Paul GEORGESCU, Gabriel POPA

GEOMETRIE VECTORIALĂ, ANALITICĂ ȘI DIFERENȚIALĂ. PROBLEME PROPUSE

v. 3.3, 7 Mai 2009

SPAŢIUL VECTORILOR LIBERI. STRUCTURA AFINĂ

1 Demonstraţi că trei vectori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ pot forma un triunghi $\Leftrightarrow \vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \overrightarrow{0}$ (relaţia lui Chasles).

2 Se consideră $\triangle ABC$ şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încât $MA = MB$, iar MA=2NC. Determinaţi coordonatele vectorilor $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CN}, \overrightarrow{MN}$ în fiecare din bazele
1) $B_1 = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$; 2) $B_2 = \left\{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\right\}$; 3) $B_3 = \left\{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right\}$.

3 Se consideră paralelogramul $ABCD$ de centru O şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (AD)$ astfel încât $3AM = AB$ şi $2AN = AD$. Determinaţi coordonatele vectorilor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{BD}$ în fiecare din bazele
1) $B_1 = \left\{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\right\}$; 2) $B_2 = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}\right\}$.

4 Fie $\{i, j\}$ baza canonică în plan.
1) Demonstraţi că vectorii $\vec{a} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ şi $\vec{b} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ sunt necoliniari;
2) Descompuneţi vectorul $\vec{v} = 5\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ după baza $B_1 = \left\{\vec{a}, \vec{b}\right\}$;
3) Aflaţi coordonatele vectorilor bazei $B = \left\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right\}$ în baza $B_1 = \left\{\vec{a}, \vec{b}\right\}$.

5 Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub. În raport cu reperul $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'})$, găsiţi coordonatele vectorilor $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{A'N}$, $\overrightarrow{OM}$, unde M, N sunt mijloacele segmentelor $[BC]$, respectiv $[CD]$, iar O este centrul cubului.

6 În $\triangle ABC$ se consideră $M \in [BC]$ astfel ca $\dfrac{BM}{MC} = k$. Demonstraţi că $\overrightarrow{AM} = \dfrac{k\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}}{k+1}$.

7 Demonstraţi că medianele unui triunghi sunt concurente într-un punct numit centrul de greutate al triunghiului.

8 Fie $\triangle ABC$ şi fie G centrul său de greutate.
1) Demonstraţi că $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
2) Dacă M este un punct oarecare, demonstraţi că $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

9 Demonstraţi că mijloacele laturilor unui patrulater convex $ABCD$ sunt vârfurile unui paralelogram.

10 Se consideră $\triangle ABC$ şi $D \in [BC]$ astfel încât $BC = 3DC$. Dacă E este mijlocul medianei CC', demonstraţi că punctele A, D şi E sunt coliniare.

SPAŢIUL VECTORILOR LIBERI. STRUCTURA EUCLIDIANĂ

11 Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic. Arătaţi că $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{D'C}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{A'B}\cdot\overrightarrow{B'C'}=0$.

12 Fie $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ doi vectori cu proprietatea că $\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\|$. Demonstraţi că $m(\widehat{BAC}) = 90°$.

13 Se consideră în plan punctele $A(1,1)$, $B(-1,-2)$, $C(c,0)$ şi $D(0,d)$, cu $c,d>0$.

1) Calculaţi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$.

2) Determinaţi c, d astfel încât A să fie ortocentrul $\triangle BCD$.

14 Se consideră pătratul $ABCD$ şi punctele $M\in[BC]$, $N\in[CD]$ astfel încât $BM = CN$. Demonstraţi că $AM\perp BN$.

15 Fie $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V_3$ de lungime 1 astfel ca $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Calculaţi $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$.

16 Demonstraţi că pentru orice puncte A, B, C din plan are loc egalitatea

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}(AB^2+BC^2+CA^2)$$

17 Fie $\triangle ABC$ şi fie G centrul său de greutate. Demonstraţi că dacă M este un punct oarecare, atunci $MA^2+MB^2+MC^2 = GA^2+GB^2+GC^2+3MG^2$.

18 Fie $ABCD$ un patrulater cu $AB\perp CD$ şi fie E, F mijloacele laturilor AD, respectiv BC. Demonstraţi că

1) $2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$;

2) $4EF^2 = AB^2+CD^2$;

3) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CD}$.

19 Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub.

1) Demonstraţi că $AC'\perp BD$.

2) Determinaţi cosinusul unghiului dintre AC' şi $A'M_1$, unde M este mijlocul lui AB.

20 Dacă $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, demonstraţi că $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$.

21 Demonstraţi că $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{0}$, $\forall\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V_3$.

22 Demonstraţi că $(\vec{a}-\vec{b},\vec{b}-\vec{c},\vec{c}-\vec{a})=0$, $\forall\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V_3$, algebric şi geometric.

23 Demonstraţi că $\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}, \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}, \frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}\right) = \frac{1}{4}(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$, $\forall \vec{a},\vec{b},\vec{c} \in V_3$.

24 Demonstraţi că $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d} \\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d} \end{vmatrix}$, $\forall \vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d} \in V_3$.

25 Fie A, B, C de vectori de poziţie $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C$. Demonstraţi că aria $\triangle ABC$ poate fi calculată prin formula

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\vec{r}_A\times\vec{r}_B + \vec{r}_B\times\vec{r}_C + \vec{r}_C\times\vec{r}_A\right\|$$

26 Fie A, B, C de vectori de poziţie $\vec{r}_A = 14\vec{\imath} - 7\vec{\jmath} + 2\vec{k}$, $\vec{r}_B = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 7\vec{k}$, $\vec{r}_C = 2\vec{\imath} + 7\vec{\jmath} + 2\vec{k}$. Arătaţi că $\triangle ABC$ este dreptunghic, iar $\triangle BOC$ este isoscel. Calculaţi perimetrul $\triangle ABC$, aria $\triangle ABC$ şi $m(\widehat{BAC})$.

27 Calculaţi lungimea înălţimii AD a $\triangle ABC$ de vârfuri $A(1,3,1)$, $B(3,1,5)$, $C(-1,0,2)$.

28 Calculaţi volumul tetraedrului de vârfuri $A(1,0,2), B(3,-1,1), D(4,2,-5), C(6,-5,1)$ şi lungimea înălţimii AE a tetraedrului.

