**1** *Trei vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ formează un triunghi* $\Leftrightarrow \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ **(relaţia lui Chasles)**.

**Soluţie**

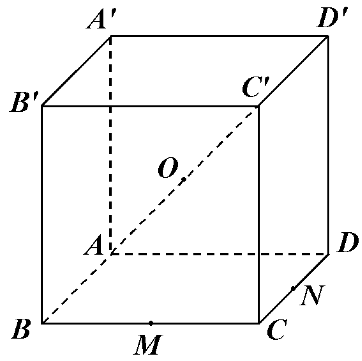
Dacă $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sunt laturi ale unui triunghi $ABC$, $\vec{a}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CA}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AB}$, atunci concluzia rezultă din regula triunghiului de adunare a vectorilor:

$$\vec{c}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=-\vec{b}-\vec{a}\Rightarrow \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}.$$

Reciproc, fie $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ cu $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0 \Leftrightarrow \vec{c}=-(\vec{a}+\vec{b})$. Construim un vector oarecare $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$. Cu originea în $C$ construim un vector $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$. Atunci $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=$ $=\vec{a}+\vec{b}\Rightarrow \overrightarrow{AB}=-(\vec{a}+\vec{b})=\vec{c}$ şi deci cu vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ putem construi $\triangle ABC$.

**2** *Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub. În raport cu reperul $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA'})$, găsiţi coordonatele vectorilor $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{A'N}$, $\overrightarrow{OM}$, unde $M$, $N$ sunt mijloacele segmentelor $[BC]$, respectiv $[CD]$, iar $O$ este centrul cubului.*

**Soluţie**




$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC'} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}\\ &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'},\ \text{deci } \overrightarrow{AC'}(1,1,1).\\ \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\end{aligned}$$

deci $\overrightarrow{MN}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'N} &= \overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{D'D}+\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})\\ &\quad \text{deci } \overrightarrow{A'N}\left(\frac{1}{2},1,-1\right).\\ \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC'}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM})=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'})+\\ &\quad +(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'},\ \text{deci } \overrightarrow{OM}\left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

**3** *În $\triangle ABC$ se consideră medianele $[AA']$, $[BB']$ şi $[CC']$. Să se arate că putem construi un triunghi cu vectorii $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ şi $\overrightarrow{CC'}$.*

**Soluţie**

$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+$ $+\overrightarrow{CA})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})=\vec{0}$ şi concluzia urmează folosind problema 1.

**4** *Fie $O$ originea unui reper în spaţiu. Să se arate că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram dacă şi numai dacă $\vec{r}_A + \vec{r}_C = \vec{r}_B + \vec{r}_D$.*

**Soluţie**

Fie $M$ şi $N$ mijloacele diagonalelor $[AC]$, respectiv $[BD]$. Atunci: $ABCD$ paralelogram $\Leftrightarrow M = N \Leftrightarrow \vec{r}_M = \vec{r}_N \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_C) = \dfrac{1}{2}(\vec{r}_B + \vec{r}_D) \Leftrightarrow \vec{r}_A + \vec{r}_C = \vec{r}_B + \vec{r}_D$.

**5** *Să se arate că mijloacele laturilor unui patrulater convex $ABCD$ sunt vârfurile unui paralelogram.*

**Soluţie**

Raportăm planul la un reper de origine $O$ şi fie $M$, $N$, $P$, $Q$ mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ şi respectiv $[DA]$. Atunci

$$\vec{r}_M + \vec{r}_P = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B) + \frac{1}{2}(\vec{r}_C + \vec{r}_D) = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_D) + \frac{1}{2}(\vec{r}_B + \vec{r}_C) = \vec{r}_Q + \vec{r}_N$$

de unde, conform problemei precedente, urmează că $MNPQ$ este paralelogram.

**6** *Fie $ABCDEF$ hexagon, iar $M$, $N$, $P$, $Q$, $R$, $S$ mijloacele laturilor consecutive. Arătaţi că triunghiurile $MPR$ şi $NQS$ au acelaşi centru de greutate.*

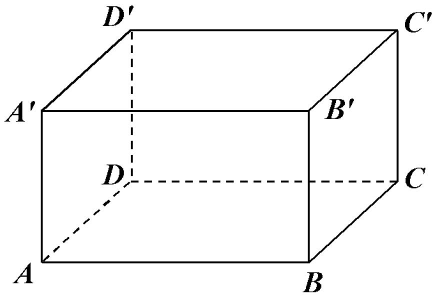
**Soluţie**

Fie $M$ mijlocul lui $[AB]$, $N$ mijlocul lui $[BC]$ *etc.*, $G_1$ centrul de greutate al $\triangle MPR$, iar $G_2$ centrul de greutate al $\triangle NQS$. Atunci, raportând planul la un reper cu originea în $O$, avem:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{G_1} &= \frac{1}{3}(\vec{r}_M + \vec{r}_P + \vec{r}_R) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B) + \frac{1}{2}(\vec{r}_C + \vec{r}_D) + \frac{1}{2}(\vec{r}_E + \vec{r}_F)\right] = \\
&= \frac{1}{6}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D + \vec{r}_E + \vec{r}_F), \\
\vec{r}_{G_2} &= \frac{1}{3}(\vec{r}_N + \vec{r}_Q + \vec{r}_S) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(\vec{r}_B + \vec{r}_C) + \frac{1}{2}(\vec{r}_D + \vec{r}_E) + \frac{1}{2}(\vec{r}_F + \vec{r}_A)\right] = \\
&= \frac{1}{6}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D + \vec{r}_E + \vec{r}_F),
\end{aligned}$$

deci $G_1 = G_2$.

**7** *Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic. Să se arate că $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{D'C}+$ $+\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{B'C'} = 0$.*




**Soluţie**

Deoarece $AD \perp (CDD')$ şi $D'C \subset (CDD')$, rezultă că $AD \perp D'C$. Analog se observă că $AB \perp BC'$, $A'B \perp B'C'$, deci fiecare dintre termenii sumei din enunţ este nul.

**8** *Fie $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ oarecare în $V_3$ şi $\vec{u} = \vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}) - \vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a})$. Să se arate că vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{c}$ sunt ortogonali.*

**Soluţie**

Avem:

$$\vec{u}\cdot\vec{c} = \left[\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}) - \vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a})\right]\cdot\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{c}) - (\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{c}\cdot\vec{a}) = 0,$$

ţinând seama de comutativitatea produsului scalar; deci $\vec{u}\perp\vec{c}$.

**9** *Se dau vectorii $\overrightarrow{AB} = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 3\vec{k}$, $\overrightarrow{CA} = -3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$. Arătaţi că aceşti vectori pot forma un triunghi şi determinaţi măsura unghiului $A$.*

**Soluţie**

Observăm că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$, deci vectorii daţi închid un triunghi $ABC$. Avem:

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{2\cdot 3 + (-2)\cdot 2 + 1\cdot(-2)}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}\cdot\sqrt{3^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 0,$$

adică $m(\widehat{A}) = 90°$.

**10** *Fie $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ astfel încât $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Să se demonstreze că $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{c} =$ $= \vec{c}\times\vec{a}$.*

**Soluţie**

Au loc relaţiile

$$\vec{a}\times\vec{b} - \vec{b}\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{c}\times\vec{b} = (\vec{a}+\vec{c})\times\vec{b} = (-\vec{b})\times\vec{b} = \vec{0}.$$

Rezultă că $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{c}$. Analog se demonstrează şi cealaltă egalitate.

