Concurs "Al. Climescu" (2012)

Matematici speciale.

I. Se consideră ecuația diferențială cvasiliniară de ordinul I:

$$x(y^2+z)\cdot\frac{\partial z}{\partial x} - y(x^2+z)\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2-y^2)\cdot z$$

a) Să se determine soluția generală a ecuației;

b) Să se determine suprafața integrală care trece prin curba $(\Gamma)\ \begin{cases} x+y=0 \\ z=1. \end{cases}$

II. Se dă câmpul vectorial:

$$\vec{v} = (x^2\cdot \operatorname{div}\vec{r})\vec{i} + 3\operatorname{rot}[(y+z)\vec{i} + x\vec{j}] + \operatorname{grad} z^3,$$ unde

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Să se determine liniile de câmp și suprafața de câmp care trece prin curba $(\Gamma)\ \begin{cases} x=1 \\ yz=1 \end{cases}$

III. Să se determine funcția complexă olomorfă $f(z) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$, $z = x+iy$ dacă:
$v(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$ și $f(0)=0$.

IV. Să se rezolve sistemul de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} x' = 8y \\ y' = -2z \\ z' = 2x+8y-2z \end{cases}$$

, unde $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ și $x(0)=-4$, $y(0)=0$, $z(0)=1$.