilă şi calculaţi forma diagonală.
4. Cu ajutorul formei diagonale, precizaţi A^n şi A^{-1}.

96 Fie $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 2x_1 - 2x_3 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$.

1. Determinaţi matricea A a lui T în raport cu baza canonică în $\mathbb{R}^3$.
2. Precizaţi valorile proprii, vectorii proprii şi subspaţiile proprii asociate lui A.
3. Demonstraţi că A nu este diagonalizabilă.
4. Există vreo matrice inversabilă $C \in M_3(\mathbb{R})$ astfel ca CAC^{-1} să fie diagonalizabilă?

97 Fie $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$.

1. Determinaţi matricea A a lui T în raport cu baza canonică în $\mathbb{R}^3$.
2. Precizaţi valorile proprii, vectorii proprii şi subspaţiile proprii asociate lui A.
3. Demonstraţi că A nu este diagonalizabilă.
4. Precizaţi un subspaţiu invariant unidimensional şi un subspaţiu invariant bidimensional al lui T.

98 Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Demonstraţi că A este diagonalizabilă şi precizaţi-i forma diagonală.

2. Cu ajutorul formei diagonale, demonstraţi că ecuaţia $X^n = A$ are soluţii în $M_3(\mathbb{R})$ pentru orice $n \geq 2$.

99 Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Preizaţi polinomul arateristi al matricei A.

2. Demonstraţi că $A^3 = 3A^2 - 2A + 4I_3$.

100 Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ şi λ o valoare proprie a sa.

1. Dacă $A^tA = I_n$ (adică A este ortogonală), atunci $|\lambda| = 1$.

2. Dacă $A^t = A$ (adică A este simetrică), atunci $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Dacă $A^t = -A$ (adică A este antisimetrică), atunci $\lambda \in i\mathbb{R} = \{ir, r \in \mathbb{R}\}$.

101 Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ şi fie λ_1, λ_2, $\ldots, \lambda_n$ valorile sale proprii. Demonstraţi că

1. $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{Tr} A$;

2. $\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n = \det A$.

SPAŢII EUCLIDIENE

102 Demonstraţi că aplicaţiile $(\cdot,\cdot):\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ definite prin

1. $\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=4x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+2x_2y_2;$
2. $\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+10x_2y_2$

sunt produse scalare pe $\mathbb{R}^2$ şi calculaţi $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$.

103 Demonstraţi că aplicaţiile $(\cdot,\cdot):\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ definite prin

1. $\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=x_1y_1+2x_2y_2-1;$
2. $\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=2x_1y_1-x_2y_1+3;$
3. $\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=x_1y_2+x_2y_1;$
4. $\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=4x_1y_1-2x_1y_2-2x_2y_1-x_2y_2;$

nu sunt produse scalare pe $\mathbb{R}^2$.

104 Fie aplicaţia $(\cdot,\cdot):\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definită prin

$$\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=4x_1y_1-x_2y_1+5x_2y_2.$$

1. Calculaţi $\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$.
2. Arătaţi că $(\cdot,\cdot)$ nu este un produs scalar pe $\mathbb{R}^2$.

105 Determinaţi produsele scalare ale următorilor vectori, normele lor şi unghiul dintre aceştia, fiecare spaţiu fiind înzestrat cu produsul scalar uzual.

1. $v_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\4\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\\1\end{pmatrix}$, $v_1,v_2\in\mathbb{R}^4;$
2. $v_1=\begin{pmatrix}-1&0\\1&3\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}0&2\\-2&1\end{pmatrix}$, $v_1,v_2\in M_{2,2}(\mathbb{R});$

3. $v_1 = 2x^2 + x - 1$, $v_2 = x + 1$, $v_1, v_2 \in \mathbb{R}_2[0,1]$, unde $\mathbb{R}_2[0,1]$ reprezintă spaţiul liniar al funcţiilor polinomiale de grad cel mult 2 definite pe $[0,1]$.

106 Fie $S = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \beta \end{pmatrix} \right\}$.

1. Precizaţi α, β pentru care S este ortogonal.
2. Pentru α, β astfel determinaţi, ortonormaţi sistemul rezultat.

107 Fie $S = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$, pe acest spaţiu considerându-se produsul scalar uzual.

