1 *Fie* $A \in M_{n,m}(\mathbb{R}),\ m < n$. *Să se arate că* $\det(AA^t) = 0$.

Soluţie

Considerăm matricea $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ care se obţine din A prin adăugarea a $n-m$ coloane formate din zerouri. Atunci $AA^t = BB^t$, iar $\det B = \det B^t = 0$, de unde concluzia.

Soluţie alternativă

Se observă că $AA^t \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, iar $\operatorname{rang}(AA^t) \leq \min(\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} A^t) \leq m < n$. De aici, $\det(AA^t) = 0$.

2 *Determinaţi inversa matricei* $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soluţie

Matricea extinsă va fi $\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Prin operaţii elementare cu linii obţinem

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3' = L_3 - L_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3' = L_3 + \frac{1}{8} L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1' = L_1 + \frac{3}{4} L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2' = L_3 - \frac{3}{4} L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 3 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2' = \frac{1}{2} L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3' = -\frac{3}{4} L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Atunci $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

3 *Aflaţi* $a \in \mathbb{R}$ *astfel încât matricea* $A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & a & a-2 \\ 1 & 2a & -1 & a+3 \\ -a+3 & 4a-1 & -a-2 & a+8 \end{pmatrix}$ *să aibă rangul maxim.*

Soluţie

Rangul unei matrice nu se modifică dacă se efectuează operaţii elementare cu linii sau coloane. La linia L_3 adunăm $L_1 + (-2)L_2$; obţinem matricea

$$A' = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & a & a-2 \\ 1 & 2a & -1 & a+3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cu rangA' = rangA. Însă rangul maxim al lui A' este 2 şi deoarece minorul $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 2a & -1 \end{vmatrix} = -2a^2 - 1$ este strict negativ pentru orice $a \in \mathbb{R}$, obţinem că rang$A' = 2$, $(\forall)\, a \in \mathbb{R}$, deci rang $A = 2$, $(\forall)\, a \in \mathbb{R}$.

4 *Fie* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *a.î.* $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$. *Să se rezolve sistemul*:

$$\begin{cases} ax - by - cz - dt = 0 \\ bx + ay - dz + ct = 0 \\ cx + dy + az - bt = 0 \\ dx - cy + bz + at = 0 \end{cases}.$$

Soluţie

Sistemul este omogen şi vom arăta în continuare că are determinantul nenul, deci admite numai soluţia banală.

Notăm $A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$.

Este cunoscut că $\det A = \det A^t \Rightarrow [\det A]^2 = \det A \cdot \det A^t = \det(A \cdot A^t)$. Însă

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{pmatrix},$$

deci $\det(A \cdot A^t) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$, adică $\det A = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2 \neq 0$.

5 *Rezolvaţi sistemul* $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 4 \end{cases}.$

Soluţie

Matricea extinsă a sistemului este $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Prin operaţii elementare cu linii obţinem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3'=L_3-L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3'=L_3+2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sistemul iniţial are deci aceleaşi soluţii cu sistemul $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$, care este simplu nedeterminat, cu soluţia $(4-2t, t, t),\ t \in \mathbb{R}$.

6 *Rezolvaţi sistemul* $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ 3x_1 + 6x_3 - 6x_4 = 6 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}.$

Soluţie

Matricea extinsă a sistemului este $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 6 & -6 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Prin operaţii elementare cu linii obţinem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 6 & -6 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3'=L_3-3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3'=L_3+3L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4'=L_4+L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sistemul iniţial are aceleaşi soluţii cu sistemul $\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=1 \\ x_2-x_3+x_4=-1 \end{cases}$, care este dublu nedeterminat, cu soluţia $(2-2t_1+2t_2, -1+t_1-t_2, t_1, t_2),\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

7 *Să se cerceteze care din următoarele submulţimi ale lui $\mathbb{R}^3$ sunt subspaţii liniare ale acestuia în raport cu operaţiile obişnuite de adunare a vectorilor şi înmulţire a vectorilor cu scalari:*

1) $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;\ x_3 = 0 \right\};$

2) $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;\ x_3 = 1 \right\};$

3) $S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;\ 2x_1+3x_2-4x_3 = 0 \right\};$

4) $S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;\ 2x_1+3x_2-4x_3 = 1 \right\};$

5) $S_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;\ x_1+x_2+x_3^2 = 0 \right\};$

6) $S_6 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;\ x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 0 \right\};$

7) $S_7 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;\ x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 \right\}$.

Soluţie

1) Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in S_1$. Atunci $x_3 = y_3 = 0$, prin urmare

$$\alpha x + \beta y = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \alpha x_3 + \beta y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in S_1,$$

deci S_1 este subspaţiu liniar al lui $\mathbb{R}^3$.

2) Fie $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in S_2$. Atunci $x_3 = y_3 = 1$, adică

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ 2 \end{pmatrix} \notin S_2,$$

deci S_2 nu este subspaţiu liniar al lui $\mathbb{R}^3$.

3) Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in S_3$. Atunci $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0$ şi $2y_1 + 3y_2 - 4y_3 = 0$, iar

$$\alpha x + \beta y = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \alpha x_3 + \beta y_3 \end{pmatrix},$$

cu $2(\alpha x_1 + \beta y_1) + 3(\alpha x_2 + \beta y_2) - 4(\alpha x_3 + \beta y_3) = \alpha(2x_1 + 3x_2 - 4x_3) + \beta(2y_1 + 3y_2 - 4y_3) = = 0$, deci $\alpha x + \beta y \in S_3$, adică S_3 este subspaţiu liniar al lui $\mathbb{R}^3$.

4) Se raţionează ca la punctul 2), obţinându-se că S_4 nu este subspaţiu liniar al lui $\mathbb{R}^3$.

5) Fie $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in S_5$. Atunci $x + y = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \notin S_5$, deci S_5 nu este subspaţiu liniar al lui $\mathbb{R}^3$.

6) Se observă că $S_6 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ este subspaţiu liniar al lui $\mathbb{R}^3$ (subspaţiul nul).

7) Fie $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in S_7$. Atunci $x + y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin S_7$, deci S_7 nu este subspaţiu liniar al lui $\mathbb{R}^3$.

8 *Fie $F_{[a,b]} = \{f;\ f : [a,b] \to \mathbb{R}\}$ mulţimea funcţiilor definite pe intervalul $[a,b]$ cu valori reale. Care din următoarele mulţimi sunt subspaţii liniare ale lui $F_{[a,b]}$, înzestrate cu operaţiile de adunare a funcţiilor şi de înmulţire a acestora cu scalari ?*

1) $A_1 = \big\{f \in F_{[a,b]};\ f$ mărginită pe $[a,b]\big\}$;

2) $A_2 = \big\{f \in F_{[a,b]};\ f(x) \geq 0\ (\forall)\, x \in [a,b]\big\}$;

3) $A_3 = \big\{f \in F_{[a,b]};\ f$ continuă pe $[a,b]\big\}$;

4) $A_4 = \big\{f \in F_{[a,b]};\ f$ integrabilă Riemann pe $[a,b]\big\}$;

5) $A_5 = \big\{f \in F_{[a,b]};\ f(a) = 0\big\}$;

6) $A_6 = \big\{f \in F_{[a,b]};\ f(a) = 1\big\}$;

7) $A_7 = \big\{f \in F_{[a,b]};\ f$ strict monotonă pe $[a,b]\big\}$;

8) $A_8 = \big\{f \in F_{[a,b]};\ f$ monoton crescătoare pe $[a,b]\big\}$;

9) $A_9 = \big\{f \in F_{[a,b]};\ f$ monotonă pe $[a,b]\big\}$;

10) $A_{10} = \big\{f \in F_{[a,b]};\ f$ injectivă$\big\}$;

11) $A_{11} = \big\{f \in F_{[a,b]};\ f$ surjectivă$\big\}$;

12) $A_{12} = \big\{f \in F_{[a,b]};\ f$ bijectivă$\big\}$.

Soluţie

1) Fie $f_1,\ f_2 \in A_1$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Atunci există $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ a.î. $|f_1(x)| \leq M_1$, $|f_2(x)| \leq M_2$, $(\forall)x \in [a,b]$ şi deci $|\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)| \leq |\alpha| M_1 + |\beta| M_2$ $(\forall)x \in [a,b]$. De aici, $\alpha f_1 + \beta f_2$ este mărginită şi prin urmare A_1 este subspaţiu liniar al lui $F_{[a,b]}$.

2) Fie $f \in A_2$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \leq 0$. Atunci $\alpha f(x) \leq 0$, $(\forall)\, x \in [a,b]$, deci $\alpha f \notin A_2$ şi A_2 nu este subspaţiu liniar al lui $F_{[a,b]}$.