29 Determinaţi $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel ca vectorii $\vec{a} = \vec{\imath} + \alpha\vec{\jmath} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 4\vec{k}$ să fie coplanari. Pentru acest α, descompuneţi $\vec{c}$ după direcţiile vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$.

30 Fie $\vec{a} = \vec{\imath} + \alpha\vec{\jmath} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$

1) Determinaţi $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel ca $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ să fie ortogonali. Pot fi $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ paraleli?

2) Determinaţi $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel ca $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ să fie coplanari.

31 Dacă unghiul dintre doi vectori $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ este ascuţit sau drept, demonstraţi că

$$1)\ \|\vec{u}+\vec{v}\| > \|\vec{u}\|\,; \qquad 2)\ \|\vec{u}+\vec{v}\| > \|\vec{v}\|\,.$$

Reciproca este adevărată?

32 Dacă $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sunt astfel ca $\|\vec{a}\| = 2$, $\|\vec{b}\| = 3$, $\|\vec{c}\| = 4$, $m(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\pi}{3}$, $m(\widehat{\vec{a},\vec{c}}) = \frac{\pi}{6}$, calculaţi $\|\vec{a}-\vec{b}\|$, $\|\vec{a}-\vec{c}\|$, $\|\vec{a}+\vec{b}\|$.

33 Fie vectorii $\vec{a} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

1) Arătaţi că $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sunt necoplanari şi calculaţi volumul paralelipipedului construit pe aceşti vectori.

2) Verificaţi că $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$.

DREAPTA ÎN SPAŢIU

34 Precizaţi ecuaţia vectorială, ecuaţiile parametrice şi ecuaţiile canonice ale dreptelor determinate prin:

1) $A(2,3,2)$ şi un vector director $\vec{a} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$;

2) $A(2,3,2)$ şi un vector director $\vec{a}$ care face unghiuri de $30°$, $45°$, $120°$ cu versorii axelor de coordonate;

3) $A(2,3,2)$, iar dreapta este paralelă cu axa OY;

4) $A(2,3,2)$ şi $B(0,2,3)$.

35 Determinaţi ecuaţiile laturilor şi medianelor $\triangle ABC$ cu vârfurile $A(3,1,5)$, $B(7,3,1)$, $C(5,5,3)$.

36 Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ astfel încât dreptele

$$(d_1) : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{3} \qquad (d_2) : \frac{x+11}{a} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{2}$$

să fie concurente şi în acest caz determinaţi coordonatele punctului de intersecţie.

37 Precizaţi ecuaţia perpendicularei duse din $A(3,1,2)$ pe dreapta de ecuaţie $(d) : \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+1}{2}$. Precizaţi apoi punctul de intersecţie al celor două drepte şi coordonatele simetricului lui A faţă de (d).

38 Determinaţi distanţa de la $A(1,3,2)$ la $(d) : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$.

39 Determinaţi distanţa între dreptele

$$(d_1) : \frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2} \qquad (d_2) : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{1}.$$

40 Determinaţi unghiul dreptelor

$$(d_1) : \frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2} \qquad (d_2) : \frac{x+1}{9} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{-6}.$$

Sunt aceste drepte concurente, sau neconcurente?

41 Studiaţi poziţia dreptei $(d_1) : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{1}$ faţă de dreapta $(d_2) : \vec{r} = \vec{r}_B + t\vec{v}$, unde

1) $B(1,2,3)$, $\vec{v} = 4\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} - 2\vec{k}$;

2) $B(3,4,-1)$, $\vec{v} = 4\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} - 2\vec{k}$;

3) $B(0,-2,2)$, $\vec{v} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$.

42 Fie dreapta $(d): \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z+2}{2}$.

1) Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin $M(1,2,1)$ şi este paralelă cu (d).

2) Arătaţi că dreapta $(d_1): \dfrac{x+5}{1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z+3}{-1}$ este perpendiculară pe (d). Sunt (d) şi (d_1) concurente?

43 Fie $M(2,1,0)$, $N(0,3,4)$, $P(4,1,2)$.

1) Arătaţi că M, N, P sunt necoliniare şi precizaţi aria $\triangle MNP$.

2) Precizaţi ecuaţiile dreptei MN şi ale medianei MM'.

44 Fie dreapta $(d): \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-4}{-1}$.

1) Determinaţi cosinusurile directoare ale dreptei.

2) Aflaţi intersecţia dreptei cu planele de coordonate.

45 Determinaţi locul geometric al punctelor $M(x,y,z)$ din spaţiu ale căror coordonate verifică relaţia

$$\frac{(x-2)^2}{4} = \frac{(y-1)^2}{9} = \frac{(z-3)^2}{16}.$$

PLANUL ÎN SPAŢIU

46 Scrieţi ecuaţiile planelor determinate de:

1) $A(2,-1,1)$ şi vectorul normal $N = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 5\vec{k}$;
2) $A(1,2,-1)$, $B(4,-3,2)$, $C(-2,1,-3)$;
3) Tăieturile pe axe $A(2,0,0)$, $B(0,-3,0)$, $C(0,0,4)$;
4) $A(-1,3,2)$ şi vectorii directori $\vec{u} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}$, $\vec{v} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$.

47 1) Scrieţi ecuaţia planului care trece prin $A(-3,1,2)$ şi este perpendicular pe AB, unde $B(-4,2,1)$.

2) Scrieţi ecuaţia planului care trece prin $A(2,3,5)$ şi este paralel cu planul (P) : $x + 2y - 3z + 5 = 0$.

3) Scrieţi ecuaţia planului care trece prin $A(1,2,3)$, $B(2,2,2)$ şi este paralel cu $\vec{u} = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 4\vec{k}$.

48 Determinaţi ecuaţia unui plan (P) care trece prin $A(2,1,3)$, $B(3,2,1)$ şi este perpendicular pe planul $(P_1) : 3x - y + 2z - 4 = 0$.

49 Scrieţi ecuaţia planului (P) care trece prin $A(2,1,3)$ şi este perpendicular pe planele $(P_1) : -x + y + 2z - 2 = 0$, $(P_2) : 2x + y - z + 2 = 0$.