**11** *Calculaţi lungimea înălţimii $[AD]$ a triunghiului $ABC$ de vârfuri $A(1,3,1)$, $B(3,1,5)$, $C(-1,0,2)$.*

**Soluţie**

Se ştie că $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$. În cazul nostru,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 4 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 10\vec{\imath} - 10\vec{\jmath} - 10\vec{k};$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{3} = 5\sqrt{3} = \frac{BC \cdot AD}{2} \Rightarrow AD = \frac{10\sqrt{3}}{BC}.$$

Însă $\overrightarrow{BC} = -4\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 3\vec{k}$, deci $BC = \sqrt{16+1+9} = \sqrt{26}$, de unde

$$AD = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{26}} = \frac{10\sqrt{78}}{26} = \frac{5\sqrt{78}}{13}.$$

**12** *Fiind daţi trei vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ necoplanari, să se calculeze produsul mixt $(\vec{a}+ +\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{a}+\vec{c})$ şi să se interpreteze geometric rezultatul.*

**Soluţie**

$$\begin{aligned} (\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{a}+\vec{c}) &= (\vec{a}+\vec{b}) \cdot ((\vec{b}+\vec{c}) \times (\vec{a}+\vec{c})) = \\ &= (\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{b} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{c})) = \\ &= (\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}) + (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{c}, \vec{a}) + (\vec{a}, \vec{c}, \vec{c}) + \\ &\quad +(\vec{b}, \vec{b}, \vec{a}) + (\vec{b}, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) + (\vec{b}, \vec{c}, \vec{c}) = 2(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}). \end{aligned}$$

**Interpretare:** Fie paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$ cu $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$; atunci $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{c}$, $\vec{b}+\vec{c}$ reprezintă respectiv diagonalele $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{A'C'}$. Rezultatul demonstrează că paralelipipedul construit pe $AD$, $A'B'$, $A'C'$ are dublul volumului paralelipipedului iniţial.

**13** *Dacă $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ sunt necoplanari, iar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ cu $\alpha + \beta = 0$, arătaţi că $(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}, \alpha\vec{c} + \beta\vec{a}) = 0$.*

**Soluţie**

Se observă că $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \alpha\vec{b} + \beta\vec{c} + \alpha\vec{c} + \beta\vec{a} = (\alpha+\beta)(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = 0$ şi deci $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, $\alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$, $\alpha\vec{c} + \beta\vec{a}$ sunt coplanari. De aici, $(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}, \alpha\vec{c} + \beta\vec{a}) = 0$.

**14** *Demonstraţi că*

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$$

*pentru orice $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$* **(identitatea lui Jacobi)**.

**Soluţie**

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}+(\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}+(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}-(\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a} = \vec{0}.$

**15** *Fie* $\overrightarrow{OA} = \vec{\imath}+\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{\jmath}+\vec{k}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$. *Calculaţi volumul tetraedrului* $OABC$, *precum şi lungimea înălţimii din* $O$.

**Soluţie**

$$V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})| = \frac{1}{6}\cdot|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}| = \frac{1}{6}\cdot$$

Deoarece $V = \dfrac{OH\cdot S_{ABC}}{3}$, atunci înălţimea este $OH = \dfrac{3V}{S_{ABC}}$. Însă

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2}\cdot|\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}| = \frac{1}{2}\cdot|\vec{\jmath}| = \frac{1}{2},$$

deci $OH = 1$.

**16** *Scrieţi ecuaţia vectorială, ecuaţiile parametrice şi ecuaţia generală pentru dreptele determinate prin*:

a) *punctul* $A(1,2)$, *vectorul director* $\vec{v} = 2\vec{\imath}+\vec{\jmath}$;

b) *tăieturile pe axe* $A(3,0)$, $B(0,-1)$;

c) *punctele* $A(1,2)$, $B(2,1)$;

**Soluţie**

a) Ecuaţia vectorială: $\vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{v}$, $t\in\mathbb{R}$, unde $\vec{r}_A = \vec{\imath}+2\vec{\jmath}$.

Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = 1+2t\\ y = 2+t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

Egalând $t = \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1}$, obţinem ecuaţia generală: $x-2y+3 = 0$.

b) Ecuaţia prin tăieturi este $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-1} = 1$, deci $x-3y-3 = 0$ este ecuaţia generală a dreptei.

Un vector director al dreptei $AB$ este $\overrightarrow{AB} = -3\vec{\imath}-\vec{\jmath}$ şi atunci ecuaţia vectorială este $\vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{v}$, $t\in\mathbb{R}$, unde $\vec{r}_A = 3\vec{\imath}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = 3-3t\\ y = -t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

c) Ecuaţia dreptei prin două puncte este dată de

$$AB: \ \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A},$$

deci $x + y - 3 = 0$. În continuare, procedăm ca la punctul b).

**17** *Scrieţi ecuaţia dreptei* $(D)$ *în fiecare dintre cazurile*:

a) *conţine punctul* $A(1,2)$ *şi este paralelă cu dreapta* $(D'): \ x - y + 2 = 0$;

b) *conţine punctul* $A(3,1)$ *şi face cu axa* $Ox$ *unghiul* $\alpha = \frac{\pi}{6}$;

c) *conţine punctul* $A(-1,1)$ *şi este perpendiculară pe dreapta* $(D'): \ 2x + y - 1 = 0$;

d) *conţine punctul* $A(1,2)$ *şi este perpendiculară pe dreapta* $(D'): \ y + 2 = 0$.

**Soluţie**

a) Forma redusă a ecuaţiei lui $(D')$ este $y = x + 2$, deci panta lui $(D')$ este $m = 1$. Cum $(D) \parallel (D')$, rezultă că şi $(D)$ este de pantă 1; atunci

$$(D): \ y - 2 = 1(x - 1), \ \textit{i.e.} \ (D): \ x - y + 1 = 0.$$

b) Panta dreptei $(D)$ este $m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, deci:

$$(D): \ y - 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 3), \ \textit{i.e.} \ (D): \ \sqrt{3}x - 3y + 3(1 - \sqrt{3}) = 0.$$

c) Forma redusă a ecuaţiei lui $(D')$ este $y = -2x + 1$, deci $m_{(D')} = -2$. Din condiţia de perpendicularitate, $m_{(D)} = \frac{1}{2}\cdot$ Avem:

$$(D): \ y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1), \ \textit{i.e.} \ (D): \ x - 2y + 3 = 0.$$

d) $(D')$ este o dreaptă orizontală. Nu putem folosi condiţia de perpendicularitate, însă este clar că $(D)$ trebuie să fie o dreaptă verticală şi, cum trece prin punctul $A$, atunci $(D): \ x = 1$.

**18** *Se dau dreptele* $(D): \ x + \alpha y + \beta = 0$; $(D'): \ \beta x - y + 2 = 0$. *În ce condiţii dreptele sunt:* a) *paralele*; b) *confundate*; c) *perpendiculare ?*

**Soluţie**

a) $(D) \parallel (D') \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{-1} \neq \frac{\beta}{2} \Leftrightarrow \alpha\beta = -1$ şi $2\alpha + \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}^* \setminus \left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ şi $\beta = -\frac{1}{\alpha}\cdot$

b) $(D) = (D') \Leftrightarrow \dfrac{1}{\beta} = \dfrac{\alpha}{-1} = \dfrac{\beta}{2} \Leftrightarrow \alpha\beta = -1$ şi $2\alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow (\alpha, \beta) \in$
$\in \left\{ \left( \dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2} \right), \left( -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2} \right) \right\}.$

c) $(D) \perp (D') \Leftrightarrow m \cdot m' = -1$ sau una din drepte este verticală, cealaltă orizontală $\Leftrightarrow$ $\alpha = \beta \in \mathbb{R}^*$ sau $\alpha = \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta \in \mathbb{R}$.