3) Fie $f_1, f_2 \in A_3$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Atunci $\alpha f_1 + \beta f_2$ este continuă, deci $\alpha f_1 + \beta f_2 \in A_3$ şi A_3 este subspaţiu liniar al lui $F_{[a,b]}$.

4) Se demonstrează analog, folosindu-se proprietăţile funcţiilor integrabile Riemann, că A_4 este subspaţiu liniar al lui $F_{[a,b]}$.

5) Fie $f_1, f_2 \in A_5$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Atunci $(\alpha f_1 + \beta f_2)(a) = \alpha f_1(a) + \beta f_2(a) = 0$, deci $\alpha f_1 + \beta f_2 \in A_5$ şi A_5 este subspaţiu liniar al lui $F_{[a,b]}$.

6) Fie $f \in A_6$. Atunci $(2f)(a) = 2$, deci $2f \notin A_6$ şi A_6 nu este subspaţiu liniar al lui $F_{[a,b]}$.

7) Fie $f \in A_7$. Atunci $-f \in A_7$ şi $f + (-f) = 0$. Deoarece o funcţie constantă nu este strict monotonă, $f + (-f) \notin A_7$ şi A_7 nu este subspaţiu liniar al lui $F_{[a,b]}$.

8) Fie $f \in A_8$. Atunci $(-1) \cdot f$ este monoton crescătoare, deci $(-1)f \notin A_8$ şi A_8 nu este subspaţiu liniar al lui $F_{[a,b]}$.

9) Fie $f_1, f_2 \in F_{[a,b]}$,

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[a, \dfrac{2a+b}{3}\right] \\ -1, & x \in \left(\dfrac{2a+b}{3}, b\right] \end{cases} \text{ şi } f_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[a, \dfrac{a+2b}{3}\right] \\ 2, & x \in \left(\dfrac{a+2b}{3}, b\right] \end{cases}.$$

Atunci $f_1, f_2 \in A_9$ deoarece f_1 monoton descrescătoare, iar f_2 monoton crescătoare.

Dar $(f_1 + f_2)(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[a, \dfrac{2a+b}{3}\right] \\ -1, & x \in \left(\dfrac{2a+b}{3}, \dfrac{a+2b}{3}\right] \\ 1, & x \in \left(\dfrac{a+2b}{3}, b\right] \end{cases}$, deci $f_1 + f_2$ nu este monotonă, adică $f_1 + f_2 \notin A_9$. Rezultă de aici că A_9 nu este subspaţiu liniar al lui $F_{[a,b]}$.

10) Dacă f este injectivă, atunci şi $-f$ este injectivă. Dar $f + (-f) = 0$ nu este injectivă, deci A_{10} nu este subspaţiu liniar al lui $F_{[a,b]}$.

Analog procedăm pentru a arăta că A_{11} şi A_{12} nu sunt subspaţii liniare ale lui $F_{[a,b]}$.

9 *Fie* $(V, +, \cdot)$ *spaţiu liniar peste corpul* Γ (Γ *putând fi* $\mathbb{R}$ *sau* $\mathbb{C}$). *Dacă* $x_1, x_1, \ldots$ $\ldots, x_n \in V$ *sunt liniar independenţi, să se studieze liniara independenţă a sistemelor de vectori*:

1) $S_1 = \{a_1 = x_1 + x_2,\ a_2 = x_2 + x_3,\ \ldots,\ a_{n-1} = x_{n-1} + x_n,\ a_n = x_n + x_1\}$;

2) $S_2 = \{a_1 = x_1 - x_2,\ a_2 = x_2 - x_3,\ \ldots,\ a_{n-1} = x_{n-1} - x_n,\ a_n = x_n - x_1\}$;

3) $S_3 = \{a_1 = x_1,\ a_2 = x_1 + x_2,\ \ldots,\ a_n = x_1 + \cdots + x_n\}$.

Soluţie

1) Fie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \Gamma$ astfel ca $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = 0$.

Atunci $\alpha_1(x_1+x_2)+\alpha_2(x_2+x_3)+\cdots+\alpha_{n-1}(x_{n-1}+x_n)+\alpha_n(x_n+x_1)=0$, adică $(\alpha_n+\alpha_1)x_1+(\alpha_1+\alpha_2)x_2+\cdots+(\alpha_{n-1}+\alpha_n)x_n=0$. Dar $x_1,x_2,\dots,x_n$ sunt liniar independenţi, deci

$$\begin{cases}\alpha_n+\alpha_1=0\\ \alpha_1+\alpha_2=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_{n-1}+\alpha_n=0\end{cases}.$$

Sistemul liniar de mai sus are determinantul $D=1+(-1)^{n+1}$. Dacă n impar, $D\neq 0$, deci sistemul are soluţia unică $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$ şi $a_1,a_2,\dots,a_n$ liniar independenţi.

Dacă n par, $D=0$, deci sistemul are şi soluţii nebanale şi deci $a_1,a_2,\dots,a_n$ liniar dependenţi.

2) Se raţionează analog, obţinându-se că S_2 liniar dependent.

3) Se raţionează analog, obţinându-se că S_3 liniar independent.

Soluţie alternativă

Fie $X=\text{span}\{x_1,x_2,\dots,x_n\}=\{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n,\ \alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in\Gamma\}$ subspaţiul liniar generat de sistemul de vectori $S=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$, care este o bază în acest subspaţiu. În raport cu această bază, matricele de componente ale sistemelor de vectori S_1, S_2, S_3 sunt respectiv

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0&1\\1&1&\dots&0&0\\0&1&\dots&0&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&1&0\\0&0&\dots&1&1\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0&-1\\-1&1&\dots&0&0\\0&-1&\dots&0&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&1&0\\0&0&\dots&-1&1\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}1&1&\dots&1&1\\0&1&\dots&1&1\\0&0&\dots&1&1\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&1&1\\0&0&\dots&0&1\end{pmatrix}.$$

Se observă că $\det A_1=1$, printr-o relaţie de recurenţă dedusă prin dezvoltare după ultima coloană, iar $\det A_3=1$ deoarece A_3 este matrice diagonală. Prin adunarea tuturor coloanelor la ultima, $\det A_2=0$. De aici, S_1 şi S_3 sunt liniar independente, iar S_2 este liniar dependent, deoarece $\text{rang}\,A_1=\text{rang}\,A_3=n$, iar $\text{rang}\,A_2<n$, n reprezentând aici numărul de vectori din fiecare sistem.

10 *Să se studieze liniara independenţă a sistemelor de vectori*:

1) $S_1=\{v_1=X^2-X+1,\ v_2=X^2+7X-1,\ v_3=6X+5\}$ *în* $\mathbb{R}_2[X]$;

2) $S_2=\{v_1=X^3+X^2-1,\ v_2=X^2+X+1,\ v_3=X^3-X^2-2X-3\}$ *în* $\mathbb{R}_3[X]$;

3) $S_3 = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ *în* $M_{2,2}(\mathbb{R})$;

4) $S_4 = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ *în* $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

Soluţie

1) $\mathbb{R}_2[X]$ este mulţimea polinoamelor din $\mathbb{R}[X]$ de grad cel mult 2, care este spaţiu liniar în raport cu adunarea polinoamelor şi înmulţirea acestora cu scalari reali. Baza canonică în $\mathbb{R}_2[X]$ este $B = \{1, X, X^2\}$. Matricea componentelor lui S_1, în raport cu această bază este

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deoarece $\det A_1 \neq 0$, $\mathrm{rang} A_1 = 3$ şi S_1 este liniar independent.

2) Matricea componentelor lui S_2 în raport cu baza canonică din $\mathbb{R}_3[X]$ este

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se observă că $\mathrm{rang} A_2 = 2$, şi atunci S_2 este liniar dependent.

3) Baza canonică în $M_{3,3}(\mathbb{R})$ este

$$B = \left\{ E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Matricea componentelor lui S_3 în raport cu această bază este

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deoarece $\mathrm{rang} A = 3$, S_3 este liniar independent.

4) Matricea componentelor lui S_4 în raport cu baza canonică din $M_{2,2}(\mathbb{R})$ este

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deoarece $\det A_4 \neq 0$, $\text{rang} A_4 = 4$ şi S_4 este liniar independent.