50 Determinaţi ecuaţia unui plan (P) ştiind că perpendiculara din origine pe acesta îl intersectează în $A(3,2,4)$.

51 Determinaţi ecuaţia unui plan (P) ştiind că perpendiculara coborîtă din $M(1,2,3)$ pe acesta îl intersectează în $A(1,-2,1)$.

52 Fie $A(4,2,3)$, $B(2,6,5)$. Precizaţi ecuaţia planului mediator al segmentului $[AB]$.

53 Determinaţi proiecţia punctului $A(2,1,1)$ pe planul $(P) : x + y + 3z + 5 = 0$ şi simetricul său faţă de planul dat.

54 Fie $(d_1) : \begin{cases} x - y - 3z + 2 = 0 \\ 2x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$, $(d_2) : \dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y-2}{8} = \dfrac{z+3}{-1}$. Demonstraţi că dreptele (d_1) şi (d_2) sunt paralele, justificând mai întâi de ce (d_1) este o dreaptă.

55 Precizaţi care dintre următoarele perechi de plane sunt alcătuite din plane paralele, confundate sau perpendiculare.

$1)(P_1): 2x+y-3z+4=0,$ $\qquad$ $(P_2): 4x+2y-6z+0=0;$

$2)(P_1): x-y+2z-3=0,$ $\qquad$ $(P_2): 2x-2y+4z-6=0;$

$3)(P_1): x+y+z-1=0,$ $\qquad$ $(P_2): x+y-2z+3=0$

56 Precizaţi dacă planele $(P_1): x+2y-2z-3=0$, $(P_2): 2x-y+3z-3=0$, $(P_3): 3x+y-z-4=0$ au puncte comune.

57 Determinaţi poziţia dreptei (d) faţă de planul (P) dacă

1) $(d): \dfrac{x+3}{5} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+1}{2}$, $(P): -x+y+z-2=0$;

2) $(d): \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-1}{2}$, $(P): 2x-y+z-3=0$;

3) $(d): \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+2}{1}$, $(P): 2x-5y+4z+15=0$.

58 Determinaţi unghiul planelor

1) $(P_1): 2x-y+4z-5=0$, $(P_2): 3x+2y-z+6=0$;

2) $(P_1): x+2y-z+6=0$, $(P_2): 2x-y+2z-1=0$;

3) $(P_1): 2x+y+3z-1=0$, $(P_2): x-2y-2z+5=0$.

59 Calculaţi distanţa între planele $(P_1): 2x-10y+11z-6=0$, $(P_2): 2x-10y+11z-21=0$.

60 Determinaţi ecuaţia unui plan (P) aflat la egală distanţă de planele $(P_1): x+y-2z+3=0$ şi $(P_2): x+y-2z+15=0$.

61 Fie planul $(P): \vec{r}\cdot(2\vec{\imath}-6\vec{\jmath}+9\vec{k}) = 10$.

1) Precizaţi semnificaţia vectorului $\vec{v} = 2\vec{\imath}-6\vec{\jmath}+9\vec{k}$ pentru acest plan şi determinaţi un punct care aparţine lui (P).

2) Determinaţi ecuaţia carteziană generală a unui plan care este paralel cu (P) şi trece prin $A(1,3,5)$.

62 Scrieţi dreapta $(d): \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-4}{3}$ ca o intersecţie de plane.

63 Scrieţi ecuaţia dreptei $(d): \begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ 3x-y+2z-5=0 \end{cases}$ sub formă canonică.

64 Determinaţi ecuaţia planului care conţine dreapta $(d) : \begin{cases} 3x + 2y - z + 1 = 0 \\ x - 3y + z - 4 = 0 \end{cases}$ şi punctul $B(2, 3, 1)$.

65 Determinaţi ecuaţia planului care conţine dreapta $(d) : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z+2}{3}$ şi punctul $B(1, 1, 2)$.

66 Precizaţi ecuaţia planului determinat de dreptele paralele

$$(d_1) : \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{3} \quad (d_2) : \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{3}.$$

67 Precizaţi ecuaţia planului care conţine perpendicularele din $A(3, 1, 2)$ pe planele $(P_1) : 4x - 3y + z - 1 = 0$ şi $(P_2) : x + 5y - z + 2 = 0$.

68 Precizaţi distanţa de la $A(2, 3, 1)$ la planul $(P) : 2x - 6y + 9z - 2 = 0$.

69 Precizaţi distanţa de la $A(1, 4, 2)$ la dreapta $(d) : \begin{cases} 2x + 3y - z + 4 = 0 \\ 3x - y + 2z - 5 = 0 \end{cases}$.

COORDONATE POLARE, CILINDRICE ŞI SFERICE

70 Determinaţi coordonatele polare ale punctelor cu următoarele coordonate carteziene:
1) $M_1(1, \sqrt{3})$;
2) $M_2(2, -2)$;
3) $M_3(-\sqrt{3}, 1)$.

71 Determinaţi coordonatele carteziene ale punctelor cu următoarele coordonate polare:
1) $M_1(r = 2, \theta = \frac{\pi}{3})$;
2) $M_2(r = 4, \theta = \frac{7\pi}{6})$;
3) $M_3(r = 1, \theta = \frac{7\pi}{4})$.

72 Fie pătratul $ABCD$ de latură l. Determinaţi coordonatele polare ale vârfurilor în următoarele situaţii:
1) Polul este în O, centrul pătratului, iar axa polară este semidreapta $[OA$;
2) Polul este în A iar axa polară este semidreapta $[AB$.

73 Fie hexagonul regulat $ABCDEF$ de latura l. Determinaţi coordonatele polare ale vârfurilor în următoarele situaţii:
1) Polul este în O, centrul hexagonului, iar axa polară este semidreapta $[OA$;
2) Polul este în A iar axa polară este semidreapta $[AB$.

74 Precizaţi natura mulţimilor reprezentate în coordonate polare prin ecuaţiile următoare:
1) $r = r_0$, $r_0 > 0$;
2) $\theta = \theta_0$, $\theta_0 \in [0, 2\pi)$.

75 Exprimaţi ecuaţiile următoare, date în coordonate carteziene, cu ajutorul coordonatelor polare:
1) $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$;
2) $x^2 - y^2 = b^2$, $b > 0$;
3) $xy = c$, $c > 0$.