1. Determinaţi vectorii unitari $v \in \mathbb{R}^3$ ortogonali concomitent pe v_1 şi v_2.
2. Determinaţi $w \in \mathbb{R}^3$ astfel ca $\|w - v_1\| = \|w - v_2\|$, unde $\|\cdot\|$ este norma uzuală pe $\mathbb{R}^3$.

108 Fie $S = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$, pe care se consideră produsul scalar uzual.

1. Demonstraţi că S este sistem ortogonal.
2. Demonstraţi că S este bază în $\mathbb{R}^3$.
3. Determinaţi componentele lui $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ în raport cu această bază.
4. Fie $v \in \mathbb{R}^3$ astfel ca $(v, v_1) = (v, v_2) = (v, v_3) = 0$. Demonstraţi că $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
5. Verificaţi faptul că $\|v_1 + v_2\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2 = 2\left(\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2\right)$.

109 Fie $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$. Demonstraţi că

1. $\left| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i} \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$;

(inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz discretă)

2. $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}$.
(inegalitatea Minkowski discretă)

110 Fie $f, g \in C[a,b], a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Demonstraţi că
1. $\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$;
(inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz integrală)
2. $\sqrt{\int_a^b (f+g)^2(x)dx} \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$.
(inegalitatea Minkowski integrală)

111 Demonstraţi că aplicaţia $(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$,

$$(p,q) = p(a)q(a) + p(b)q(b) + p(c)q(c), \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a < b < c$$

este un produs scalar pe $\mathbb{R}_2[X]$ şi formulaţi o generalizare.

112 Demonstraţi că aplicaţia $(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$,

$$(p,q) = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i, \quad \text{unde } p = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i, q = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$$

este un produs scalar pe $\mathbb{R}_n[X]$ şi calculaţi $(1 - X + X^2, 3 - 2X + 2X^2 - X^3)$.

113 Fie $S = \left\{ v_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$, pe care se consideră produsul scalar uzual.

1. Demonstraţi că S este sistem ortonormat.
2. Completaţi S la o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$.

114 Fie $(X, (\cdot,\cdot))$ un spaţiu euclidian şi $v_1, v_2 \in X$. Demonstraţi că
1. $(v_1, x) = 0\ \forall x \in X \Leftrightarrow v_1 = 0$;
2. $(v_1, x) = (v_2, x)\ \forall x \in X \Leftrightarrow v_1 = v_2$.

115 Fie $(X, (\cdot,\cdot))$ un spaţiu euclidian real şi $v_1, v_2 \in X$. Demonstraţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente

1. $(v_1, v_2) = 0$;
2. $\|v_1 + v_2\| = \|v_1 - v_2\|$;
3. $\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$.

116 Fie $(X, (\cdot, \cdot))$ un spaţiu euclidian real şi $v_1, v_2 \in X$. Demonstraţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente

1. $(v_1, v_2) = 0$;
2. $\|v_1\| \leq \|v_1 + \lambda v_2\| \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

117 Fie $(X, (\cdot, \cdot))$ un spaţiu euclidian real şi $v_1, v_2 \in X$. Demonstraţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente

1. $\|v_1\| = \|v_2\|$;
2. $(v_1 + v_2, v_1 - v_2) = 0$.

118 Fie $(X, (\cdot, \cdot))$ un spaţiu euclidian real şi $v_1, v_2 \in X$, $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$, $v_1 \neq v_2$. Demonstraţi că $\|\alpha v_1 + (1 - \alpha) v_2\| = 1 \Leftrightarrow \alpha = 0$ sau $\alpha = 1$.

119 Fie $S = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$, pe care se consideră produsul scalar uzual.

1. Demonstraţi că S este sistem ortogonal.
2. Determinaţi proiecţia lui $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ pe span(S).

120 Fie $B = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$, pe care se consideră produsul scalar uzual.

1. Demonstraţi că B este o bază în $\mathbb{R}^3$.
2. Este B sistem ortogonal?
3. Ortonormaţi B prin procedeul Gram-Schmidt.