11 *Să se determine o bază a spaţiului liniar generat de următoarele mulţimi de vectori din* $\mathbb{R}^4$:

$$1)\ S_1 = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\};$$

$$2)\ S_2 = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\};$$

$$3)\ S_3 = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Soluţie

În raport cu baza canonică în $\mathbb{R}^4$, sistemele de vectori S_1, S_2, S_3 au respectiv matricele de componente

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -3 & 7 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Atunci $\text{rang} A_1 = 3$, un minor principal fiind $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. Spaţiul liniar generat de S_1 are dimensiunea 3, o bază în acest spaţiu fiind $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$. De asemenea, $\text{rang} A_2 = 2$, cu minorul principal $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$, iar $\text{rang} A_3 = 3$, cu minorul principal $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \end{vmatrix}$. O bază în spaţiul liniar generat de S_2 este $B_2 = \{v_1, v_2\}$, iar o bază în spaţiul liniar generat de S_3 este $B_3 = \{v_1, v_2, v_3\}$.

12 *Să se demonstreze printr-un raţionament imediat că următoarele sisteme de vectori nu sunt baze în spaţiile liniare menţionate:*

1) $S_1 = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ *în* $\mathbb{R}^3$;

2) $S_2 = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ *în* $\mathbb{R}^3$;

3) $S_3 = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ *în* $M_{2,2}(\mathbb{R})$;

4) $S_4 = \{v_1 = 1 + X,\ v_2 = 1 + X^2\}$ *în* $\mathbb{R}_2[X]$.

Soluţie

Este cunoscut că $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, $\dim M_{2,2}(\mathbb{R}) = 4$, $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$. Sistemele respective de vectori nu sunt baze în spaţiile liniare menţionate întrucât nu conţin un număr de vectori egal cu dimensiunea acelor spaţii.

13 *Fie* $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ *astfel ca* $\operatorname{grad} P_i = i$ $(\forall)$ $i = \overline{0,n}$. *Demonstraţi că* $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ *este o bază în* $\mathbb{R}_n[X]$.

Soluţie

Presupunem că $(\exists)$ $(\lambda_i)_{i=\overline{0,n}}$ astfel ca $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = 0$, şi fie $\tilde{P}_0, \tilde{P}_1, \ldots \tilde{P}_n$ funcţiile polinomiale asociate polinoamelor $P_0, P_1, \ldots, P_n$. Atunci $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i \tilde{P}_i(x) = 0$ $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$.

Derivând de n ori relaţia de mai sus obţinem că $\lambda_n \cdot n! \cdot a_{n,n} = 0$, unde $a_{n,n}$ este coeficientul termenului dominant al lui P_n, deci $\lambda_n = 0$ şi atunci $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \lambda_i \cdot \tilde{P}_i(x) = 0$.

Continuând asemănător obţinem $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, deci $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ este liniar independent în $\mathbb{R}_n[X]$. Cum acest sistem conţine un număr de elemente egal cu dimensiunea lui $\mathbb{R}_n[X]$, el este bază în acest spaţiu.

14 *Să se arate că următoarele sisteme de vectori sunt baze în* $\mathbb{R}_n[X]$*:*

1) $B_1 = \{1, 1 + x, 1 + x^2, \ldots, 1 + x^n\}$

2) $B_2 = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2, \ldots, 1 + x + ... + x^n\}$.

Soluţie

1) Matricea componentelor lui B_1 în raport cu baza canonică este

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_{n+1,n+1}(\mathbb{R}).$$

Deoarece A_1 este matrice triunghiulară, determinantul său este produsul elementelor de pe diagonala principală, deci $\det A_1 \neq 0$. De aici rezultă că B_1 este bază în $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Rezultă analog, ţinând seama că matricea componentelor lui B_2 în raport cu baza canonică este

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

15 *Fie* $S_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R});\ A^t = A\}$ *şi* $A_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R});\ A^t = -A\}$ *mulţimea matricelor de tip* (n, n) *simetrice* (*respectiv antisimetrice*) *cu elementele numere reale. Să se arate că*:

1) $S_n(\mathbb{R})$ *şi* $A_n(\mathbb{R})$ *sunt subspaţii liniare reale ale lui* $M_{n,n}(\mathbb{R})$;

2) $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{O_n\}$;

3) *Orice matrice din* $M_{n,n}(\mathbb{R})$ *poate fi scrisă în mod unic sub forma* $B = A_1 + A_2$, *cu* $A_1 \in S_n(\mathbb{R})$ *şi* $A_2 \in A_n(\mathbb{R})$;

4) $S_n(\mathbb{R})$ *are dimensiunea* $\dfrac{n(n+1)}{2}$ *peste* $\mathbb{R}$;

5) $A_n(\mathbb{R})$ *are dimensiunea* $\dfrac{n(n-1)}{2}$ *peste* $\mathbb{R}$.

Soluţie

1) Fie $A_1, A_2 \in S_n(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Atunci $(\alpha A_1 + \beta A_2)^t = \alpha A_1^t + \beta A_2^t = \alpha A_1 + \beta A_2$, deci $\alpha A_1 + \beta A_2 \in S_n(\mathbb{R})$, şi $S_n(\mathbb{R})$ este subspaţiu liniar al lui $M_{n,n}(\mathbb{R})$. În mod analog se demonstrează că şi $A_n(\mathbb{R})$ este subspaţiu liniar.

2) Fie $A \in S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R})$. Deoarece $A \in S_n(\mathbb{R})$, $A^t = A$, iar deoarece $A \in A_n(\mathbb{R})$, $A^t = -A$. Combinând aceste relaţii rezultă că $A = O_n$. Este evident că $O_n \in \in S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R})$.

3) Fie $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Notăm $B = \dfrac{A + A^t}{2}$, $C = \dfrac{A - A^t}{2}\cdot$ Atunci

$$B^t = \left(\frac{A + A^t}{2}\right)^t = \frac{A^t + (A^t)^t}{2} = \frac{A^t + A}{2} = B,$$

deci $B \in S_n(\mathbb{R})$, iar

$$C^t = \left(\frac{A - A^t}{2}\right)^t = \frac{A^t - (A^t)^t}{2} = \frac{A^t - A}{2} = -C,$$

deci $C \in A_n(\mathbb{R})$. Se observă imediat că $A = B + C$.

Reciproc, fie $A = B + C$, cu $B \in S_n(\mathbb{R})$ şi $C \in A_n(\mathbb{R})$. Atunci $A^t = B^t + C^t = B - C$. Rezolvând sistemul matriceal cu necunoscutele B şi C astfel obţinut, găsim $B = \dfrac{A + A^t}{2}$, $C = \dfrac{A - A^t}{2}$, deci scrierea sub forma $A = B + C$, $B \in S_n(\mathbb{R})$, $C \in A_n(\mathbb{R})$ este unică.

4) Orice matrice simetrică este determinată unic de elementele de pe diagonala principală şi de deasupra diagonalei principale, care funcţionează ca parametri independenţi. Se obţine că $\dim S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}\cdot$

5) Analog, orice matrice antisimetrică are elementele de pe diagonala principală egale cu 0 şi este unic determinată de elementele de deasupra diagonalei principale. Se obţine că $\dim A = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

16 *Fie V_1, V_2 subspaţii liniare ale unui spaţiu liniar V cu* $\dim V_1 = \dim V_2 = 6$ *şi* $\dim V = 10$. *Care este cea mai mică valoare posibilă a lui* $\dim(V_1 \cap V_2)$ *?*

Soluţie

Deoarece $V_1 + V_2$ subspaţiu liniar al lui V, $\dim(V_1 + V_2) \leq \dim V = 10$. Dar $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$, deci

$$\dim(V_1 \cap V_2) = 12 - \dim(V_1 + V_2) \geq 2.$$

Cea mai mică valoare posibilă este 2.

17 *Să se determine o bază în subspaţiul lui $\mathbb{R}^4$ definit de soluţiile sistemului liniar omogen*

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

şi să se completeze la o bază în $\mathbb{R}^4$.

Soluţie

Sistemul dat este echivalent cu sistemul $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$, cu soluţiile $x_1 = -t_1$, $x_2 = t_1$, $x_3 = -t_2$, $x_4 = t_2$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

Spaţiul de soluţii este deci $V = \left\{ \begin{pmatrix} -t_1 \\ t_1 \\ -t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} ;\ t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$, iar o bază în acest spaţiu este $B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Matricea componentelor lui B în raport cu baza canonică este $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Matricea sistemului completat va trebui să aibă rangul 4. O soluţie posibilă este

$$B_{\text{completată}} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

18 *Fie* $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. *Să se arate că* B' *este bază în* $\mathbb{R}^n$ *şi să se calculeze coordonatele unui vector* $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ *în această bază.*

Soluţie

Matricea componentelor vectorilor din B' în raport cu baza canonică este

$$A = S_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

cu $\det A = 1 \neq 0$. Atunci $\operatorname{rang} A = n$ şi B' este liniar independent. Conţinând un număr de vectori egal cu dimensiunea spaţiului $\mathbb{R}^n$, B' este bază în $\mathbb{R}^n$.