76 Dacă punctele A, B au respectiv coordonatele polare (ρ_A, θ_A), (ρ_B, θ_B), demonstraţi că

$$AB = \sqrt{\rho_A^2 + \rho_B^2 - 2\rho_A\rho_B cos(\theta_A - \theta_B)}.$$

77 Fie $A(r = r_0, \theta = \theta_0)$. Determinaţi coordonatele polare ale următoarelor puncte

1) M_1, simetricul lui A faţă de OX;

2) M_2, simetricul lui A faţă de OY;

3) M_3, simetricul lui A faţă de O;

4) M_4, simetricul lui A faţă de prima bisectoare;

5) M_5, simetricul lui A faţă de a doua bisectoare.

78 Determinaţi coordonatele carteziene ale punctelor cu următoarele coordonate sferice:

1) $M_1(r = 2, \varphi = \frac{\pi}{6}, \theta = \frac{\pi}{3})$;

2) $M_2(r = 1, \varphi = \frac{5\pi}{6}, \theta = \frac{5\pi}{4})$;

3) $M_3(r = 1, \varphi = 60°, \theta = 120°)$.

79 Determinaţi coordonatele carteziene ale punctelor cu următoarele coordonate cilindrice:

1) $M_1(r = 4, \theta = \frac{\pi}{3}, z = 2)$;

2) $M_2(r = 6, \theta = \frac{7\pi}{4}, z = 1)$;

3) $M_3(r = 1, \theta = 30°, z = 3)$.

80 Determinaţi coordonatele sferice şi cilindrice ale punctelor cu următoarele coordonate carteziene:

1) $M_1(3, 3, 0)$;

2) $M_2(1, -1, \sqrt{2})$;

3) $M_3(2, 1, -2)$.

81 Exprimaţi ecuaţiile următoare, date în coordonate cilindrice, cu ajutorul coordonatelor carteziene:

1) $z = r^2 \cos 2\theta$;

2) $z = r^2 \sin 2\theta$;

3) $z = r \cos(\frac{\pi}{4} - \theta)$.

82 Exprimaţi ecuaţiile următoare, date în coordonate sferice, cu ajutorul coordonatelor carteziene:

1) $r^2 \sin 2\varphi \cos \theta = 1$;

2) $r^2 \sin^2 \varphi \cos 2\theta = 1$;

3) $r = \sin \varphi \cos \theta$.

83 Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ de latură l. Determinaţi coordonatele sferice ale punctelor O (centrul cubului), C, C' în raport cu reperul $(A; AB, AD, AA')$.

84 Precizaţi natura mulţimilor exprimate în coordonate sferice prin ecuaţiile următoare:
1) $r = r_0$, $r_0 > 0$;
2) $\varphi = \varphi_0$, $\varphi_0 \in [0, \pi]$;
3) $\theta = \theta_0$, $\theta_0 \in [0, 2\pi]$.

85 Precizaţi natura mulţimilor exprimate în coordonate cilindrice prin ecuaţiile următoare:
1) $r = r_0$, $r_0 > 0$;
2) $\theta = \theta_0$, $\theta_0 \in [0, 2\pi]$;
3) $z = z_0$, $z_0 \in \mathbb{R}$.

86 Precizaţi natura mulţimilor exprimate în coordonate sferice prin relaţiile următoare:
1) $r = 2$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$;
2) $r = 2$, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$;
3) $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

87 Exprimaţi ecuaţiile următoare, date în coordonate carteziene, cu ajutorul coordonatelor sferice şi cilindrice:
1) $x^2 + y^2 = 4$;
2) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$;
3) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

ROTAŢII ŞI TRANSLAŢII

88 Se consideră în plan vectorul $\vec{v} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$. Determinaţi imaginile obţinute în urma translaţiei de vector $\vec{v}$ a

1) punctului $M(1, -2)$;

2) dreptei $(d) : 2x + y = 0$.

89 Se consideră în spaţiu vectorul $\vec{v} = i + j + k$. Determinaţi imaginile obţinute în urma translaţiei de vector $\vec{v}$ a

1) punctului $M(1, 2, 3)$;

2) dreptei $(d) : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{1}$;

3) planului $(P) : x + y - z = 0$.

90 1) Precizaţi coordonatele punctului M' obţinut prin rotaţia lui $M(1, 2)$ cu $30°$ în jurul originii în sens direct trigonometric.

2) Reperul $R(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ se roteşte cu $30°$ în jurul originii în sens direct trigonometric. Precizaţi noile coordonate ale punctului $M(1, 2)$.

91 Se consideră punctele $A(1, 0)$ şi $B(2, 3)$. Rotim segmentul AB în jurul punctului A, în sens trigonometric, cu un unghi φ. Aflaţi coordonatele imaginii B' a lui B prin această rotaţie, în fiecare din cazurile

1) $\varphi = 90°$; 2) $\varphi = 120°$.

92 Se consideră punctele $A(1, 0)$ şi $B(2, 3)$. Fie A', B' imaginile acestor puncte printr-o rotaţie în jurul originii O, de unghi $60°$, în sens trigonometric. Determinaţi ecuaţia dreptei $A'B'$.

93 Se consideră $\triangle ABC$, unde $A(1, 0)$, $B(-1, 0)$, $C(0, \sqrt{3})$. Determinaţi imaginile vârfurilor triunghiului în urma rotaţiilor

1) în jurul lui A, în sens invers trigonometric, cu $120°$;

2) în jurul centrului de greutate G al triunghiului, în sens invers trigonometric, cu $120°$.

CONICE PE ECUAŢII REDUSE

CERCUL

94 Precizaţi ecuaţia cercului în fiecare dintre cazurile următoare:

1) Centrul cercului este în $C(-4,3)$ şi cercul trece prin origine.
2) Punctele $A(-3,2)$, $B(5,-4)$ sunt extremităţile unui diametru.
3) Centrul cercului este în $C(1,2)$, iar dreapta $(d): x+y+1=0$ este tangentă la cerc.
4) Cercul trece prin punctele $A(2,2)$, $B(0,1)$, $C(1,0)$.