121 Fie $B = \{v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2, v_4 = x^3\} \subset \mathbb{R}_3[-1, 1]$, pe care se consideră produsul scalar uzual.

1. Este B sistem ortogonal?
2. Ortonormaţi B prin procedeul Gram-Schmidt.

122 Demonstraţi că următoarele aplicaţii sunt transformări simetrice.

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$;

2. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$;

3. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\-x_2\\-x_3\end{pmatrix}$;

4. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_2+2x_3\\-x_1+3x_2-x_3\\2x_1-x_2+2x_3\end{pmatrix}$.

123 Demonstraţi că următoarele aplicaţii sunt transformări ortogonale.

1. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\cos\alpha-x_3\sin\alpha\\x_2\sin\alpha+x_3\cos\alpha\end{pmatrix}$, $\alpha\in[0,2\pi)$;

2. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_2\end{pmatrix}=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}4x_1-3x_2+12x_3\\12x_1-4x_2+3x_3\\3x_1+12x_2+4x_3\end{pmatrix}$;

3. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2x_1+2x_2-x_3\\2x_1-x_2+2x_3\\-x_1+2x_2+2x_3\end{pmatrix}$;

4. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}x_1+\sqrt{2}x_2+\sqrt{2}x_3\\\sqrt{3}x_1-\sqrt{3}x_3\\x_1-2x_2+x_3\end{pmatrix}$.

124 Fie $T_1,T_2\in L(X,X)$.

1. Dacă T_1, T_2 sunt transformări simetrice, demonstraţi că nu neapărat $T_1\circ T_2$ este transformare simetrică. Ce se întâmplă dacă $T_1\circ T_2=T_2\circ T_1$?

2. Dacă T_1, T_2 sunt transformări ortogonale, demonstraţi că $T_1\circ T_2$ este transformare ortogonală.

FORME LINIARE

125 Precizaţi care dintre următoarele aplicaţii sunt forme liniare.

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = x_1^2 + x_2^2;$
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = e^{x_1} + x_2;$
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3;$
4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = x_1 + 2x_2 + 3x_3;$
5. $f : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C},\ f(A) = \mathrm{Tr}\, A;$
6. $f : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C},\ f(A) = \det A;$
7. $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R},\ f(0) = P(0).$

126 Determinaţi coeficienţii următoarelor forme liniare în raport cu baza canonică şi cu baza $B' = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Precizaţi apoi expresia explicită a formelor liniare în raport cu baza B'.

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = 2x_1 - x_2 + x_3;$
2. $f : \mathbb{R}^3 \to R,\ f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = x_1 + x_2 - x_3;$
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = 2x_1 + x_3.$

127 Fie $S = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

1. Demonstraţi că S este o bază în $\mathbb{R}^3$.
2. Determinaţi o formă liniară $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ astfel ca $f(v_1) = 3,\ f(v_2) = 5,\ f(v_3) = 9$.

128 Fie $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R},\ f(p) = \displaystyle\int_0^1 p(x)dx$.

1. Demonstraţi că f este o formă liniară pe $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Demonstraţi că $f(a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n) = a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \cdots + \dfrac{a_n}{n+1}$.
3. Precizaţi matricea lui f în raport cu baza canonică din $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Precizaţi matricea lui f în raport cu baza

$$B = \left\{1, 1+X, 1+X+X^2, \ldots, 1+X+X^2+\cdots+X^n\right\}$$

şi determinaţi expresia lui f în raport cu această bază.

129 Fie $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R},\ f(p) = \displaystyle\int_0^1 xp'(x)dx$.

1. Demonstraţi că f este o formă liniară pe $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Demonstraţi că $f(a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n) = \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{2a_2}{3} + \cdots + \dfrac{na_n}{n+1}$.
3. Precizaţi matricea lui f în raport cu baza

$$B = \left\{1, 1+X, 1+X+X^2, \ldots, 1+X+\cdots+X^n\right\}$$

şi expresia lui f în raport cu această bază.

FORME BILINIARE

130 Precizaţi care dintre următoarele aplicaţii sunt forme biliniare.

1. $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = x_1^2 + y_2^2 + x_3^2$;
2. $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = e^{x_1} + e^{y_2}$;
3. $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$;
4. $g : M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $g(A, B) = \det(AB)$;
5. $g : M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $g(A, B) = \mathrm{Tr}(AB)$.