Fie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ coordonatele vectorului v în această bază. Atunci este satisfăcută egalitatea

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

şi deci

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = v_1 \\ \qquad\ \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = v_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\quad \alpha_n = v_n \end{cases}.$$

Acest sistem liniar are soluţia unică

$$\alpha_1 = v_1 - v_2,\ \alpha_2 = v_2 - v_3, \ldots\ , \alpha_{n-1} = v_{n-1} - v_n,\ \alpha_n = v_n.$$

Soluţie alternativă

Vectorul $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ al coordonatelor lui v în noua bază va fi

$$\alpha = S_{B,B'}^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

19 *Să se arate că sistemul*

$$B' = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

este o bază în $M_{2,2}(\mathbb{R})$ şi să se exprime coordonatele matricei $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ în raport cu această bază.

Soluţie

Matricea componentelor vectorilor din B' în raport cu baza canonică din $M_{2,2}(\mathbb{R})$ este

$$A = S_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

cu $\det A = 1 \neq 0$, deci $\operatorname{rang} A = 4$, adică B' este bază în $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

Fie α_1, α_2, α_3, α_4 coordonatele matricei M în raport cu baza B'. Atunci este satisfăcută egalitatea

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

deci

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_4 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 4 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 3 \end{cases}.$$

Sistemul de mai sus are soluţia unică

$$\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 4,\ \alpha_4 = -1.$$

Soluţie alternativă

Deoarece vectorul coordonatelor matricei A în baza canonică este $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, vectorul coordonatelor în baza B' este $w = A^{-1}v$.

20 *Fie sistemele de vectori*

$$B_1 = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \right\};$$

$$B_2 = \left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

1) *Să se demonstreze că* B_1 *şi* B_2 *sunt baze în* $\mathbb{R}^3$.

2) *Să se determine matricea de trecere de la baza* B_1 *la baza* B_2.

Soluţie

1) Matricea componentelor lui B_1 în raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$ este $A_1 = S_{B,B_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 9 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, iar matricea componentelor lui B_2 în raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$ este $A_2 = S_{B,B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Deoarece $\det A_1 \neq 0$, $\det A_2 \neq 0$, atunci $\text{rang}A_1 = 3$, $\text{rang}A_2 = 3$, deci B_1, B_2 sunt baze în $\mathbb{R}^3$.

2) Vom face trecerea de la B_1 la B_2 prin intermediul bazei canonice. Matricea de trecere de la B_1 la baza canonică este A_1^{-1}, iar matricea de trecere de la baza canonică la B_2 este A_2. Se obţine că matricea de trecere de la B_1 la B_2 este $A_2A_1^{-1}$.

21 *Determinaţi o bază* $B = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ *în* $\mathbb{R}^3$ *în raport cu care vectorul* $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *să aibă respectiv coordonatele* $0, 1, 2$.

Soluţie

Dacă A este matricea componentelor lui B în raport cu baza canonică, atunci trebuie să aibă loc egalitatea $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, deci $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Evident, această ecuaţie matriceală nu are soluţie unică. O soluţie posibilă este $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ (găsirea soluţiei revine la rezolvarea unui sistem nedeterminat). De aici, o bază cu proprietatea căutată este

$$B = \left\{ e'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ e'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

22 *Determinaţi o bază în* $\mathbb{R}^3$ *în raport cu care vectorii* $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *să aibă respectiv coordonatele* $1, 0, 1;\ 1, 1, 0;\ 0, 1, 1$.

Soluţie

Au loc egalităţile

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(unde A este matricea componentelor bazei B în raport cu baza canonică), care se pot rescrie sub forma $A^{-1}M = C$, unde $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, iar $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Atunci $A = MC^{-1}$, de unde se obţine imediat baza căutată.

23 *Să se arate că mulţimea*

$$X = \left\{ A \in M_{3,3}(\mathbb{R});\ A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a-b & c \\ b & c & a \end{pmatrix},\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

este subspaţiu liniar al lui $M_{3,3}(\mathbb{R})$. *Să se precizeze dimensiunea sa peste* $\mathbb{R}$ *şi o bază în* X. *Să se arate că* X *este izomorf ca spaţiu liniar cu* $\mathbb{R}^3$ *şi să se precizeze izomorfismul.*

Soluţie

Notăm o matrice de forma $\begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a-b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$ cu $A_{a,b,c}$. Dacă $a, b, c, a_1, b_1, c_1, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha A_{a,b,c} + \beta A_{a_1,b_1,c_1} = A_{\alpha a+\beta a_1, \alpha b+\beta b_1, \alpha c+\beta c_1} \in X$, deci X este subspaţiu liniar al lui $M_{3,3}(\mathbb{R})$. Dimensiunea sa peste $\mathbb{R}$ este 3, o bază în X fiind

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(deoarece A depinde în mod esenţial de parametrii a, b, c, o bază se poate obţine dând pe rând câte unui parametru valoarea 1 şi celorlalţi parametri valoarea 0). Izomorfismul căutat asociază fiecărei matrici vectorul ordonat al parametrilor de care depinde, adică

$$T\left(\begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a-b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

24 *Să se arate că aplicaţia* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *definită prin*

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (\forall)\, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

unde $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, *este izomorfism de spaţii liniare peste* Γ (Γ *putând fi* $\mathbb{R}$ *sau* $\mathbb{C}$) *dacă şi numai dacă* $\det A \neq 0$.

Soluţie

$'' \Rightarrow''$ T izomorfism, deci T bijectiv, adică $(\forall)\, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ există $x = $

$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ astfel ca $y = Tx$ şi acest x este unic.

În concluzie, sistemul liniar $Ax = y$ are soluţie unică $(\forall)\, y \in \Gamma^n$, deci $\det A \neq 0$.

$$'' \Leftarrow'' \qquad T\left[\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right] = A\cdot\left[\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \alpha A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \beta A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \alpha T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \beta T\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

deci T este un operator liniar. Mai rămâne deci să demonstrăm că T este bijectiv, adică $(\forall)\, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ există $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ astfel ca $Tx = y$ şi acesta este unic. Într-adevăr, $\det A \neq 0$, deci există A^{-1} şi $(\forall) y \in \mathbb{R}^n$, $x = A^{-1}y$, deci T este bijectiv. În concluzie, T este izomorfism.

25 *Să se determine care din următoarele aplicaţii sunt izomorfisme de spaţii liniare*:

1) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n;$

2) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix};$

3) $T : M_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ T(A) = \mathrm{Tr}A;$

4) $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n,\ T\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix};$

5) $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n+1},\ T\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ 0 \end{pmatrix};$

6) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{n-1}[X],\ T\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n X^{n-1};$

7) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{pmatrix};$

8) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + a \\ x_2 + a \\ x_3 + a \\ x_4 + a \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R};$

9) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \\ x_4^2 \end{pmatrix}.$

Soluţie

1) Se observă că $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^n = n$, $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R} = 1$, deci T nu poate fi izomorfism de spaţii liniare deoarece spaţiul de plecare şi spaţiul de sosire au dimensiuni diferite.

2) $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, cu $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Cum $\det A = \pm 1 \neq 0$, T este izomorfism de spaţii liniare, conform rezultatului problemei anterioare.

3) Se observă că $\dim_{\mathbb{R}} M_{n,n}(\mathbb{R}) = n^2$, $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R} = 1$, deci T nu este izomorfism liniar.

4) T se poate scrie sub forma $Tx = Ax$, cu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Deoarece $\det A = 0$, T nu este izomorfism liniar.

5) Se observă că $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^{n+1} = n + 1$, deci T nu este izomorfism liniar.

6) Fie $v_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\begin{aligned} T(\alpha v_1 + \beta v_2) &= T\left(\begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta b_1 \\ \beta b_2 \\ \vdots \\ \beta b_n \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta b_1 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n + \beta b_n \end{pmatrix}\right) = \\ &= \alpha a_1 + \beta b_1 + (\alpha a_2 + \beta b_2)X + \cdots + (\alpha a_1 + \beta b_1)X^{n-1} = \\ &= \alpha\left(a_1 + a_2 X + \cdots + a_1 X^{n-1}\right) + \beta\left(b_1 + b_2 X + \cdots + b_n X^{n-1}\right) = \\ &= \alpha T v_1 + \beta T v_2, \end{aligned}$$

deci T este operator liniar. Bijectivitatea lui T este imediată. Rezultă de aici că T este izomorfism de spaţii liniare.

7) T se poate scrie sub forma $Tx = Ax$, cu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Deoarece $\det A = 1 \neq 0$, T este izomorfism de spaţii liniare.