95 Precizaţi poziţia lui $A(-2,1)$ faţă de cercurile

1) $(C_1): x^2+y^2=8$;
2) $(C_2): (x+1)^2+(y-2)^2=2$;
3) $(C_3): x^2+y^2-6x+4y-17=0$.

96 Fie cercurile $(C_1): x^2+y^2+2x+2y-2=0$, $(C_2): x^2+y^2-4x-6y+4=0$.

1) Demonstraţi că (C_1), (C_2) sunt tangente exterior şi precizaţi coordonatele punctului de tangenţă.

2) Determinaţi ecuaţia tangentei comune la cele două cercuri în punctul de intersecţie.

97 Fie cercul $(C_1): x^2+y^2+4x-6y+17=0$.

1) Determinaţi centrul şi raza cercului.
2) Determinaţi ecuaţia diametrului perpendicular pe dreapta $(d): 2x-3y+5=0$.

98 Precizaţi poziţia dreptei faţă de cerc în fiecare din cazurile următoare.

1) $(d_1): x+2y+2=0$, $(C_1): x^2+y^2+6x-4y+9=0$;
2) $(d_2): x-2y-5=0$, $(C_2): x^2+y^2=5$;
3) $(d_3): 2x-y+13=0$, $(C_3): x^2+y^2-8x+2y+11=0$.

99 Precizaţi ecuaţia tangentei la cercurile următoare în punctele specificate.

1) $(C_1): (x-2)^2+(y+3)^2=25$, $A(6,0)$;
2) $(C_2): (x+1)^2+(y-2)^2=100$, $B(7,8)$.

100 1) Precizaţi ecuaţia tangentei în $A(6,2)$ la cercul $(C_1): (x-2)^2+(y+1)^2=25$.

2) Precizaţi ecuaţia tangentei din $B(-1,6)$ la cercul $(C_2): x^2-2x+y^2-19=0$.

101 Fie cercul de ecuaţie $(C_1): x^2+y^2-10x+2y+6=0$.

1) Precizaţi ecuaţia parametrică a cercului.
2) Determinaţi ecuaţiile tangentelor paralele cu dreapta $(d_1): 2x-y+5=0$.
3) Determinaţi ecuaţiile tangentelor perpendiculare pe dreapta $(d_2): x+2y+6=0$.

102 Demonstraţi că dreapta $(d) : -x+7y+12=0$ este secantă cercului $(C) : (x-1)^2+(y-2)^2=25$ şi precizaţi coordonatele punctelor de intersecţie.

103 Determinaţi ecuaţiile tangentelor la cercul $(C) : x^2+y^2-2x+10y-74=0$ care sunt paralele cu dreapta $(d) : x+2y-3=0$.

104 Arătaţi că din punctul $M(4,2)$ nu se pot duce tangente la cercul $(C) : x^2+y^2-10x+2y+1=0$.

ELIPSA

105 Precizaţi ecuaţia elipsei (raportată la axele de simetrie) determinată de
1) Focarele $F(4,0)$, $F'(-4,0)$ şi semiaxa mare $a=5$.
2) Punctele $M(4,3)$ şi $N(2,6)$.
3) Distanţa focală 8 şi semiaxa mică $b=3$.
4) Semiaxa mare 20 şi excentricitatea 0.6.

106 Fie elipsa $(E) : 4x^2+9y^2=324$.
1) Determinaţi semiaxele elipsei, distanţa focală, excentricitatea şi ecuaţiile directoarelor.
2) Determinaţi punctele elipsei a căror abscisă este 8 precum şi razele focale ale acestora.
3) Demonstraţi că din $M(2,2)$ nu se pot duce tangente la elipsă.

107 Fie elipsa $(E) : x^2+4y^2=4$ şi punctele $M(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$, $N(2,2)$.
1) Determinaţi ecuaţiile tangentei şi normalei la elipsă în M.
2) Determinaţi ecuaţiile tangentelor la elipsă din N şi lungimea coardei determinate de punctele de contact ale acestora cu elipsa.

108 Determinaţi poziţia dreptei faţă de elipsă în fiecare din cazurile următoare
1) $(d_1) : x-y-3=0$; $(E_1) : x^2+3y^2=27$;
2) $(d_2) : -5x+2y-9=0$; $(E_2) : 9x^2+5y^2=45$.

109 Fie elipsa $(E) : 4x^2+9y^2=324$. Determinaţi lungimea diametrului care trece prin $M(3,2)$.

110 Dacă ecuaţia tangentei într-un punct M al unei elipse $(E) : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ este $(d) : 2x+3y+1=0$, precizaţi ecuaţia tangentei în punctul M' diametral opus lui M.

111 Demonstraţi că dreapta $(d) : y = mx + n$ este tangentă elipsei $(E) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ dacă $n^2 = b^2 + a^2m^2$.

112 Demonstraţi că locul geometric al punctelor din care se pot duce tangente perpendiculare la elipsa $(E) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ este cercul cu centrul în origine şi rază $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ (cercul ortoptic sau cercul lui Monge asociat elipsei).

113 Determinaţi ecuaţia canonică a elipsei care este tangentă dreptelor $(d_1) : -4x + y + 13 = 0$, $(d_2) : -5x + 4y - 25 = 0$.

114 Demonstraţi că produsul distanţelor de la focarele unei elipse la o tangentă variabilă este constant.

115 Dacă M este un punct variabil pe o elipsă de focare F şi F' şi centru O, arătaţi că suma $MF \cdot MF' + MO^2$ este constantă.

HIPERBOLA

116 Precizaţi ecuaţia hiperbolei (raportata la axele de simetrie) determinată de

1) Distanţa dintre vârfuri 10 şi distanţa focală 15.
2) Punctul $M(5, 2)$ şi distanţa dintre vârfuri 8.
3) Distanţa focală 10 şi ecuaţiile asimptotelor $y = \pm\dfrac{3}{4}x$.
4) Punctul $M(3, 4)$; hiperbola este echilateră.
5) Distanţa focală 10 şi excentricitatea 1.25.

117 Fie hiperbola $(H) : 9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$. Determinaţi semiaxele sale, distanţa focală, vârfurile, asimptotele şi ecuaţiile directoarelor.