**19** *Se dă triunghiul $ABC$ având vârfurile $A(1,3)$, $B(4,1)$, $C(-2,-1)$. Scrieţi ecuaţiile mediatoarei, medianei şi înălţimii corespunzătoare laturii $[BC]$.*

**Soluţie**

Mijlocul lui $[BC]$ este $M(1,0)$, iar panta dreptei $BC$ este $m_{BC} = \dfrac{1}{3}$. Mediatoarea $(D)$ a segmentului $[BC]$ are panta $m_{(D)} = -3$ şi trece prin punctul $M$, deci

$$(D):\ y = -3(x-1),\ i.e.\ (D):\ 3x + y - 3 = 0.$$

Mediana $AM$ nu poate fi aflată cu formula dreptei prin două puncte decât folosind convenţia uzuală: un numitor care se anulează, anulează automat şi numărătorul fracţiei, deci avem de-a face cu o dreaptă orizontală sau verticală. În cazul nostru,

$$AM:\ \frac{x-1}{0} = \frac{y}{3},\ i.e.\ AM:\ x - 1 = 0.$$

Înălţimea din $A$ are panta $m_{AD} = -3$, deci

$$AD:\ y - 3 = -3(x-1),\ i.e.\ AD:\ 3x + y - 6 = 0.$$

**20** *Scrieţi ecuaţia vectorială, ecuaţiile parametrice şi ecuaţiile canonice ale dreptelor determinate prin:*

a) *punctul $A(1,2,1)$, vectorul director $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$;*

b) *punctul $A(1,2,1)$ şi unghiurile de $120°$, $60°$, $45°$ formate cu axele de coordonate;*

c) *punctul $A(1,2,1)$ şi este paralelă cu $Ox$;*

d) *punctele $A(1,-1,2)$, $B(1,2,-1)$.*

**Soluţie**

a) Ecuaţia vectorială: $\vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$ unde $\vec{r}_A = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Ecuaţiile canonice: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$.

b) Un versor director al dreptei este $\vec{u}=\cos 120^\circ\cdot\vec{\imath}+\cos 60^\circ\cdot\vec{\jmath}+\cos 45^\circ\cdot\vec{k}=$ $=-\dfrac{1}{2}\vec{\imath}+\dfrac{1}{2}\vec{\jmath}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$ şi procedăm ca la punctul a).

c) Două drepte paralele au un acelaşi vector director, deci putem considera $\vec{v}=\vec{\imath}$ drept vector director al dreptei căutate.

d) Vectorul director al dreptei este $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A)\vec{\imath}+(y_B-y_A)\vec{\jmath}+(z_B-z_A)\vec{k}=$ $=3\vec{\jmath}-3\vec{k}$. Atunci ecuaţia vectorială este $\vec{r}=\vec{r}_A+t\overrightarrow{AB},\ t\in\mathbb{R}$ *etc.*

**21** *Se dă dreapta* $(D):\ \dfrac{x-3}{-5}=\dfrac{y+2}{7}=\dfrac{z-4}{-3}\cdot$

a) *Determinaţi cosinusurile directoare ale dreptei*;

b) *Aflaţi intersecţiile dreptei cu planele de coordonate.*

**Soluţie**

a) Vectorul director al dreptei este $\vec{v}=-5\vec{\imath}+7\vec{\jmath}-3\vec{k}$ de normă $|\vec{v}|=\sqrt{25+49+9}=$ $=\sqrt{83}$; atunci un versor director este $\vec{u}=\mp\dfrac{5\sqrt{83}}{83}\vec{\imath}\pm\dfrac{7\sqrt{83}}{83}\vec{\jmath}\mp\dfrac{3\sqrt{83}}{83}\vec{k}$, aşadar $\cos\alpha=$ $=\mp\dfrac{5\sqrt{83}}{83}$, $\cos\beta=\pm\dfrac{7\sqrt{38}}{83}$, $\cos\gamma=\mp\dfrac{3\sqrt{83}}{83}\cdot$

b) Intersecţia cu planul $xOy$ se obţine considerând $z=0$. Folosind ecuaţiile parametrice:

$$(D)\ \begin{cases} x=3-5t\\ y=-2+7t\ \ ,\quad t\in\mathbb{R},\\ z=4-3t\end{cases}$$

din ultima ecuaţie obţinem $t=\dfrac{4}{3}$ şi atunci $x=-\dfrac{11}{3}$, $y=\dfrac{22}{3}$; aşadar punctul căutat este $A\left(-\dfrac{11}{3},\dfrac{22}{3},\dfrac{4}{3}\right)$.

Analog se obţin intersecţia cu planul $yOz$, $B\left(0,\dfrac{11}{5},\dfrac{11}{5}\right)$ şi cea cu planul $xOz$, $C\left(\dfrac{11}{7},0,\dfrac{22}{7}\right)$.

**22** *Să se scrie ecuaţiile laturilor şi medianelor triunghiului cu vârfurile în punctele* $A(2,0,4)$, $B(6,2,0)$ *şi* $C(4,4,2)$.

**Soluţie**

Ecuaţia canonică a dreptei $AB$: $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-4}{-4}\cdot$

Ecuaţia canonică a dreptei $AC$: $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-4}{-2}\cdot$

Ecuaţia canonică a dreptei $BC$: $\dfrac{x-6}{-2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{2}\cdot$

Mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ sunt punctele $M(5,3,1)$, $N(3,2,3)$ respectiv $P(4,1,2)$.

Ecuaţia canonică a dreptei $AM$: $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-4}{-3}\cdot$

Ecuaţia canonică a dreptei $BN$: $\dfrac{x-6}{-3}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z}{3}\cdot$

Ecuaţia canonică a dreptei $CP$: $\dfrac{x-4}{0}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z-2}{0}\cdot$

Un versor director al dreptei $BC$ este $\vec{v}_1=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\vec{\imath}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\vec{\jmath}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}\cdot$

Un versor director al dreptei $AC$ este $\vec{v}_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\vec{\imath}+\dfrac{2}{\sqrt{6}}\vec{\jmath}-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\vec{k}\cdot$

Un versor director al dreptei $AB$ este $\vec{v}_3=\dfrac{2}{3}\vec{\imath}+\dfrac{1}{3}\vec{\jmath}-\dfrac{2}{3}\vec{k}\cdot.$

**23** *Studiaţi poziţia dreptei* $(D_1):\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{-2}$ *faţă de dreapta* $(D_2)$*:* $\vec{r}=\vec{r}_B+t\vec{v}$*, unde*:

a) $B(1,2,3)$, $\vec{v}=2\vec{\imath}+6\vec{\jmath}-4\vec{k}$;

b) $B(2,4,-2)$, $\vec{v}=2\vec{\imath}+6\vec{\jmath}-4\vec{k}$;

c) $B(0,-2,2)$, $\vec{v}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$;

d) $B(4,3,1)$, $\vec{v}=2\vec{\imath}+\vec{\jmath}-\vec{k}$.

**Soluţie**

Dacă $(D_1)$: $\vec{r}=\vec{r}_A+t\vec{u}$, $(D_2)$: $\vec{r}=\vec{r}_B+t\vec{v}$, $t\in\mathbb{R}$, deosebim cazurile:

(i) $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{r}_B-\vec{r}_A$ coliniari $\Longrightarrow (D_1),(D_2)$ confundate;

(ii) $\vec{u}$, $\vec{v}$ coliniari, dar necoliniari cu $\vec{r}_B-\vec{r}_A \Longrightarrow (D_1),(D_2)$ paralele;

(iii) $\vec{u}$, $\vec{v}$ necoliniari, dar $(\vec{r}_B-\vec{r}_A,\vec{u},\vec{v})=0 \Longrightarrow (D_1),(D_2)$ concurente;

(iv) $(\vec{r}_B-\vec{r}_A,\vec{u},\vec{v})\neq 0 \Longrightarrow (D_1),(D_2)$ necoplanare.