8) Fie $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$. Atunci

$$T(x+y) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + a \\ x_2 + y_2 + a \\ x_3 + y_3 + a \\ x_4 + y_4 + a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + a \\ x_2 + a \\ x_3 + a \\ x_4 + a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + a \\ y_2 + a \\ y_3 + a \\ y_4 + a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{pmatrix},$$

deci $T(x+y) = Tx + Ty - \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{pmatrix}$. Rezultă de aici că dacă $a \neq 0$, atunci T nu este izomorfism de spaţii liniare. Dacă $a = 0$ atunci $T = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^4}$, deci T izomorfism.

9) Se observă că $T\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, iar $T\left(3\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}6\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}36\\0\\0\\0\end{pmatrix}\neq$ $\neq 3T\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, deci T nu este izomorfism de spaţii liniare, nefiind liniar.

26 *Să se determine valorile lui $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care aplicaţia $(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin*

$$\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=x_1y_1+ax_1y_2+bx_2y_1+x_2y_2,\ (\forall)\ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

este un produs scalar pe $\mathbb{R}^2$.

Soluţie

Se observă că $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=a$ şi $\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=b$.

Dar $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$, deci $a=b$. În plus,

$$\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)=x_1^2+2ax_1x_2+x_2^2=(x_1+ax_2)^2+(1-a^2)x_2^2,$$

Rezultă deci $\left(\begin{pmatrix}ax_2\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}ax_2\\x_2\end{pmatrix}\right)=(1-a^2)x_2^2\ (\forall)\ x_2\in\mathbb{R}$ şi, conform axiomei de pozitivitate a produsului scalar, $a\in(-1,1)$. Pentru $a=b\in(-1,1)$ se verifică uşor că $(\cdot,\cdot)$ este un produs scalar.

27 *Să se demonstreze că aplicaţiile $(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definite prin:*

1) $\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=4x_1y_1-x_2y_1+5x_2y_2;$

2) $\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=4x_1y_1-x_2y_1-x_1y_2+5x_2y_2+1;$

3) $\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=x_1y_1-4x_1y_2+x_2y_2$

pentru $(\forall)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$, *nu sunt produse scalare pe* $\mathbb{R}^2$.

Soluţie

1) Se observă că $\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=4x_1y_1-x_2y_1+5x_2y_2$; $\left(\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)=$ $=4y_1x_1-y_2x_1+5y_2x_2$.

Nu este îndeplinită axioma de simetrie pentru $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

2) Fie $a\in\mathbb{R}$. Avem atunci

$\left(a\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=4ax_1y_1-4ax_2y_1-4ax_1y_2+5ax_2y_2+1$;

$a\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=4ax_1y_1-4ax_2y_1-4ax_1y_2+5ax_2y_2+a$.

Nu este îndeplinită axioma de omogenitate pentru $a\neq 1$.

3) $\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=x_1^2-4x_1x_2+x_2^2=(x_1-2x_2)^2-3x_2^2$.

Nu este îndeplinită axioma de pozitivitate pentru $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

28 *Fie* $(X,(\cdot,\cdot))$ *spaţiu euclidian peste corpul* Γ, $\Gamma=\mathbb{R}$ *sau* $\mathbb{C}$. *Să se demonstreze că*

$$(x+y,x+y)^{1/2}\leq(x,x)^{1/2}+(y,y)^{1/2}\ (\forall)\,x,y\in X$$

(inegalitatea Minkowski).

Soluţie

Să observăm că $(x+y,x+y)=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)=(x,x)+2\Re e(x,y)+$ $+(y,y)\leq(x,x)+2|(x,y)|+(y,y)$, $(\forall)\,x,y\in X$. Aplicând inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwartz rezultă că $(x+y,x+y)\leq(x,x)+2(x,x)^{1/2}(y,y)^{1/2}+(y,y)=$ $=[(x,x)^{1/2}+(y,y)^{1/2}]^2$, de unde obţinem inegalitatea cerută.

29 *Fie* $x_1,x_2,\ldots,x_n$ *şi* $y_1,y_2,\ldots,y_n\in\mathbb{R}$. *Să se demonstreze că*

1) $\left(\sum\limits_{i=1}^n x_iy_i\right)^2\leq\left(\sum\limits_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^n y_i^2\right)$; 2) $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n(x_i+y_i)^2}\leq\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}+\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n y_i^2}$.

Soluţie

Este cunoscut că $\mathbb{R}^n$ este spaţiu euclidian real în raport cu produsul scalar $(\cdot,\cdot):\mathbb{R}^n\times$

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definit prin

$$\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i,$$

numit **produsul scalar uzual** pe $\mathbb{R}^n$. Inegalităţile 1) şi 2) sunt atunci consecinţe directe ale inegalităţilor Cauchy-Buniakowski-Schwartz, respectiv Minkowski.

30 *Fie* $(X, (\cdot, \cdot))$ *un spaţiu euclidian real şi* $x, y \in X$*. Să se demonstreze că următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

$$1)\ (x, y) = 0; \quad 2)\ \|x + y\| = \|x - y\|; \quad 3)\ \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Soluţie

1) $\Leftrightarrow$ 2) Utilizând proprietăţile produsului scalar se obţine că $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 =$ $= (x + y, x + y) - (x - y, x - y) = 4(x, y)$, şi deci $\|x + y\| = \|x - y\| \Leftrightarrow (x, y) = 0$.
1) $\Leftrightarrow$ 3) $\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = (x + y, x + y) - (x, x) - (y, y) = 2(x, y)$, şi deci $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow (x, y) = 0$. Afirmaţiile 1) şi 3) sunt deci echivalente.

În concluzie, afirmaţiile 1), 2) şi 3) sunt echivalente, ceea ce trebuia demonstrat.

31 *Determinati o bază ortonormală în raport cu produsul scalar uzual în* $\mathbb{R}^4$ *în spaţiul liniar al soluţiilor sistemului*

$$\begin{cases} x - 2y + z + t = 0 \\ 2x + y - 2z - t = 0 \end{cases}.$$

Soluţie

Rezolvând sistemul obţinem că $x = \dfrac{3}{5}z + \dfrac{1}{5}t$, $y = \dfrac{4}{5}z + \dfrac{3}{5}t$. O bază în spaţiul soluţiilor sistemului este deci $B = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{x_1, x_2\}$ (vectorii din această bază se obţin pentru $(z, t) = (1, 0)$, respectiv $(z, t) = (0, 1)$). Ortogonalizăm această bază prin procedeul

Gram-Schmidt. Atunci

$$f_1 = x_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \|f_1\| = \sqrt{2}; \quad f_2 = x_2 - \frac{(x_2, f_1)}{\|f_1\|^2} f_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{50} \\ \frac{9}{25} \\ \frac{3}{10} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

O bază ortonormală în spaţiul sistemului considerat este deci $B_0 = \left\{ \frac{f_1}{\|f_1\|}, \frac{f_2}{\|f_2\|} \right\}$.

32 *Determinaţi valorile proprii şi subspaţiile proprii corespunzătoare pentru următoarele matrice*

$$1) \quad A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad 2) \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad 3) \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sunt aceste matrice diagonalizabile ?

Soluţie

1) Polinomul caracteristic al lui A_1 este

$$P(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A_1) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3).$$

Valorile proprii ale lui A_1 sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Rezolvând ecuaţia

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

obţinem că

$$S(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ -2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}; \ \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

În mod analog demonstrăm că $S(3) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}; \ \alpha \in \mathbb{R} \right\}$.

2) Polinomul caracteristic al lui A_2 este

$$P(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A_2) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 6).$$

Valorile proprii ale lui A_2 sunt $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$. Rezolvând ecuaţia

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

obţinem că

$$S(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix} ;\ \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

şi analog $S(3) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} ;\ \alpha \in \mathbb{R} \right\}$; $S(6) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ -2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} ;\ \alpha \in \mathbb{R} \right\}$.

3) Polinomul caracteristic al lui A_3 este

$$P(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A_3) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2).$$

Valorile proprii ale lui A_3 sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$, iar subspaţiile proprii corespunzătoare sunt

$$S(1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\alpha - \beta \end{pmatrix} ,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\},$$

respectiv

$$S(-2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} ,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ nu este diagonalizabilă, deoarece $\dim S(2) = 1 \neq n(2)$.