118 O hiperbolă trece prin $M(4, 1)$ iar unghiul format de asimptotele sale este de $60°$. Determinaţi ecuaţia canonică a hiperbolei.

119 Demonstraţi că dreapta $(d) : y = mx + n$ este tangentă hiperbolei $(H) : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ dacă $n^2 = a^2m^2 - b^2$.

120 Demonstraţi că locul geometric al punctelor din care se pot duce tangente perpendiculare la hiperbola $(H) : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ este

1) Cercul cu centrul în origine şi de rază $R = \sqrt{a^2 - b^2}$ (cercul ortoptic sau cercul lui Monge asociat hiperbolei), dacă $a > b$.

2) Originea O, dacă $a = b$.

3) Mulţimea vidă, dacă $a < b$.

Interpretaţi geometric ultimele două situaţii.

121 Determinaţi ecuaţiile tangentelor la hiperbola $(H) : 36x^2 - 25y^2 = 900$ paralele cu dreapta $(d) : 2x - y + 2 = 0$.

122 Determinaţi ecuaţia hiperbolei care este tangentă dreptei $(d) : -2x + 3y - 8 = 0$ în $A(5, 6)$.

123 Fie hiperbola $(H) : 4x^2 - 9y^2 = 144$.

1) Precizaţi semiaxele hiperbolei, distanţa focală, vârfurile şi asimptotele.

2) Demonstraţi că din $M(8, 1)$ nu se pot duce tangente la hiperbolă.

3) Precizaţi ecuaţiile tangentelor duse din $N(0, 3)$ la hiperbolă.

124 Dacă M este un punct variabil pe o hiperbolă de focare F, F' şi centru O, arătaţi că diferenţa $MF \cdot MF' - MO^2$ este constantă.

125 Demonstraţi că produsul distanţelor de la un punct arbitrar al hiperbolei $(H) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ la asimptotele acesteia este constant, egal cu $\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$.

PARABOLA

126 Precizaţi ecuaţia parabolei (raportată la axele de simetrie) determinată de

1) Distanţa de la focar la vârf egală cu 6.

2) Punctul $M(3, 6)$.

3) Focarul $F(3, 0)$.

127 Determinaţi pe parabola $(P) : y^2 = 12x$ punctele de rază focală egală cu 10.

128 Fie parabola $(P) : y^2 = 8x$. Determinaţi razele focale ale punctelor M, N de pe parabolă cu abscisă 1, respectiv ordonată 4.

129 Demonstraţi că dreapta $(d) : y = mx + n$ este tangentă parabolei $(P) : y^2 = 2px$ dacă $n = \frac{p}{2m}$.

130 Demonstraţi că locul geometric al punctelor din care se pot duce tangente perpendiculare la parabola $(P) : y^2 = 2px$ este directoarea parabolei.

131 Se consideră parabola $(P) : y^2 = 2px$ şi dreapta $(d) : y = a$.

1) Demonstraţi că dreapta intersectează parabola într-un singur punct.

2) Este dreapta (d) tangentă parabolei?

132 Determinaţi ecuaţiile tangentelor duse din $M(4, 3)$ la parabola $(P) : y^2 = 2x$.

133 Precizaţi punctele de pe parabola $(P) : y^2 = 2x$ în care tangenta este paralelă cu dreapta $(d) : x - 2y + 3 = 0$.

134 Determinaţi punctele de intersecţie ale dreptei $(d) : x - y - 3 = 0$ cu parabola $(P) : y^2 = 4x$ şi precizaţi ecuaţiile tangentelor la parabolă în punctele de intersecţie.

135 Determinaţi ecuaţia canonică a unei parabole dacă tangenta paralelă cu dreapta $(d) : -x + 3y + 2 = 0$ trece prin $M(3, 4)$.

CONICE PE ECUAŢII GENERALE

136 Aduceţi la forma canonică şi reprezentaţi grafic conicele

1) $6x^2 - 4xy + 9y^2 - 4x - 32y - 6 = 0$;

2) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 0 = 0$;

3) $3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 3 = 0$;

4) $3x^2 + 4xy + 12x + 16y - 36 = 0$;

5) $xy + x + 2y = 0$;

6) $4x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$;

7) $x^2 + 2xy + y^2 - 3x + 3y - 18 = 0$;

8) $2x^2 + 4xy + 2y^2 - 7x - 7y + 3 = 0$;

9) $-3x^2 + 5xy + 2y^2 + 16x + 3y - 5 = 0$;

10) $x^2 + 2y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$.

SFERA

137 Precizaţi ecuaţia sferei în fiecare dintre cazurile următoare

1) Sfera trece prin $A(2,-1,-3)$ şi are centrul în $C(3,2,-1)$.

2) Sfera are centrul în $C(1,2,2)$ şi este tangentă la planul $(P): 2x+y+2z-5=0$.

3) Punctele $A(2,2,3)$, $B(6,4,7)$ sunt extremităţile unui diametru.

4) Sfera trece prin punctele $A(2,3,1)$, $B(1,1,5)$, $C(3,6,7)$, $D(3,2,1)$.

138 Precizaţi poziţia planului faţă de sferă în fiecare din cazurile următoare

1) $(P_1): 6x+4y+3z-2=0$, $(S_1): (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$;

2) $(P_2): 2x+3y-6z-1=0$, $(S_2): (x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4$;

3) $(P_3): 3x-y+2z+5=0$, $(S_3): (x-3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=1$.

139 Determinaţi ecuaţia sferei cu centrul în $C(4,5,2)$ ştiind că sfera $(S): x^2+y^2+z^2-4x-12y+36=0$ este tangentă interior la sfera căutată.

140 Fie sfera $(S): x^2+y^2+z^2+4x+6y+8z-35=0$.

1) Precizaţi centrul şi raza sferei (S).

2) Precizaţi ecuaţiile parametrice ale sferei (S).

3) Arătaţi că $A(8,-6,0)$ este exterior sferei şi precizaţi ecuaţia sferei cu centrul în A tangentă la (S).

141 Fie sfera $(S): x^2+y^2+z^2-6x+2y+z-11=0$.

1) Precizaţi centrul şi raza sferei.

2) Precizaţi ecuaţiile diametrului perpendicular pe planul $(P): -x+5y+2z-9=0$.