În cazul nostru, $A(1,1,0)$ şi $\vec{u}=\vec{\imath}+3\vec{\jmath}-2\vec{k}$.

a) $\vec{v}=2\vec{u}$ şi $\vec{r}_B-\vec{r}_A=\vec{\jmath}+3\vec{k}$, deci $(D_1)\|(D_2)$.

b) $\vec{v}=2\vec{u}$ şi $\vec{r}_B-\vec{r}_A=\vec{\imath}+3\vec{\jmath}-2\vec{k}=\vec{u}$, deci $(D_1)\equiv(D_2)$.

c) Vectorii $\vec{v}$ şi $\vec{u}$ sunt necoliniari; verificăm condiţia de coplanaritate:

$$(\vec{r}_B-\vec{r}_A,\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix}-1 & -3 & 2\\ 1 & 3 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0,$$

deci $(D_1), (D_2)$ sunt drepte concurente. Pentru aflarea punctului comun, este convenabil să scriem ecuaţia parametrică a dreptei $(D_1)$:

$$(D_1): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = -2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

şi să căutăm un punct $M(x_0, y_0, z_0)$ care să verifice şi ecuaţia lui $(D_2)$. Atunci $t = -1$, deci $x_0 = 0$, $y_0 = -2$, $z_0 = 2$ şi intersecţia lui $(D_1)$ cu $(D_2)$ este tocmai $B$.

d) Avem:

$$(\vec{r}_B - \vec{r}_A, \vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -14 \neq 0,$$

deci $(D_1)$ şi $(D_2)$ sunt necoplanare.

**24** *Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât dreptele $(D_1): \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+1}{3}$ şi $(D_2): \dfrac{x-1}{a} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{1}$ să fie concurente.*

**Soluţie**

Dreapta $(D_1)$ trece prin punctul $A_1(-1, 1, -1)$ şi are vectorul director $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, iar dreapta $(D_2)$ trece prin punctul $A_2(1, -1, 1)$ şi are vectorul director $\vec{v}_2 = a\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$. Dreptele $(D_1)$ şi $(D_2)$ sunt coplanare dacă şi numai dacă vectorii $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ şi $\overrightarrow{A_1A_2}$ sunt coplanari, ceea ce este echivalent cu $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = 0$. Este necesar ca $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ a & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, deci $a = \dfrac{1}{4}$.

**25** *Arătaţi că dreptele $(D_1): \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{0}$, $(D_2): \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1}$ şi $(D_3): \dfrac{x-4}{5} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{-2}$ sunt concurente şi aflaţi punctul lor comun.*

**Soluţie**

Încercăm să găsim un eventual punct de intersecţie a dreptelor $(D_1)$ şi $(D_2)$. Avem:

$$(D_1): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R},$$

şi înlocuind în ecuaţia lui $(D_2)$ obţinem că $t = 2$. Rezultă că $(D_1)$ şi $(D_2)$ sunt concurente în $M(4, 2, 1)$. Se verifică uşor că $M$ aparţine şi dreptei $(D_3)$.

**26** *Să se determine distanţa de la punctul* $A(-1,2,1)$ *la dreapta* $(D)$ : $\dfrac{x+3}{2} = $
$= \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+1}{-1}$.

**Soluţie**

Dreapta $(D)$ trece prin punctul $B(-3,1,-1)$ şi are vectorul director $\vec{v} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}$. Distanţa $d$ între $A$ şi $(D)$ este egală cu înălţimea paralelogramului construit pe $\overrightarrow{AB}$ şi $\vec{v}$ în raport cu baza determinată de $\vec{v}$. Se obţine

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \vec{v}\right|}{|\vec{v}|} = \sqrt{\frac{101}{14}}.$$

**27** *Să se calculeze distanţa dintre dreptele*

$$(D_1) : \ \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{1} \ \text{şi } (D_2) : \ \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{4}.$$

**Soluţie**

Dreapta $(D_1)$ trece prin punctul $A_1(-1,1,-1)$ şi are vectorul director $\vec{v} = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + \vec{k}$, iar dreapta $(D_2)$ trece prin punctul $A_2(1,-1,1)$ şi are vectorul director $\vec{v}_2 = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} +$ $+4\vec{k}$. Distanţa $d$ dintre $(D_1)$ şi $(D_2)$ este egală cu înălţimea paralelipipedului construit pe vectorii $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ în raport cu baza determinată de $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$. Se obţine

$$d = \frac{\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2\right)\right|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|} = \frac{22}{\sqrt{285}}.$$

**28** *Determinaţi locul geometric al punctelor* $M(x,y,z)$ *din spaţiu ale căror coordonate verifică relaţia*

$$\frac{(x-1)^2}{9} = \frac{(y-2)^2}{4} = \frac{(z-3)^2}{16}.$$

**Soluţie**

Relaţia dată devine

$$\pm\frac{x-1}{3} = \pm\frac{y-2}{2} = \pm\frac{z-3}{4},$$

cu 8 posibilităţi de alegere a semnelor. Urmează că locul geometric cerut este reuniunea a 8 drepte ce trec prin punctul $A(1,2,3)$ şi care au vectorii directori $(\pm 3, \pm 2, \pm 4)$.

**29** *Scrieţi ecuaţiile planelor determinate prin*:

a) *punctul* $A(1,0,2)$ *şi vectorii directori* $\vec{u} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{\jmath} - \vec{k}$;

b) *punctele* $A(1,-3,2)$, $B(5,1,-4)$, $C(2,0,3)$;

c) *tăieturile pe axe* $A(1,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,-2)$;

d) *punctul* $A(1,2,1)$ *şi normala la plan* $\vec{N} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$.

**Soluţie**

a) Ecuaţia vectorială a planului este

$$(P):\ \vec{r}=\vec{r}_A+t\vec{u}+s\vec{v},\ t,s\in\mathbb{R}.$$

Ecuaţia canonică se obţine din $(\vec{r}-\vec{r}_A,\vec{u},\vec{v})=0$, deci

$$(P):\ \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{vmatrix}=0,\ i.e.\ (P):\ 3x-2y-4z+5=0.$$

b) Ecuaţia planului $(P)$ sub formă de determinant este $(P):\ \begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ 1 & -3 & 2 & 1\\ 5 & 1 & -4 & 1\\ 2 & 0 & 3 & 1\end{vmatrix}=0$ şi după dezvoltarea determinantului se obţine ecuaţia canonică

$$(P):\quad 11x-5y+4z-34=0.$$

c) Ecuaţia planului $(P)$ prin tăieturi este

$$(P):\ \frac{x}{1}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-2}-1=0,\ i.e.\ (P):\ 6x+2y-3z-6=0.$$

d) Ecuaţia normală a planului este

$$(P):\ 2(x-1)-(y-2)+(z-1)=0,\ i.e.\ (P):\ 2x-y+z-1=0.$$

**30** *Să se determine punctele de intersecţie ale planului* $(P):\ 3x-2y+z-12=0$ *cu axele de coordonate.*

**Soluţie**

Punctul de intersecţie cu axa $Ox$ este $A(4,0,0)$.

Punctul de intersecţie cu axa $Oy$ este $B(0,-6,0)$.

Punctul de intersecţie cu axa $Oz$ este $C(0,0,12)$.

**31** *Să se determine ecuaţia planului* $(P)$ *paralel cu planul* $(P_1):\ 2x-y+2z-3=0$ *şi care trece prin centrul de greutate al triunghiului cu vârfurile în punctele* $A_1(1,2,5)$, $A_2(3,3,-1)$, $A_3(2,1,2)$.