$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ este diagonalizabilă, valorile proprii ale sale fiind simple. Se obţine că $A_2 = SDS^{-1}$, cu $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ este diagonalizabilă, deoarece $\dim S(1) = 2 = n(1)$ şi $\dim S(-2) = 1 = n(-2)$. Se obţine că $A = SDS^{-1}$, cu $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

33 *Fie* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$. *Să se demonstreze că există* $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ *ale cărei valori proprii sunt* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Soluţie

Fie

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Atunci

$$\det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - \lambda_1 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & \lambda - \lambda_2 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - \lambda_n \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_n),$$

şi deci polinomul caracteristic $P(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ are rădăcinile $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

34 *Fie* $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$. *Demonstraţi că* A *şi* A^t *au acelaşi polinom caracteristic (deci şi aceleaşi valori proprii).*

Soluţie

$\det(\lambda I_n - A) = \det(\lambda I_n - A)^t = \det((\lambda I_n)^t - A^t) = \det(\lambda I_n - A^t)$, deci A şi A^t au acelaşi polinom caracteristic.

35 *Fie* $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$, *iar* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ *valorile sale proprii. Să se arate că*

1) $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \mathrm{Tr} A$; 2) $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = \det A$.

Soluţie

Fie $P(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$. Observăm că, dezvoltând determinantul, termeni ce conţin λ^{n-1} pot apare doar din dezvoltarea produsului $(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})\dots(\lambda - a_{nn})$, celelalte produse conţinând expresii având gradul cel mult $n-2$ în λ. Evident, termenul liber este $P(0) = \det(-A)$ şi deci

$$P(\lambda) = \lambda^n - (a_{11} + a_{12} + \dots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \dots + \det(-A).$$

Atunci, conform relaţiilor lui Viéte,

$$\begin{aligned} &\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}; \\ &\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n = (-1)^n \det(-A) = \det A. \end{aligned}$$

36 *Determinaţi* $P(A) = A^4 - 8A^3 + 13A^2 - 6A$, *unde* A *este matricea*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Soluţie

Polinomul caracteristic al lui A este $P(\lambda) = \det(\lambda I_4 - A) = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 13\lambda^2 - 6\lambda$. Conform teoremei Cayley-Hamilton, $P(A) = 0$.

37 *Cercetaţi dacă matricea* $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{pmatrix}$ *este diagonalizabilă şi, în caz afirmativ, determinaţi forma sa diagonală. Calculaţi* A^n, $n \in \mathbb{N}^*$ *şi* A^{-1}.

Soluţie

Calculăm polinomul caracteristic $P(\lambda)$ al matricei A

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -8 & -16 \\ -4 & \lambda - 1 & -8 \\ 4 & 4 & \lambda + 11 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda - 9 = \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + 3)^2. \end{aligned}$$

Rezolvând ecuaţia

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

obţinem că $S(1) = \left\{ \begin{pmatrix} -2\alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \right\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Rezolvând ecuaţia

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

obţinem că $S(-3) = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha - 2\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Deoarece $\dim S(1) = n(1) = 1$, $\dim S(-3) = n(-3) = 2$, matricea A este diagonalizabilă. Forma sa diagonală este $A = SDS^{-1}$, cu $S = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Atunci $A^n = S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} S^{-1}$, iar $A^{-1} = S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} S^{-1}$.

38 *Arătaţi că matricea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *nu este diagonalizabilă.*

Soluţie

Calculăm polinomul caracteristic al matricei A

$$P(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -1 \\ -2 & \lambda & \lambda + 2 \\ 1 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = \lambda(\lambda - 2)^2.$$

De aici, valorile proprii ale matricei A sunt $\lambda_1 = 0$ şi $\lambda_2 = 2$, cu multiplicităţi algebrice

$n(0) = 1$, respectiv $n(2) = 2$. Rezolvând ecuaţia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

obţinem că $x_1 = t$, $x_2 = 0$, $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$. Multiplicitatea geometrică a valorii proprii $\lambda_2 = 2$ este $\dim S(2) = 1$, strict mai mică decât multiplicitatea algebrică $n(2) = 2$, deci A nu este diagonalizabilă.

39 *Determinaţi* $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ *care are valorile proprii* $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 1$, *cu vectorii proprii respectiv* $x_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soluţie

Scrierea matricei A sub formă diagonală este $A = SDS^{-1}$, cu $S = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se obţine că $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -18 \\ 1 & 0 & 9 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

40 *Să se determine care din următoarele aplicaţii sunt operatori liniari*:

1) $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + a \\ x_2 + a \\ x_3 + a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}^*$;

2) $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ ax_3 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$;

3) $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3^2 \end{pmatrix}$;

4) $T_4 : M_{n,n}(\mathbb{R}) \to M_{n,n}(\mathbb{R})$, $T_4 X = CX$, *unde* $C \in M_{n,n}(\mathbb{R})$;

5) $T_5 : C([a,b]) \to \mathbb{R}$, $T_5 f = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$;

6) $T_6 : C^1([a,b]) \to C([a,b])$, $T_6 f = f'$.

Soluţie

1) Fie $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Atunci

$$T_1(\alpha x + \beta y) = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 + a \\ \alpha x_2 + \beta y_2 + a \\ \alpha x_3 + \beta y_3 + a \end{pmatrix} = \alpha T_1 x + \beta T_1 y + \begin{pmatrix} a(1-\alpha-\beta) \\ a(1-\alpha-\beta) \\ a(1-\alpha-\beta) \end{pmatrix}.$$

Cum $a \in \mathbb{R}^*$, se obţine că $T_1(\alpha x + \beta y) \neq \alpha T_1 x + \beta T_1 y$ pentru $\alpha + \beta \neq 1$, deci T_1 nu este operator liniar.

2) Fie $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Atunci:

$$T_2(\alpha x + \beta y) = \begin{pmatrix} a(\alpha x_1 + \beta y_1) \\ a(\alpha x_2 + \beta y_2) \\ a(\alpha x_3 + \beta y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha x_1 \\ a\alpha x_2 \\ a\alpha x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a\beta y_1 \\ a\beta y_2 \\ a\beta y_3 \end{pmatrix} = \alpha T_2 x + \beta T_2 y,$$

deci T_2 este operator liniar.

3) Fie $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Atunci:

$$\begin{aligned} T_3(\alpha x + \beta y) &= \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ (\alpha x_3 + \beta y_3)^2 \end{pmatrix} = \\ &= \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3^2(\alpha^2 - \alpha) + y_3^2(\beta^2 - \beta) + 2\alpha\beta x_3 y_3 \end{pmatrix} = \\ &= \alpha T_3 x + \beta T_3 y + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3^2(\alpha^2 - \alpha) + y_3^2(\beta^2 - \beta) + 2\alpha\beta x_3 y_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pentru $\alpha = \beta = 2$ şi $x_3 = y_3 = 1$, $T_3(\alpha x + \beta y) \neq \alpha T_3 x + \beta T_3 y$, deci T_3 nu este operator liniar.

4) Fie $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Atunci $T_4(\alpha A + \beta B) = C(\alpha A + \beta B) = \alpha CA + \beta CB = \alpha T_4 A + \beta T_4 B$, deci T_4 este operator liniar.

Folosind proprietăţile integralei Riemann, respectiv ale operaţiei de derivare, deducem că T_5 şi T_6 sunt operatori liniari.

41 *Fie* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *un operator liniar cu proprietatea că* $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, *iar* $T\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Calculaţi* $T\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Soluţie

Exprimăm mai întâi vectorul $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ cu ajutorul vectorilor $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ şi $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Fie $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$, cu $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Atunci $\alpha_1 - \alpha_2 = -1$ şi $2\alpha_1 - \alpha_2 = 1$, de unde $\alpha_1 = 2$ şi $\alpha_2 = 3$ şi $v = 2v_1 + 3v_2$. De aici,

$$Tv = T(2v_1 + 3v_2) = 2Tv_1 + 3Tv_2 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

42 *Fie* V *un spaţiu liniar tridimensional şi* $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ *o bază în* V. *Determinaţi operatorul liniar* $T : V \to V$ *cu proprietatea că* $Te_1 = 2e_1 - e_2 + e_3$, $Te_2 = 3e_1 + e_2 - 2e_3$, $Te_3 = e_1 + e_3$.

Soluţie

Matricea asociată lui T în raport cu baza B este $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Atunci $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}$.

43 *Fie operatorul liniar* $T : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ *a cărui matrice în raport cu perechea de baze canonice din* $\mathbb{R}_2[X]$, *respectiv* $\mathbb{R}_3[X]$, *este* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. *Determinaţi* $T(2 + X + 3X^2)$.

Soluţie

Vectorul de coordonate al lui $v = 2+X+3X^2$ în raport cu baza canonică din $\mathbb{R}_2[X]$ este $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Atunci vectorul de coordonate $(Tv)_1$ al lui Tv în raport cu baza canonică din $\mathbb{R}_3[X]$ este $(Tv)_1 = A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$. Se obţine de aici că $Tv = 5+11X+9X^2+11X^3$.