142 Fie sfera (S) tangentă în $M(4,3,2)$ la planul $(P_1): x+y+z+9=0$, al cărui centru O se află în planul $(P_2): 5x-4y+7z-14=0$.

1) Precizaţi ecuaţia normalei în M la planul (P_1) şi justificaţi că ea conţine centrul O al sferei.

2) Determinaţi coordonatele lui O.

3) Determinaţi distanţa de la O la (P_1).

4) Precizaţi ecuaţia sferei (S).

143 Determinaţi ecuaţia planului (P) tangent sferei $(S): (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=14$ în punctul $A(3,1,2)$.

144 Determinaţi ecuaţiile planelor tangente sferei $(S) : (x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2 = 16$ care sunt paralele cu planul $(P) : 3x - 4y = 2$.

145 Fie sfera $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z + 8 = 0$.

1) Precizaţi centrul şi raza sferei (S).

2) Precizaţi punctele de intersecţie ale dreptei $(d) : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$ cu sfera (S) folosind eventual ecuaţiile parametrice ale lui (d).

3) Precizaţi ecuaţiile planelor tangente la sferă în punctele determinate anterior.

146 Fie planul $(P) : x + 2y + 2z + 4 = 0$.

1) Determinaţi ecuaţile parametrice ale normalei la (P) în punctul $A(2, 1, -4)$.

2) Determinaţi ecuaţiile sferelor de rază $R = 2$ tangente planului (P) în punctul A.

147 Precizaţi ecuaţia planului care conţine intersecţia sferelor $(S_1) : (x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2 = 16$, $(S_2) : (x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$.

CUADRICE PE ECUAŢII REDUSE

148 Determinaţi curbele de intersecţie ale elipsoidului $(E) : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{4} - 1 = 0$ cu axele de coordonate.

149 Precizaţi natura curbelor

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ 2z = x^2 + y^2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ z = 2 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = 2 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ z = 3 \end{cases}$.

150 Precizaţi ecuaţiile planelor paralele cu xOy care taie elipsoidul $(E) : \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$ după o elipsă cu distanţa focală 6.

151 Determinaţi punctele de intersecţie ale elipsoidului $(E) : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{12} + \dfrac{z^2}{16} - 1 = 0$ cu dreapta $(d) : \dfrac{x+2}{-2} = \dfrac{y+6}{-3} = \dfrac{z-4}{2}$.

152 Determinaţi punctele de intersecţie ale paraboloidului eliptic $(PE) : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 2z$ cu dreapta $(d) : \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1}$.

153 Determinaţi valoarea lui m pentru care planul $(P) : 2x - y + 2z - m = 0$ este tangent paraboloidului eliptic $(PE) : \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4} = 2z$. Pentru acest m, determinaţi coordonatele punctului de tangenţă.

154 Determinaţi ecuaţia planului (P) tangent la paraboloidul hiperbolic $(PH) : \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 2z$ care este paralel cu planul $(P_1) : x - y + z - 1 = 0$.

155 Determinaţi distanţa de la paraboloidul eliptic $(PE) : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 2z$ la planul $(P) : x - y - 2z + 1 = 0$.

156 Precizaţi în ce condiţii normala în orice punct al unui elipsoid trece prin centrul acestuia.

TEORIA SUPRAFEŢELOR

157 Fie suprafaţa (S) dată parametric prin

$$(S):\begin{cases} x = u^2 + v + 3 \\ y = u^2 - v + 1 \\ z = uv \end{cases}.$$

1) Determinaţi ecuaţia normalei la (S) şi a planului tangent la (S) în $A(u = 1, v = 0)$. Este acest plan paralel cu planul $(P) - x + y - z + 4 = 0$? Dar perpendicular pe acesta?

2) Să se arate că

2a) Curbele de coordonate $u = k$ sunt drepte.

2b) Curba $u = v$ de pe suprafaţa (S) este curbă plană.

158 Determinaţi ecuaţia planului tangent şi ecuaţia normalei în punctele precizate la următoarele suprafeţe

1) $(S_1):\begin{cases} x = ue^v \\ y = ue^{-v} \\ z = 4uv \end{cases}$ în $A(2, 2, 0)$;

2) $(S_2): z = x^3 + y^3$ în $B(1, 2, 9)$;

3) $(S_3): x^2 + 2xy + y^2 + 4xz + z^2 + 2x + 4y - 6z + 8 = 0$ în $C(0, 0, 2)$.

159 Determinaţi ecuaţia planului tangent şi ecuaţia normalei la (S) în M_0 pentru

1) $(S):\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = uv \end{cases}$, $M_0(u = 2, v = 1)$;

2) $(S): z = 5x^2 + 4y - 3, M_0(1, 0, 2)$;

3) $(S_3): \vec{r} = (1 + uv)\vec{\imath} + (u + u^2v)\vec{\jmath} + (u^2 + u^3v)\vec{k}, M_0(3, 3, 3)$.

CURBE ÎN SPAŢIU

160 Fie curba (C) dată parametric prin $(C):\begin{cases} x(t)=\dfrac{2t^3}{3}+1 \\ y(t)=-\dfrac{3t^2}{2}+t \\ z(t)=e^t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ şi dreapta $(d):\begin{cases} y+z-1=0 \\ x-2=0 \end{cases}$.

1) Determinaţi un vector director al dreptei (d).

2) Determinaţi punctele de pe curba (C) în care planul normal este paralel cu (d).

3) În punctele obţinute mai sus, precizaţi ecuaţia planului normal şi tangentei.

161 Fie curba (C) dată prin ecuaţia vectorială $(C):\vec{r}=\ln t\,\vec{\imath}+2t\vec{\jmath}+t^2\vec{k}$, $t>0$.

1) Determinaţi lungimea arcului $\overset{\frown}{AB}$ de pe curba (C), unde $A(0,2,1)$, $B(\ln 2,4,4)$.

2) Determinaţi ecuaţia planului osculator şi a binormalei în A.

3) Arătaţi că normala principală în orice punct de pe curbă este paralelă cu planul $(P): x+z=0$.