**Soluţie**

Centrul de greutate $G$ al triunghiului $A_1A_2A_3$ are coordonatele

$$x_G = \frac{x_{A_1} + x_{A_2} + x_{A_3}}{3} = 2,\ y_G = \frac{y_{A_1} + y_{A_2} + y_{A_3}}{3} = 2,\ z_G = \frac{z_{A_1} + z_{A_2} + z_{A_3}}{3} = 2.$$

Fiind paralele, cele două plane au aceeaşi normală, deci planul cerut are ecuaţia $2x - y + 2z - a = 0$, $a \in \mathbb{R}$. Punând asupra lui G condiţia de apartenenţă la plan, deducem că $a = 0$.

**32** *Să se determine ecuaţia planului* $(P)$ *ştiind că perpendiculara din origine pe acest plan îl intersectează în punctul* $A(2, 3, 4)$.

**Soluţie**

În aceste condiţii, $\overrightarrow{OA} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}$ este vectorul director al normalei la planul $(P)$. Ecuaţia planului $(P)$ este atunci $2x + 3y + 4z + a = 0$, $a \in \mathbb{R}$. Punând condiţia ca $A$ să aparţină planului $(P)$ se obţine $a = -29$.

**33** *Să se determine ecuaţia planului mediator al segmentului* $[AB]$ *determinat de punctele* $A(3, 1, 2)$ *şi* $B(1, 5, 4)$.

**Soluţie**

Ecuaţia dreptei suport $(D)$ a segmentului $[AB]$ este

$$(D): \quad \frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{2}$$

iar mijlocul $M$ al segmentului are coordonatele

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = 2,\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = 3,\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2} = 3.$$

Planul căutat $(P)$ va fi perpendicular pe $(D)$ şi va trece prin $M$. Se obţine ecuaţia canonică $(P):\ -2x + 4y + 2z - 14 = 0$.

**34** *Să se determine ecuaţia unui plan* $(P)$ *care conţine punctul* $A(1, 3, -2)$ *şi dreapta* $(D):\ \dfrac{x+9}{7} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z}{-1}$.

**Soluţie**

Dreapta $(D)$ conţine punctul $B(-9, -1, 0)$ şi are vectorul director $\vec{v} = 7\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - \vec{k}$. Vectorul director al normalei la plan va fi $\vec{N} = \overrightarrow{AB} \times \vec{v} = -4\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 12\vec{k} = -4(\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k})$. Se obţine ecuaţia $(P):\ x - y + 3z + 8 = 0$.

Altfel, putem considera încă un punct $C \in (D)$, apoi scriem ecuaţia planului ce conţine punctele $A$, $B$, $C$.

**35** *Să se găsească ecuaţia planului $(P)$ determinat de dreptele paralele*:

$$(D_1): \quad \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+2}{3}, \ (D_2): \quad \frac{x+1}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{3}.$$

**Soluţie**

Dreapta $(D_1)$ trece prin punctul $A_1(1,-2,-2)$ şi are vectorul director $\vec{v}=\vec{\imath}+2\vec{\jmath}+3\vec{k}$, iar dreapta $(D_2)$ trece prin $A_2(-1,-3,1)$ şi are acelaşi vector director. Normala la planul $(P)$ căutat are vectorul director $N=\overrightarrow{A_1A_2}\times\vec{v}=-9\vec{\imath}+9\vec{\jmath}-3\vec{k}$. Ecuaţia planului $(P)$ va fi atunci $-9x+9y-3z+a=0$. Punând asupra lui $A_1$ condiţia de apartenenţă la $(P)$ obţinem $a=21$. Ecuaţia lui $(P)$ este deci $-9x+9y-3z+21=0$ sau, echivalent, $(P): \ 3x-3y+z-7=0$.

**36** *Să se determine ecuaţia planului care trece prin punctul $M(1,1,2)$ şi este perpendicular pe planele $(P_1): \quad x-y+2z-1=0$ şi respectiv $(P_2): \quad x+2y-z+1=0$.*

**Soluţie**

Vectorul director al normalei la $(P_1)$ este $\vec{N_1}=\vec{\imath}-\vec{\jmath}+2\vec{k}$, iar vectorul director al normalei la $(P_2)$ este $\vec{N_2}=\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-\vec{k}$. Fiind perpendicular pe $(P_1)$ şi $(P_2)$, planul cerut este perpendicular pe dreapta de intersecţie a acestora, deci vectorul director $\vec{N}$ al normalei la plan coincide cu vectorul director al dreptei de intersecţie a celor două plane. Deci $\vec{N}=\vec{N_1}\times\vec{N_2}=-3\vec{\imath}-3\vec{\jmath}+3\vec{k}$ şi, în concluzie, ecuaţia generală a lui $(P)$ este $-3x-3y+3z=0$.

**37** *Să se determine ecuaţia dreptei ce trece prin $A(1,2,1)$ şi este perpendiculară pe dreapta*

$$(D'): \quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{3}.$$

**Soluţie**

Planul $(P)$ care trece prin $A$ şi este perpendicular pe dreapta $(D')$ are ecuaţia

$$(P): \quad 2x+y+3z+a=0, \ a\in\mathbb{R}.$$

Impunând condiţia ca $A$ să aparţină lui $(P)$ deducem că $a=-7$. Intersecţia dreptei $(D')$ cu planul $(P)$ este $B\left(\frac{11}{7},\frac{9}{7},\frac{6}{7}\right)$. Ecuaţia dreptei $(D)$ va fi atunci

$$(D): \quad \frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z-1}{-1}.$$

.

**38** *Aflaţi proiecţia punctului $M(1,3,2)$ pe planul $(P):\ 2x-y+2z-1=0$.*

**Soluţie**

Să observăm întâi că $M$ nu aparţine planului. Normala la plan $\vec{N}(2,-1,2)$ este vector director pentru perpendiculara din $M$ pe plan, care are deci ecuaţiile sub formă parametrică

$$(D):\ x=1+2t,\ y=3-t,\ z=2+2t,\ t\in\mathbb{R}.$$

Proiecţia $M_0$ a lui $M$ pe plan se află intersectând $(D)$ cu $(P)$, deci

$$2(1+2t)-(3-t)+2(2+2t)-1=0\Leftrightarrow t=-\frac{2}{9},$$

adică $M_0\left(\frac{5}{9},\frac{29}{9},\frac{14}{9}\right)$.

**39** *Să se afle simetricul punctului $M(1,3,-2)$ faţă de planul*

$$(P):\ 3x+2y-z+3=0.$$

**Soluţie**

Vectorul director al normalei la planul $(P)$ este $\vec{N}=3\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-\vec{k}$, deci dreapta perpendiculară pe planul $(P)$ care trece prin $M$ are ecuaţia:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+2}{-1}.$$

Punctul de intersecţie $S$ al acestei drepte cu planul $(P)$ are coordonatele $S(-2,1,-1)$. Fie $Q$ simetricul punctului $M$ faţă de planul $(P)$. Deoarece $S$ este mijlocul segmentului $[MQ]$ vom obţine $x_S=\dfrac{x_M+x_Q}{2}$ ,deci $x_Q=2x_S-x_M=-5$. Analog $y_Q=2y_S-y_M=-1$, $z_Q=2z_S-z_M=0$.

