Concursul de matematică Al. Climescu

– 13 decembrie 2008 –

I. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dacă $AB = 2A + 3B$ atunci să se arate că:

a). $\operatorname{rang}(A - 3I_n) = \operatorname{rang}(B - 2I_n) = n$

b). $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$

II. Șirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt definite astfel $x_0 = a \in \mathbb{R}$, $y_0 = b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ iar, pentru $n \geq 1$:

$$x_n = \frac{2x_{n-1} + 3y_{n-1}}{5}, \quad y_n = \frac{4x_{n-1} + y_{n-1}}{5}.$$

Știind că seriile $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ sunt convergente să se determine raportul sumelor lor.

III. În interiorul pătratului de latură 1 construim cercuri având suma circumferințelor egală cu dublul perimetrului pătratului.

Să se arate că există o infinitate de drepte care să taie cel puțin trei cercuri.

IV. Se dă funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Să se arate că f este monotonă dacă și numai dacă, pentru orice interval $I \subseteq \mathbb{R}$, $f^{-1}(I)$ este interval.

Notă: $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in A\}$.