162 Fie curba (C) dată parametric prin $\begin{cases} x(t)=e^t\cos t \\ y(t)=e^t\sin t \\ z(t)=e^{-2t} \end{cases}$.

1) Determinaţi ecuaţia planului osculator şi a binormalei în $M_0(t_0=0)$. Este acest plan paralel cu planul $(P): 2x+y+z=1$? Dar perpendicular pe acesta?

2) Determinaţi punctele de pe curba (C) în care tangenta este paralelă cu dreapta $(d):\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+4}{-2}$.

163 Determinaţi ecuaţiile tangentei şi planului normal la curbele date mai jos în punctele precizate

1) $(C):\vec{r}=2\cos t\,\vec{\imath}+2\sin t\,\vec{\jmath}+4t\vec{k}$ în $M_0(t_0=\dfrac{\pi}{6})$.

2) $(C):\begin{cases} x^3-y^2+z+6=0 \\ x-y^2+z^3+6=0 \end{cases}$ în $M_0(-1,-2,-1)$.

164 Fie curba $(C):\vec{r}(t)=(2t-1)\vec{\imath}+t^3\vec{\jmath}+(1-t^2)\vec{k}$.

1) Să se determine punctele de pe curba (C) în care planul osculator este perpendicular pe planul $(P): 7x-12y+5z-3=0$.

2) În punctele obţinute mai sus, să se scrie ecuaţiile binormalei.

165 Fie curba $(C) : \begin{cases} x^2 = 2az \\ y^2 = 2bz \end{cases}$, $a > 0$, $b > 0$. Reprezentaţi această curbă parametric.

166 În fiecare dintre cazurile de mai jos, să se arate că (C) este o curbă plană şi să se determine ecuaţia planului curbei.

1) $(C) : \vec{r}(t) = (t^2 - 1)\vec{i} + t^2\vec{j} + \ln t\,\vec{k}$, $t \in \mathbb{R}$;

2) $(C) : \vec{r}(t) = (2t^3 + t^2)\vec{i} + (t^2 - 2t)\vec{j} + (t^3 + t - 1)\vec{k}$, $t \in \mathbb{R}$.

167 Determinaţi punctele curbei de ecuaţii parametrice $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t} \\ y(t) = t \\ z(t) = 2t^2 - 1 \end{cases}$ în care binormalele sunt perpendiculare pe dreapta $(d) : \begin{cases} x + y = 1 \\ 4x - z = 2 \end{cases}$.

PROBLEME DE SINTEZĂ

168 Fie $\vec{a}$, $\vec{b} \in V_3$ necoliniari.

1) Calculaţi $\|(\vec{a}+\vec{b}) \times (\vec{a}-\vec{b})\|$în funcţie de $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ şi interpretaţi geometric rezultatul.

2) Calculaţi $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 + \|\vec{a} - \vec{b}\|^2$ în funcţie de $\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$ şi interpretaţi geometric rezultatul.

169 Demonstraţi că $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2$, $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$

170 Fie G centrul de greutate al $\triangle ABC$ şi fie A_1, B_1, C_1 proiecţiile punctelor A, B, C pe o dreaptă arbitrară care trece prin G. Demonstraţi că $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$.

171 Fie M, N, P, Q, R, S mijloacele laturilor consecutive ale hexagonului $ABCDEF$. Dacă $RN^2 = MQ^2 + PS^2$, demonstraţi că $MQ \perp PS$.

172 În tetraedrul $ABCD$, medianele din A ale triunghiurilor ABC, ABD şi ACD sunt perpendiculare două câte două. Demonstraţi că $AB = AC = AD$.

173 1) Arătaţi că $M_1(3, 5, 2)$, $M_2(4, 8, 6)$, $M_3(5, 11, 10)$ sunt coliniare şi precizaţi ecuaţia dreptei determinate de ele.

2) Arătaţi că $A(2, -2, 3)$, $B(6, 2, -3)$, $C(3, 1, 4)$, $D(4, 0, 0)$ sunt coplanare şi precizaţi ecuaţia planului determinat de ele.

174 Fie $A(3, 1, 5)$, $B(7, 3, 1)$, $C(5, 5, 3)$.

1) Este $\triangle ABC$ dreptunghic? Dar isoscel?

2) Determinaţi ecuaţia laturii AB şi a medianei AM.

3) Precizaţi aria $\triangle ABC$.

4) Determinaţi $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

175 Fie $A(1, -2, 1)$, $B(2, 1, -1)$, $C(3, 2, 6)$.

1) Determinaţi $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

2) Demonstraţi că A, B, C nu sunt coliniare şi precizaţi aria $\triangle ABC$.

3) Precizaţi un vector perpendicular pe planul (ABC).

4) Verificaţi că $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\|^2 = 2(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2)$.

176 Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub de latură 1. Determinaţi distanţa dintre dreptele AC' şi BD, punând în evidenţă perpendiculara comună.

177 Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin $A(1,2,2)$ şi este paralelă cu planele $(P_1): 2x-y+3z-1=0$ şi $(P_2): 3x+2y-z+4=0$.

178 Se consideră cercurile $(C_1): x^2+y^2+8x-6y+15=0$; $(C_2): x^2+y^2-2x+4y-15=0$; $(C_3): x^2+y^2-10x-4y+25=0$.

1) Determinaţi mulţimea punctelor M din plan cu proprietatea că tangentele duse din M la (C_1) şi la (C_2) sunt congruente.

2) Aflaţi punctul M din care se pot duce tangente congruente la cele trei cercuri.

179 Se consideră hiperbola $(H): \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ şi punctul său $M(5,\frac{8}{3})$. Tangenta în M la hiperbolă taie asimptotele în punctele B, respectiv C. Demonstraţi că M este mijlocul segmentului BC.

180 Fie sfera $(S): x^2+y^2+z^2-6x+4y-10z-62=0$.

1) Precizaţi centrul şi raza sferei S.

2) Arătaţi că $A(-2,4,-3)$ este exterior sferei şi precizaţi ecuaţia sferei (S_1) cu centrul în A tangentă la (S).

3) Precizaţi coordonatele punctului de tangenţă a sferelor (S) şi (S_1).

181 Determinaţi ecuaţiile planelor care conţin dreapta $(d): \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=-z$ şi sunt tangente sferei $(S): x^2+y^2+(z+\frac{1}{2})^2=\frac{49}{108}$.