**40** *Se consideră dreptele*

$$(D_1):\ \begin{cases}2x+y-3z-4=0\\ x-y+z=0\end{cases};\ (D_2):\ \begin{cases}x+y-4z-1=0\\ ax+y+z-6=0\end{cases}.$$

*Să se determine $a$ astfel încât $(D_1)$ şi $(D_2)$ să fie coplanare.*

**Soluţie**

Determinantul sistemului

$$\begin{cases}2x+y-3z-4=0\\ x-y+z=0\\ x+y-4z-1=0\end{cases}$$

este $D = -5 \neq 0$, deci dreapta $(D_1)$ şi planul $(P_1): \; x + y - 4z - 1 = 0$ au un unic punct comun $M$. Prin calcul se află coordonatele acestui punct $x_M = 2$, $y_M = 3$, $z_M = 1$. Punând condiţia ca $M$ să aparţină planului $(P_2): \; ax + y + z - 6 = 0$ se obţine că $a = 1$.

**41** *Să se determine care dintre următoarele perechi de plane sunt alcătuite din plane paralele*:

a) $(P_1): \; x - y + 2z + 5 = 0$ *şi* $(P_2): \; x + 2y - z + 3 = 0$;

b) $(P_1): \; x + 3y + z - 1 = 0$ *şi* $(P_2): \; 2x + 6y + 2z + 1 = 0$;

c) $(P_1): \; x + 4y + z - 1 = 0$ *şi* $(P_2): \; 3x + 2y + 6z + 5 = 0$.

**Soluţie**

a) $\vec{N}_1 = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$, $\vec{N}_2 = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$; $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 \neq \vec{0}$, deci $(P_1)$ şi $(P_2)$ nu sunt paralele.

b) $\vec{N}_1 = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{N}_2 = 2\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} + 2\vec{k}$; $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \vec{0}$, deci $(P_1)$ şi $(P_2)$ sunt paralele.

c) $\vec{N}_1 = \vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{N}_2 = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 6\vec{k}$; $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 \neq \vec{0}$, deci $(P_1)$ şi $(P_2)$ nu sunt paralele.

**42** *Să se determine valorile parametrilor reali* $a$ *şi* $b$ *pentru care următoarele perechi de plane sunt alcătuite din plane paralele*:

a) $(P_1): \; 2x - ay + bz - 1 = 0$ *şi* $(P_2): \; x - 2y + 3z + 4 = 0$;

b) $(P_1): \; ax + 2y + bz + 2 = 0$ *şi* $(P_2): \; 2x + ay + 3z + 3 = 0$;

c) $(P_1): \; 3x - ay - bz + 1 = 0$ *şi* $(P_2): \; ax + by + z - 1 = 0$.

**Soluţie**

a) $\vec{N}_1 = 2\vec{\imath} - a\vec{\jmath} + b\vec{k}$, $\vec{N}_2 = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$; $\vec{N}_1$ este paralel cu $\vec{N}_2$ dacă şi numai dacă $a = 4$ şi $b = 6$.

b) $\vec{N}_1 = a\vec{\imath} + \vec{\jmath} + b\vec{k}$, $\vec{N}_2 = 2\vec{\imath} + a\vec{\jmath} + 3\vec{k}$; $\vec{N}_1$ este paralel cu $\vec{N}_2$ dacă şi numai dacă $a = -\sqrt{2}$ şi $b = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ sau $a = -\sqrt{2}$ şi $b = \dfrac{-3\sqrt{2}}{2}$.

c) $\vec{N}_1 = 3\vec{\imath} - a\vec{\jmath} - b\vec{k}$, $\vec{N}_2 = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + \vec{k}$; $\vec{N}_1$ este paralel cu $\vec{N}_2$ dacă şi numai dacă $a = \sqrt[3]{9}$ şi $b = \sqrt[3]{3}$.

**43** *Să se determine care dintre următoarele perechi de plane sunt alcătuite din plane perpendiculare*:

a) $(P_1): \; x - 2y + z - 5 = 0$ *şi* $(P_2): \; x + y + 3z - 4 = 0$;

b) $(P_1): \; 2x + y + 3z - 1 = 0$ *şi* $(P_2): \; x + y - z + 2 = 0$;

c) $(P_1): \; 3x - y + z - 2 = 0$ *şi* $(P_2): \; x + y - 2z + 1 = 0$.

**Soluţie**

a) $\vec{N}_1 = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{N}_2 = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k}$; $\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 \neq 0$, deci $(P_1)$ şi $(P_2)$ nu sunt perpendiculare.

b) $\vec{N}_1 = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k}$, $\vec{N}_2 = \vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$; $\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0$, deci $(P_1)$ şi $(P_2)$ sunt perpendiculare.

c) $\vec{N}_1 = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{N}_2 = \vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}$. $\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 \neq 0$, deci $(P_1)$ şi $(P_2)$ sunt perpendiculare.

**44** *Să se determine ecuaţia planului $(P)$ paralel cu planul $(P_1): \ x - 3y + z - 1 = 0$ şi aflat la distanţa $d = 1$ de acesta.*

**Soluţie**

Fiind paralel cu planul $(P_1)$, $(P)$ are ecuaţia $x - 3y + z + a = 0$. $(P_1)$ conţine punctul $A(0, 0, 1)$ şi distanţa de la $A$ la $(P)$ este egală cu distanţa dintre plane. Se obţine

$$\frac{|1 + a|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2}} = 1, \text{ deci } a = -1 \pm \sqrt{11}.$$

Există două plane cu proprietăţile cerute, anume

$$(P') : \ x - 3y + z - 1 + \sqrt{11} = 0; \ (P'') : \ x - 3y + z - 1 - \sqrt{11} = 0.$$

**45** *Să se determine distanţa $d$ dintre planele*

$$(P_1) : \ 2x - y + 2z + 3 = 0; \ (P_2) : \ 2x - y + 2z + 6 = 0.$$

**Soluţie**

Fie $\vec{N}_1 = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$, $\vec{N}_2 = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2k$ vectorii directori ai normalelor la planele $(P_1)$ şi respectiv $(P_2)$. $\vec{N}_1$ şi $\vec{N}_2$ sunt paraleli, deci planele $(P_1)$ şi $(P_2)$ sunt paralele. Pentru a calcula distanţa între plane este deci suficient să calculăm distanţa de la un punct $A$ al primului plan la cel de-al doilea. Se consideră $A(0, 3, 0)$ aparţinând lui $(P_1)$ şi se obţine

$$d = \frac{|2 \cdot 0 - 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 1.$$

**46** *Să se calculeze unghiurile formate de următoarele perechi de plane:*

a) $(P_1) : \ 2x - y + 3z - 1 = 0$ *şi* $(P_2) : \ 3x + y + 2z - 2 = 0$;

b) $(P_1) : \ 3x + 2y + 5z - 1 = 0$ *şi* $(P_2) : \ 3x - 2y - z + 3 = 0$;

c) $(P_1) : \ x + 2y + z - 1 = 0$ *şi* $(P_2) : \ 2x + 4y + 2z - 1 = 0$.

**Soluţie**

a) Vectorii directori ai normalelor la planele $(P_1)$, respectiv $(P_2)$ sunt $\vec{N}_1 = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}$, $\vec{N}_2 = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}$. Unghiul $\theta$ dintre plane este egal cu unghiul vectorilor $\vec{N}_1$ şi $\vec{N}_2$, deci

$$\cos\theta = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|} = \frac{11}{14};\ \theta = \arccos\frac{11}{14}.$$

b) $\vec{N}_1 = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 5\vec{k}$, $\vec{N}_2 = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - \vec{k}$; $(\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2) = 0$, deci $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ sunt perpendiculari şi planele $(P_1)$, $(P_2)$ sunt, de asemenea, perpendiculare. Atunci $\theta = \frac{\pi}{2}\cdot$

c) $\vec{N}_1 = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{N}_2 = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 2\vec{k}$; $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ sunt paraleli, deci şi planele $(P_1)$, $(P_2)$ sunt paralele. Prin urmare, $\theta = 0$.