44 *Fie* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *definit prin* $Tx = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}$, *dacă* $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

1) *Să se demonstreze că T este un operator liniar şi să se precizeze matricea sa asociată în raport cu perechea de baze canonice din $\mathbb{R}^3$, respectiv $\mathbb{R}^4$;*

2) *Să se determine nucleul şi imaginea operatorului T;*

3) *Să se verifice că* $\dim N(T) + \dim \operatorname{Im} T = 3$;

4) *Să se determine $T(S)$ şi o bază în $T(S)$,* $S = \left\{ x \,|\, x = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$;.

Soluţie

1) Fie $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Au loc egalităţile

$$\begin{aligned} T(\alpha x + \beta y) &= \begin{pmatrix} (\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2) \\ \alpha x_3 + \beta y_3 \\ (\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_3 + \beta y_3) \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_3 \\ y_1 + y_3 \\ y_2 \end{pmatrix} = \\ &= \alpha T x + \beta T y, \end{aligned}$$

deci T este liniar.

Matricea asociată lui T în raport cu perechea de baze canonice în $\mathbb{R}^3$, respectiv $\mathbb{R}^4$, este $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Conform definiţiei, $Tx = Ax$.

2) Din definiţia nucleului unui operator liniar, $N(T) = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, Tx = 0\}$. Fie $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ astfel încât $Tx = 0$. Rezultă de aici că $\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$, deci $x_1 = x_2 = $ $= x_3 = 0$ şi $x = 0$. Obţinem deci că $N(T) = \{0\}$ deci $\dim N(T) = 0$.

Din definiţia imaginii unui operator liniar,

$\operatorname{Im} T = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} \,|\, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$. Se observă că $\dim \operatorname{Im} T = 3$, o bază în $\operatorname{Im} T$ fiind $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ (fiecare dintre parametrii independenţi x_1, x_2, x_3 ia pe rând valoarea 1, în timp ce ceilalţi iau valoarea 0). Din teorema rangului, $\dim N(T) + \dim \operatorname{Im} T = 3$, ceea ce rezolvă punctul 3).

4) $T(S) = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} \,|\, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$, o bază în $T(S)$ fiind $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

45 *Să se studieze care dintre următoarele funcţii sunt forme liniare pe spaţiile considerate*:

1) $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ T_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2;$

2) $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ T_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = e^{x_1} + 2x_2;$

3) $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ T_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3;$

4) $T_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ T_4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 + x_2 + x_3;$

5) $T_5 : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C},\ T_5 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \Re e(z_1 + z_2 + z_3);$

6) $T_6 : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C},\ T_6 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = z_1 + z_2 + z_3 + 1;$

7) $T_7 : M_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ T_7(A) = \mathrm{Tr}\, A;$

8) $T_8 : M_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ T_8(A) = \det A.$

Soluţie

1) $T_1 \left(2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 4 \neq 2 = 2T_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, deci T_1 nu este formă liniară.

2) $T_2 \left(2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{e}^2 \neq 2\mathrm{e} = 2T_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, deci T_2 nu este formă liniară.

3) $T_3 \left(2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 12 \neq 6 = 2T_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, deci T_3 nu este formă liniară.

4) $T_4 \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3 = (x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3) =$

$= T_4 \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) + T_4 \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right).$

$T_4 \left(\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 = \alpha T_4 \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right)$ $(\forall)\alpha \in \mathbb{R},$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, deci T_4

este formă liniară.

5) $T_5\left(i\begin{pmatrix} i\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right) = -1$; $T\begin{pmatrix} i\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = 0$, deci T_5 nu este formă liniară.

6) $T_6\left(2\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right) = 3$; $T\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = 2$, deci T_6 nu este formă liniară.

7) Este cunoscut că $\operatorname{Tr}(A+B) = \operatorname{Tr} A + \operatorname{Tr} B$ şi $\operatorname{Tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{Tr} A$, $(\forall) A, B \in$ $\in M_{n,n}(\mathbb{R})$ şi $(\forall)\alpha \in \mathbb{R}$, deci T_7 este formă liniară.

8) Deoarece $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$ $(\forall) A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$, T_8 nu este formă liniară.

46 *Să se determine coeficienţii următoarelor forme liniare în raport cu baza canonică şi cu baza*

$$B' = \left\{\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}.$$

1) $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $T_1\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = 2x_1 - x_2 + x_3$;

2) $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $T_2\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = x_1 + x_2 - x_3$;

3) $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $T_3\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = 2x_1 + x_3$.

Soluţie

1) Fie $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ baza canonică în $\mathbb{R}^3$. Se observă că $Te_1 = 2$, $Te_2 = -1$, $Te_3 = 1$, deci matricea de coeficienţi în raport cu baza canonică este $M = \begin{pmatrix} 2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$. Conform problemei precedente, matricea coeficienţilor lui T în raport cu baza B' este $M' = AM$, unde $A = S^t_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

2) $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $M' = AM$; 3) $M = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $M' = AM$.

47 *Să se studieze care dintre următoarele aplicaţii sunt forme biliniare pe spaţiile considerate*

1) $a_1 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $a_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 + y_2^2 + x_3^2$;

2) $a_2 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $a_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = e^{x_1} + e^{y_2}$;

3) $a_3 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $a_3\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$;

4) $a_4 : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$, $a_4(P, Q) = P(0)Q(1)$;

5) $a_5 : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$, $a_5(P, Q) = \left(\int\limits_0^1 P(x)\mathrm{d}\,x\right)\left(\int\limits_0^1 Q(x)\mathrm{d}\,x\right)$;

6) $a_6 : M_{n,n}(\mathbb{R}) \times M_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $a_6(A, B) = \det(AB)$;

7) $a_7 : M_{n,n}(\mathbb{R}) \times M_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $a_7(A, B) = \mathrm{Tr}(AB)$;

8) $a_8 : M_{n,n}(\mathbb{R}) \times M_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $a_8(A, B) = \mathrm{Tr}\, A \cdot \mathrm{Tr}\, B$.

Soluţie

1) $a_1\left(2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 8 \neq 4 = 2a_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, deci a_1 nu este formă biliniară.

2) $a_2\left(2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = e^2 \neq 2e = 2a_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, deci a_2 nu este formă biliniară.

3) a_3 este formă biliniară (produsul scalar uzual pe $\mathbb{R}^3$).

a_4, a_5, a_8 sunt forme biliniare, conform problemei anterioare.

6) $a_6(A, kB) = \det(A \cdot kB) = k^n \det AB = k^n a_6(A, B)$, deci a_6 nu este formă biliniară.

7) Deoarece $A \to \mathrm{Tr}(AB)$ este formă liniară iar $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$, $(\forall)\ A, B \in$ $\in M_{n,n}(\mathbb{R})$, a_7 este formă biliniară.

48 *Să se determine matricea următoarelor forme biliniare în raport cu baza canonică şi cu baza*

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

1) $a_1 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $a_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + 3x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_3y_3;$

2) $a_2 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $a_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 + 2x_2y_1 + 5x_3y_3;$

3) $a_3 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $a_3\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 4x_1y_3 + 5x_2y_2 +$

$+6x_3y_1 + x_3y_3.$

Soluţie

1) Matricea lui a_1 în raport cu baza canonică este $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, iar în raport cu baza B' este A^tCA, unde $A = S^t_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Matricea lui a_2 în raport cu baza canonică este $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, iar în raport cu baza B' este A^tCA.

3) Matricea lui a_3 în raport cu baza canonică este $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, iar în raport cu baza B' este A^tCA.

49 *Să se demonstreze că formele biliniare următoare sunt simetrice. Să se scrie formele pătratice determinate de ele şi să se precizeze rangul lor.*

1) $a_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ a_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2;$

2) $a_2 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ a_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_1y_3 + 2x_2y_1 + 3x_2y_3+$

$+x_3y_1 + 3x_3y_2;$

3) $a_3 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ a_3\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_3y_3.$

Soluţie

1) Matricea lui a_1 în raport cu baza canonică în $\mathbb{R}^2$ este $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Cum C este simetrică, a_1 este simetrică. Forma pătratică determinată de a_1 este $F_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)$, $F_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$. Rangul lui F_1 este rangul matricei C, deci $\operatorname{rang} F_1 = 2$.

2) Matricea lui a_2 în raport cu baza canonică în $\mathbb{R}^3$ este $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Cum C este simetrică, a_2 este simetrică. Forma pătratică determinată de a_2 este $F_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F_2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right)$, $F_2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$. Rangul lui F_2 este rangul matricei C_1, deci $\operatorname{rang} F_2 = 3$.

3) Matricea lui a_3 în raport cu baza canonică în $\mathbb{R}^3$ este $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Se deduce analog că a_3 este simetrică şi $\operatorname{rang} F_3 = 3$.