131 Determinaţi matricea următoarelor forme biliniare în raport cu baza canonică şi cu baza $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

1. $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + 3x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_3y_3$;
2. $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 + 2x_2y_1 + 5x_3y_3$;
3. $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 4x_1y_3 + 5x_2y_2 + 6x_3y_1 + x_3y_3$.

Reprezentaţi formele biliniare sub forma $g(X, Y) = X^tAY$. Sunt aceste forme biliniare simetrice? Dar antisimetrice? Precizaţi rangul acestor forme şi dacă acestea sunt degenerate sau nu.

FORME PĂTRATICE

132 Precizaţi formelele biliniare simetrice din care provin următoarele forme pătratice şi matricele acestor forme biliniare în raport cu baza canonică.

1. $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$;

2. $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

3. $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 8x_2x_3$.

Exprimaţi apoi aceste forme patratice în notaţia matriceală x^tCx.

133 Fie forma pătratică $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3.$$

1. Determinaţi forma biliniară simetrică din care provine F şi matricea acestei forme biliniare în raport cu baza canonică. Exprimaţi F în notaţia matriceală x^tCx.

2. Aduceţi forma pătratică la forma canonică folosind metoda Jacobi şi precizaţi o bază în raport cu care se realizează această formă canonică.

3. Precizaţi signatura lui F. Este F pozitiv definită?

4. Precizaţi rangul lui F şi dacă F este degenerată sau nedegenerată.

5. Există $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ astfel ca $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = 0$?

6. Calculaţi $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

134 Fie forma pătratică $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 10x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

1. Aduceţi această formă pătratică la forma canonică prin metoda lui Gauss şi precizaţi baza în raport cu care se realizează această formă canonică.

2. Precizaţi signatura lui F. Este F nedefinită?

3. Precizaţi rangul lui F şi dacă F este degenerată sau nedegenerată.

4. Există $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ astfel ca $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) > 0$? Dar $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ astfel ca $F(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) < 0$?

135 Fie forma biliniară $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$g(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_3y_3.$$

1. Determinaţi matricea lui g în raport cu baza canonică şi în raport cu baza $B' = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Este g simetrică?

2. Calculaţi $g_1(x, y) = (g(x, y) + g(y, x))$ şi arătaţi că g_1 este simetrică. Precizaţi matricea lui g_1 în raport cu baza canonică.

3. Precizaţi forma pătratică F indusă de g_1 şi o formă canonică a lui F.

4. Precizaţi signatura lui F. Este F negativ semidefinită?

136 Determinaţi $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât următoarele forme pătratice să fie pozitiv definite.

1. $F_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F_1(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\alpha x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$;

2. $F_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F_2(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = 5x_1^2 + x_2^2 + \alpha x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

3. $F_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F_3(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4\alpha x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

137 Precizaţi dacă putem aplica metoda lui Jacobi următoarelor forme pătratice.

1. $F_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F_1(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;
2. $F_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F_2(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$;
3. $F_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F_3(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3$.

138 Fie forma pătratică $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = x_1^2 - x_2^2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

1. Precizaţi forma biliniară simetrică din care provine F şi matricea acestei forme biliniare în raport cu baza canonică. Exprimaţi F în notaţia matriceală x^tCx.
2. Aduceţi această formă pătratică la forma canonică prin metoda valorilor proprii.
3. Precizaţi signatura lui F. Este F degenerată?
4. Demonstraţi că $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) \leq 3\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \|^2$, unde $\| \cdot \|$ este norma uzuală pe $\mathbb{R}^3$.

139 Fie $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$g(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = (T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}), \quad T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 +_3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \end{pmatrix},$$

pe $\mathbb{R}^3$ considerându-se produsul scalar uzual.

1. Demonstraţi că g este o formă biliniară pe $\mathbb{R}^3$.
2. Determinaţi matricea lui g în raport cu baza canonică.
3. Verificaţi că g este simetrică.
4. Determinaţi forma pătratică indusă de g.