**47** *Să se scrie ecuaţia cercului* $(C)$ *determinat prin*:

a) *Centrul* $C(-2,1)$ *şi un punct al său* $A(1,3)$;

b) *Extremităţile unui diametru* $A(-2,3)$, $B(0,1)$;

c) *Punctele* $A(1,1)$, $B(-1,0)$, $C(0,-1)$;

d) *Centrul* $C(1,2)$, *tangenta la cerc* $(D):\ x+y+1=0$.

**Soluţie**

a) Raza cercului este $CA = \sqrt{13}$, deci

$$(C):\ (x+2)^2 + (y-1)^2 = 13.$$

b) Centrul cercului este mijlocul segmentului $AB$, adică $C(-1,2)$. Raza cercului este $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ şi atunci

$$(C):\ (x+1)^2 + (y-2)^2 = 2.$$

c) Ecuaţia cercului determinat de trei puncte $(x_i, y_i)$, $i = \overline{1,3}$ este dată de

$$(C):\ \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_1^3+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Prin înlocuire şi dezvoltarea determinantului obţinut, găsim ecuaţia cercului prin punctele $A$, $B$, $C$:

$$(C):\ 3x^2 + 3y^2 - x - y - 4 = 0.$$

d) Raza cercului este egală cu distanţa de la centrul său la tangenta $(D)$:

$$d(C,(D)) = \frac{|1+2+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Ecuaţia cercului căutat este

$$(C):\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 8.$$

**48** *Să se scrie ecuaţia cercului $(C)$ de centru $C(4,3)$, tangent cercului $(C'):\ x^2+y^2-2x+2y-2=0$.*

**Soluţie**

Cercul $(C)$ are centrul $C'(1,-1)$ şi raza $R'=2$. Distanţa centrelor va fi $CC'=5$ şi cum $C \in \mathrm{Ext}\,(C')$, cele două cercuri vor fi tangente obligatoriu exterior. Atunci raza cercului $(C)$ este $R = CC' - R' = 3$, deci ecuaţia lui $(C)$ va fi

$$(C):\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = 9.$$

**49** *Se dă cercul $(C):\ x^2+y^2+2x-2y-2=0$. Să se scrie ecuaţiile tangentelor la cerc care:*

a) *trec prin punctul $A(0, 1+\sqrt{3})$;*

b) *trec prin punctul $B(3,5)$;*

c) *sunt paralele cu dreapta $(D):\ 3x-y+1=0$.*

**Soluţie**

a) Verificăm poziţia punctului $A$ faţă de $(C)$:

$$0^2 + (1+\sqrt{3})^2 + 2\cdot 0 - 2(1+\sqrt{3}) - 2 = 0,$$

deci $A \in (C)$. În acest caz, ecuaţia tangentei în $A$ la cerc se obţine prin dedublare:

$$x\cdot x_A + y\cdot y_A + 2\cdot\frac{x+x_A}{2} - 2\cdot\frac{y+y_A}{2} - 2 = 0,\ \textit{i.e.}\ x + y\sqrt{3} - 3 - \sqrt{3} = 0.$$

b) Verificăm poziţia punctului $B$ faţă de $(C)$:

$$3^2 + 5^2 + 2\cdot 3 - 2\cdot 5 - 2 > 0,$$

deci $B \in \text{Ext}\,(C)$. Rezultă că din $B$ putem duce două tangente la cercul $(C)$. Determinăm punctul de tangenţă $M(x_0, y_0)$. Ecuaţia tangentei în acest punct la $(C)$ se obţine prin dedublare, sub forma

$$xx_0 + yy_0 + (x + x_0) - (y + y_0) - 2 = 0.$$

Cum $B(3, 5)$ aparţine tangentei, obţinem că $4x_0 + 4y_0 - 4 = 0$. deoarece $M(x_0, y_0)$ aparţine cercului $(C)$, urmează că $x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 - 2y_0 - 2 = 0$. Se obţine că $(x_0, y_0) \in \left\{ (\frac{-1-\sqrt{7}}{2}, \frac{3+\sqrt{7}}{2}), (\frac{-1+\sqrt{7}}{2}, \frac{3-\sqrt{7}}{2}) \right\}$, de unde se deduc ecuaţiile tangentelor căutate.

c) Ecuaţia tangentei respective este $3x - y + a = 0$. Din condiţia de tangenţă, $\frac{|-4+a|}{\sqrt{10}} = 2$, deci $a = 4 \pm 2\sqrt{10}$.

**50** *Se dau cercurile*

$$(C_1): \; x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0, \; (C_2): \; x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0.$$

*Să se arate că cercurile sunt tangente şi să se scrie ecuaţia tangentei comune interioare.*

**Soluţie**

Centrele celor două cercuri sunt $C_1(-1, -1)$, respectiv $C_2(3, 2)$, iar razele lor sunt $R_1 = 2$, $R_2 = 3$. Distanţa centrelor este $C_1C_2 = 5$ şi deoarece $C_1C_2 = R_1 + R_2$, cercurile sunt tangente exterior.

Tangenta comună interioară este perpendiculară pe linia centrelor în punctul de contact a cercurilor. Pentru a afla acest punct, fie intersectăm cele două cercuri, fie aflăm punctul de pe segmentul $[C_1C_2]$ aflat la distanţa 2 de $C_1$.

Mai direct, tangenta comună interioară a două cercuri tangente este tocmai axa radicală a acestora, adică $(D): \; 4x + 3y - 3 = 0$.

**51** *Să se determine centrul şi raza pentru următoarele sfere*:

1) $(S_1): \; (x+3)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 9$;

2) $(S_2): \; x^2 + (y-6)^2 + (z+3)^2 = 1$;

3) $(S_3): \; x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 4y + 4 = 0$;

4) $(S_4): \; x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 6z - 14 = 0$.

**Soluţie**

1) Centrul sferei $(S_1)$ este $C(-3, -4, 2)$, iar raza ei este 3.

2) Centrul sferei $(S_2)$ este $C(0, 6, -3)$, iar raza ei este 1.

3) Ecuaţia sferei $(S_3)$ se mai poate scrie sub forma $(S_3): \ (x-6)^2+(y-2)^2+z^2 = 36$, deci centrul sferei $(S_3)$ este $C(6, 2, 0)$, iar raza ei este 6.

4) Ecuaţia sferei $(S_4)$ se mai poate scrie sub forma $(S_4): \ (x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2 = = 25$, deci centrul sferei $(S_4)$ este $C(1, -1, 3)$, iar raza ei este 5.

**52** *Să se determine ecuaţia sferei $(S)$ ştiind că segmentul determinat de punctele $A(1, 1, 2)$ şi $B(5, 3, 6)$ este un diametru al ei.*

**Soluţie**

Centrul $C$ al sferei este mijlocul segmentului $[AB]$, deci $x_C = 3$, $y_C = 2$, $z_C = 4$. În plus, cum $AB$ este diametru, avem că $R = \dfrac{AB}{2} = 3$. Ecuaţia sferei este $(S): \ (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 9$.