50 *Să se determine formele biliniare simetrice din care provin următoarele forme pătratice*

1) $F_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ F_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2;$

2) $F_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ F_2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_1^2+x_2^2-x_3^2+2x_1x_3+4x_2x_3;$

3) $F_3:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ F_3\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_1^2-x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2+6x_1x_3+8x_2x_3.$

Soluţie

1) $a_1\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=x_1y_1+x_2y_2+2x_1y_2+2x_2y_1.$

2) $a_2\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right)=x_1y_1+x_2y_2-x_3y_3+x_1y_3+x_3y_1+2x_2y_3+2x_3y_2.$

3) $a_3\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right)=x_1y_1-x_2y_2+2x_3y_3+2x_1y_2+2x_2y_1+3x_1y_3+3x_3y_1+$ $+4x_2y_3+4x_3y_2.$

51 *Exprimaţi următoarele forme pătratice $F_i:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $i=\overline{1,3}$ în notaţia matriceală x^tCx.*

1) $F_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_1^2+x_2^2-x_3^2+2x_1x_2-10x_1x_3+4x_2x_3;$

2) $F_2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_1^2+6x_2^2+x_3^2+3x_1x_2-5x_1x_3+x_2x_3;$

3) $F_3\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3.$

Soluţie

1) $F_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}^t C\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, cu $C=\begin{pmatrix}1&1&-5\\1&1&2\\-5&2&-1\end{pmatrix}.$

$$2)\ F_2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}^t C\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\ \text{cu } C=\begin{pmatrix}1&\frac{3}{2}&-\frac{5}{2}\\\frac{3}{2}&6&\frac{1}{2}\\-\frac{5}{2}&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}.$$

$$3)\ F_3\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}^t C\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\ \text{cu } C=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}.$$

Notă În fiecare caz, matricea C reprezintă matricea formei biliniare din care provine forma pătratică în cauză.

52 *Determinaţi forma canonică a următoarelor forme pătratice şi precizaţi baza corespunzătoare*

$$1)\ F_1:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ F_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=7x_1^2+6x_2^2+5x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3;$$

$$2)\ F_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ F_2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_1^2-x_3^2-4x_1x_2+4x_2x_3;$$

$$3)\ F_3:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ F_3\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_1x_2+x_1x_3-x_2x_3.$$

Soluţie

1) Aplicăm metoda direcţiilor principale. Matricea formei biliniare din care provine F_1 este $C=\begin{pmatrix}7&-2&0\\-2&6&-2\\0&-2&5\end{pmatrix}$. Polinomul caracteristic al matricei C este

$$P(\lambda)=\det(\lambda I_3-C)=\begin{vmatrix}\lambda-7&2&0\\2&\lambda-6&2\\0&2&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-6)(\lambda-9),$$

deci valorile proprii ale lui C sunt $\lambda_1=3$, $\lambda_2=6$, $\lambda_3=9$.

Se deduce că $B'_1 = \left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}\right\}$, $B'_2 = \left\{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\right\}$, $B'_3 = \left\{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}\right\}$ sunt baze ortonormale în $S(3)$, $S(6)$, respectiv $S(9)$, şi atunci

$$B = \left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}\right\}$$

este baza ortonormală în raport cu care forma pătratică F_1 are forma canonică

$$F_1\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2 = 3x_1'^2 + 6x_2'^2 + 9x_3'^2.$$

2) Aplicăm metoda direcţiilor principale. Matricea formei biliniare din care provine F_1 este $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Polinomul caracteristic al matricei C este

$$P(\lambda) = \det(\lambda I_3 - C) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+3)(\lambda-3),$$

deci valorile proprii ale lui C sunt $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 3$.

Se deduce că $B'_1 = \left\{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}\right\}$, $B'_2 = \left\{\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}\right\}$, $B'_3 = \left\{\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}\right\}$ sunt baze ortonormale în $S(0)$, $S(-3)$, $S(3)$, şi atunci $B = \left\{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}\right\}$ este o bază ortonormală în raport cu care forma pătratică F_2 are forma canonică

$$F_2\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2 = -3x_2'^2 + 3x_3'^2.$$

3) Aplicăm metoda direcţiilor principale. Matricea formei biliniare din care provine F_3 este $C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Polinomul caracteristic al matricei C este

$$P(\lambda) = \det(\lambda I_3 - C) = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2,$$

deci valorile proprii ale lui C sunt $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = \dfrac{1}{2}$ (se observă că $\lambda = \dfrac{1}{2}$ este valoare proprie dublă).

Se deduce că $B_1' = \left\{\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\right\}$, $B_2' = \left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 2 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\right\}$ sunt baze ortonormale în $S(-1)$, respectiv $S\left(\frac{1}{2}\right)$, şi atunci $B = \left\{\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 2 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\right\}$ este o bază ortonormală în raport cu care forma pătratică F_3 are forma canonică $F_3\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2 = -x_1'^2 + \frac{1}{2}x_2'^2 + \frac{1}{2}x_3'^2.$

53 *Să se precizeze dacă metoda lui Jacobi este sau nu aplicabilă pentru determinarea unor baze în* $\mathbb{R}^3$ *în raport cu care următoarele forme pătratice se scriu ca sume de pătrate*

1) $F_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3;$

2) $F_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ F_2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3;$

3) $F_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ F_3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$

Soluţie

1) Matricea formei biliniare a din care provine F_1 este $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Se observă că $\Delta_0 = 1,\ \Delta_1 = 1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -7$. Deoarece $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \neq$ $\neq 0$, metoda Jacobi este aplicabilă, iar în baza $B = \{e_1', e_2', e_3'\}$ care urmează a fi determinată forma pătratică F_1 se scrie $F_1\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \dfrac{\Delta_0}{\Delta_1}x_1'^2 + \dfrac{\Delta_1}{\Delta_2}x_2'^2 + \dfrac{\Delta_2}{\Delta_3}x_3'^2 =$ $= x_1'^2 - \dfrac{1}{3}x_2'^2 + \dfrac{3}{7}x_3'^2.$

2) Matricea formei biliniare a din care provine F_2 este $C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. Se observă că $\Delta_0 = 1,\ \Delta_1 = 1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{3}{4},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}$. Deoarece $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \neq$ $\neq 0$, metoda Jacobi este aplicabilă, iar în baza $B = \{e_1', e_2', e_3'\}$ care urmează a fi determinată forma pătratică F_2 se scrie $F_2\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \dfrac{\Delta_0}{\Delta_1}x_1'^2 + \dfrac{\Delta_1}{\Delta_2}x_2'^2 + \dfrac{\Delta_2}{\Delta_3}x_3'^2 =$ $= x_1'^2 + \dfrac{4}{3}x_2'^2 + \dfrac{3}{2}x_3'^2.$

3) Matricea formei biliniare a din care provine F_3 este $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Deoarece $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, metoda lui Jacobi nu este aplicabilă în acest caz.

54 *Utilizaţi metoda lui Gauss pentru determinarea unei baze în* $\mathbb{R}^3$ *în raport cu care următoarele forme pătratice se scriu ca sume de pătrate*

1) $F_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ F_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + 6x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3;$

2) $F_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ F_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3;.$

Soluţie

$$
\begin{aligned}
1)\ F_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = x_1^2 + 6x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 = (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 = \\
& = (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + 2(x_2 + x_3)^2 - 2x_3^2 = \\
& = x_1'^2 + 2x_2'^2 - 2x_3'^2,
\end{aligned}
$$

unde $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, cu $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Rămâne deci să determinăm baza B' în raport cu care forma pătratică F_1 are expresia $F_1 \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = x_1'^2 + 2x_2'^2 - 2x_3'^2$. Fie A matricea schimbării de bază. Atunci $M = A^{-1}$, deoarece M este matricea schimbării de coordonate. În concluzie, $A = M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, deci $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

2) $F_2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 =$

$= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 =$

$= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3(x_2 + \frac{1}{3}x_3)^2 + \frac{7}{3}x_3^2 =$

$= x_1'^2 - 3x_2'^2 + \frac{7}{3}x_3'^2,$

unde $\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, cu $M = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 1 & \frac{1}{3}\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Rămâne deci să determinăm baza B' în raport cu care forma pătratică F_2 are expresia $F_2\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix} = x_1'^2 - 3x_2'^2 + \frac{7}{3}x_3'^2$. Fie A matricea schimbării de bază. Atunci $M = A^{-1}$, deoarece M este matricea schimbării de coordonate.

În concluzie, $A = M^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -2 & -\frac{1}{3}\\0 & 1 & -\frac{1}{3}\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, deci $B' = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}\right\}$.