**53** *Să se scrie ecuaţia sferei care trece prin punctele $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 1, 1)$ şi $D(2, 1, 2)$.*

**Soluţie**

Ecuaţia sferei căutate este dată de formula

$$(S): \begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_A^2+y_A^2+z_A^2 & x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B^2+y_B^2+z_B^2 & x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C^2+y_C^2+z_C^2 & x_C & y_C & z_C & 1 \\ x_D^2+y_D^2+z_D^2 & x_D & y_D & z_D & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

**54** a) *Să se determine ecuaţia sferei cu centrul în $C(1, 2, 1)$, tangentă la planul $(P): 2x + y + 2z - 3 = 0$.*

b) *Să se determine ecuaţia sferei de rază $R = 2$, tangentă planului $(P): \ x + y + +z + 1 = 0$ în punctul $A(1, -2, 0)$.*

**Soluţie**

a) Distanţa de la punctul $C$ la planul $(P)$ este

$$d = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = 1.$$

Fiind tangentă la $(P)$ şi având centrul în $O$, sfera căutată are raza egală cu $d$. Ecuaţia sa va fi atunci $(S): \ (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 1$.

b) Centrul sferei se află pe dreapta normală la $(P)$ care trece prin $A$. Normala la plan este $\vec{N} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, deci dreapta prin $A$ de direcţie $\vec{N}$ este

$$(D): \ \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}.$$

Fie $C$ centrul sferei dorite; cum $C \in (D)$, obţinem $x_C = z_C + 1$, $y_C = z_C - 2$. Atunci

$$CA = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2} = |z_C| \cdot \sqrt{3}.$$

Dar $CA = R$, deci $z_C = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot$ În fiecare caz, găsim uşor centrul sferei, apoi ecuaţia acesteia. Problema are două soluţii

**55** *Să se determine ecuaţia sferei* $(S)$ *cu centrul* $C(-1,-2,-1)$ *astfel încât*

1) $(S)$ *tangentă interior la sfera* $(S_1): \ x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y + 10z + 41 = 0$;

2) $(S)$ *tangentă exterior la sfera* $(S_2): \ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$.

**Soluţie**

1) Sfera $(S_1)$ are centrul $O_1(3,-4,-5)$ şi raza $R_1 = 3$. Condiţia ca $(S)$ şi $(S_1)$ să fie tangente interior este ca $R = R_1 + O_1C$ (nu putem avea $R_1 = R + O_1C$ deoarece $O_1C = 6 > R_1$). Se deduce de aici că $R = 9$, deci ecuaţia sferei $(S)$ este $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 81$.

2) Sfera $(S_2)$ are centrul $O_2(1,2,3)$ şi raza $R_2 = 5$. Condiţia ca $(S)$ şi $(S_2)$ să fie tangente exterior este ca $R_2 + R = O_2C$. Dar $O_2C = 6$, deci $R = 1$ şi ecuaţia sferei $(S)$ este $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 1$.

**56** *Să se determine poziţiile următoarelor plane faţă de sfera* $(S) \ : \ (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9:$

1) $(P_1): \ 4x + 2y + 4z + 6 = 0$;

2) $(P_2): \ 8x + 4y + z + 2 = 0$;

3) $(P_3): \ x + y + z + 4 = 0$;

4) $(P_4): \ z = 5$.

**Soluţie**

Centrul sferei $(S)$ este $C(1,2,1)$, iar raza ei este $R = 3$. Planul $(P)$ este tangent sferei dacă $d(C,(P)) = R$, este secant dacă $d(C,(P)) < R$ şi este exterior dacă $d(C,(P)) > R$.

1) $d(C,(P_1)) = \dfrac{|4\cdot 1 + 2\cdot 2 + 4\cdot 1 + 6|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2}} = 3 = R$, deci $(P_1)$ este tangent la sferă.

2) $d(C,(P_2)) = \dfrac{|8\cdot 1 + 4\cdot 2 + 1 + 2|}{\sqrt{8^2+4^2+1^2}} = \dfrac{19}{9} < 3$, deci $(P_2)$ este secant sferei $(S)$.

3) $d(C,(P_3)) = \dfrac{|1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 1 + 4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \dfrac{8}{\sqrt{3}} > 3$, deci $(P_3)$ este exterior sferei $(S)$.

4) $d(C,(P_4)) = \dfrac{|1-5|}{1} = 4 > 3$, deci $(P_4)$ este exterior sferei $(S)$.

**57** *Să se determine ecuaţia planului* $(P)$ *tangent la sfera* $(S): \ (x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2 = 21$ *în punctul* $M(3,5,5)$.

**Soluţie**

Observăm întâi că $M$ este un punct al sferei date. Atunci ecuaţia planului $(P)$ se obţine prin dedublare şi este $(P): \ (x-2)(3-2)+(y-1)(5-1)+(z-3)(5-3)-21=0$, adică $(P): \ x+4y+2z-33=0$.

**58** *Scrieţi ecuaţia unei elipse raportată la axele sale de simetrie ştiind că:*

1) *Focarele sunt* $F(4,0)$, $F'(-4,0)$, *iar semiaxa mare este* $a=5$;

2) *Conţine punctele* $M(3,4)$, $N(6,2)$.

**Soluţie**

1) Fie $(E): \ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ecuaţia elipsei. Focarele sunt $F(c,0)$, $F'(-c,0)$, cu $c^2=a^2-b^2$. În cazul nostru $a=5$, $c=4$, deci $b=3$ şi $(E): \ \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

2) Fie $(E): \ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ecuaţia elipsei. Înlocuind $x$ şi $y$ cu coordonatele punctelor $M$ şi $N$ obţinem sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{9}{a^2}+\dfrac{16}{b^2}=1 \\ \\ \dfrac{36}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9u+16v=1 \\ \\ 36u+4v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\dfrac{1}{45} \\ \\ v=\dfrac{1}{20}, \end{cases}$$

unde $u=\dfrac{1}{a^2}$, $v=\dfrac{1}{b^2}$. Prin urmare, $(E): \ \dfrac{x^2}{45}+\dfrac{y^2}{20}=1$.

**59** *Fie* $(E): \ x^2+4y^2=4$ *o elipsă şi fie punctele* $M\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $N(2,2)$.

a) *Verificaţi că* $M\in(E)$; *scrieţi ecuaţia tangentei la elipsă prin* $M$.

b) *Scrieţi ecuaţiile tangentelor la elipsă duse prin* $N$.

**Soluţie**

a) Deoarece $1^2 + 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 4$, urmează că $M \in (E)$. Ecuaţia tangentei în $M$ la $(E)$ se obţine prin dedublare:

$$(D):\ xx_M + 4yy_M = 4,\ i.e.\ (D):\ x + 2\sqrt{3}y - 4 = 0.$$

b) Deoarece $2^2 + 4\cdot 2^2 > 4$, urmează că $N$ este un punct exterior elipsei. Determinăm punctul de tangenţă $T(x_0, y_0)$. Ecuaţia tangentei în acest punct la $(E)$ este $xx_0 + yy_0 = 4$. Cum $N(2,2)$ aparţine tangentei, obţinem că $2x_0 + 8y_0 = 4$. Deoarece $T$ aparţine elipsei $(E)$, urmează că $x_0^2 + 4y_0^2 = 4$. Obţinem că $(x_0, y_0) \in \left\{(2,0), (-\dfrac{3}{10}, \dfrac{4}{5})\right\}$, de unde se obţin tangentele $(D): 3x - 2y + 10 = 0$, $(D)': x = 2$.

**60** *Să se scrie ecuaţia parabolei raportată la axele sale de simetrie, fixată prin:*

1) *focarul* $F(3,0)$;

2) *directoarea* $(D):\ x = -2$;

3) *trece prin punctul* $A(2,4)$.

**Soluţie**

Ecuaţia unei parabole raportată la axele sale de simetrie este $y^2 = 2px$, având focarul $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$ şi directoarea de ecuaţie $(D):\ x = -\dfrac{p}{2}$. În aceste condiţii, avem:

1) $\dfrac{p}{2} = 3 \Rightarrow p = 6 \Rightarrow (P):\ y^2 = 12x$;

2) $-\dfrac{p}{2} = -2 \Rightarrow p = 4 \Rightarrow (P):\ y^2 = 8x$;

3) $4^2 = 2p\cdot 2 \Rightarrow p = 4 \Rightarrow (P):\ y^2 = 8x$.