DREAPTA ÎN SPAŢIU. BREVIAR TEORETIC

Fie (d) o dreaptă dată. Un vector nenul $\vec{v}$ pentru care dreapta suport a unui reprezentant al său este paralelă cu dreapta (d) se numeşte vector director al dreptei (d). Dacă în plus $\|\vec{v}\| = 1$, atunci $\vec{v}$ se numeşte versor director al dreptei (d). Componentele unui vector director se numesc parametri directori ai dreptei (a nu se confunda cu parametrul t ce apare în ecuaţiile parametrice ale dreptei). Componentele unui versor director se numesc cosinuşi directori ai dreptei (d) şi reprezintă cosinusurile unghiurilor α, β, γ formate de versorul respectiv cu vectorii directori ai axelor de coordonate. O dreaptă (d) are două seturi de cosinuşi directori, separate prin semne, corespunzătoare celor două posibilităţi de alegere a vectorului director.

Dreapta determinată de un punct dat şi de un vector director dat

Ecuaţia vectorială a dreptei determinate de $M_0(\vec{r}_0)$ şi vectorul director $\vec{v}$ este

$$(d) : (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v} = \vec{0},$$

unde $\vec{r}_0$ este vectorul de poziţie al punctului M_0, respectiv $\vec{r}$ este vectorul de poziţie al unui punct curent de pe dreaptă.

Ecuaţii parametrice ale dreptei

O ecuaţie echivalentă cu ecuaţia vectorială este ecuaţia parametrică vectorială a dreptei, sub forma

$$(d) : \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v},\ t \in \mathbb{R}.$$

Dacă $\vec{v} = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k}$, ecuaţia parametrică vectorială se poate proiecta pe coordonate sub forma ecuaţiilor parametrice scalare

$$(d) : \begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \\ z = z_0 + tv_3 \end{cases},\ t \in \mathbb{R},$$

sau, echivalent, sub forma

$$(d) : \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}.$$

Dreapta determinată de două puncte distincte

Ecuațiile canonice ale dreptei (d) determinate de două puncte distincte $A(x_A, y_A, z_A)$ şi $B(x_B, y_B, z_B)$ sunt

$$(d) : \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}.$$

Dreapta ca intersecţie a două plane

Dreapta (d) de intersecţie a planelor distincte neparalele $(P_1) : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ şi $(P_2) : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ se reprezintă sub forma

$$(d) : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Un vector director al acestei drepte este $\vec{v} = \vec{v_1} \times \vec{v_2}$, unde $\vec{v_1} = A_1\vec{\imath} + B_1\vec{\jmath} + C_1\vec{k}$, $\vec{v_2} = A_2\vec{\imath} + B_2\vec{\jmath} + C_2\vec{k}$ sunt vectori normali la (P_1), respectiv (P_2).

Poziţii relative a două drepte

Fie dreptele

$$(d_1) : \frac{x - x_1}{u_1} = \frac{y - y_1}{u_2} = \frac{z - z_1}{u_3},$$
$$(d_2) : \frac{x - x_2}{v_1} = \frac{y - y_2}{v_2} = \frac{z - z_2}{v_3}.$$

Atunci (d_1) trece prin $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi are ca vector director $\vec{u} = u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath} + u_3\vec{k}$, în timp ce (d_2) trece prin $M_2(x_2, y_2, z_2)$ şi are ca vector director $\vec{v} = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k}$.

Paralelism sau coincidență

Dreptele (d_1), (d_2) sunt paralele sau coincid dacă şi numai dacă vectorii lor directori $\vec{u}$, $\vec{v}$ sunt paraleli, adică

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}.$$

Distincţia între paralelism şi coincidenţă se face verificând dacă un punct oarecare al uneia dintre drepte se află şi pe dreapta cealaltă (de exemplu, dacă $M_1(x_1, y_1, z_1)$ aparţine lui (d_2)).

Perpendicularitate

Dreptele (d_1), (d_2) sunt perpendiculare dacă şi numai dacă $\vec{u}$, $\vec{v}$ sunt perpendiculari, adică

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0.$$

Coplanaritate

Dreptele (d_1), (d_2) sunt coplanare dacă şi numai dacă $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ sunt coplanari, adică

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Unghiul a două drepte

Fie dreptele

$$(d_1) : \frac{x - x_1}{u_1} = \frac{y - y_1}{u_2} = \frac{z - z_1}{u_3},$$
$$(d_2) : \frac{x - x_2}{v_1} = \frac{y - y_2}{v_2} = \frac{z - z_2}{v_3}.$$

Atunci unghiul α dintre drepte este egal cu unghiul β format de către vectorii directori $\vec{u} = u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath} + u_3\vec{k}$ şi $\vec{v} = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k}$, sau cu suplementul acestuia, în situaţia în care unghiul vectorilor este obtuz, iar valoarea lui β se determină cu ajutorul formulei

$$\cos\beta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}.$$

Distanţa de la un punct la o dreaptă

Fie dreapta

$$(d_1) : \frac{x - x_1}{u_1} = \frac{y - y_1}{u_2} = \frac{z - z_1}{u_3}$$

şi punctul $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Atunci dreapta (d_1) trece prin $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi are ca vector director $\vec{u} = u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath} + u_3\vec{k}$.

Distanţa $d(M_2, (d_1))$ de la M_2 la dreapta (d_1) reprezintă lungimea înălţimii paralelogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{M_1M_2}$ şi $\vec{u}$ corespunzătoare bazei formate de vectorul $\vec{u}$ şi se calculează cu ajutorul formulei

$$d(M_2, (d_1)) = \frac{\|\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

Distanţa dintre două drepte

Fie dreptele

$$(d_1) : \frac{x - x_1}{u_1} = \frac{y - y_1}{u_2} = \frac{z - z_1}{u_3},$$
$$(d_2) : \frac{x - x_2}{v_1} = \frac{y - y_2}{v_2} = \frac{z - z_2}{v_3}.$$

Atunci (d_1) trece prin $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi are ca vector director $\vec{u} = u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath} + u_3\vec{k}$, în timp ce (d_2) trece prin $M_2(x_2, y_2, z_2)$ şi are ca vector director $\vec{v} = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k}$.
Distanţa dintre dreptele (d_1) şi (d_2) reprezintă lungimea înălţimii paralelipipedului construit pe vectorii $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ corespunzătoare bazei formate de vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ şi se calculează cu ajutorul formulei

$$d((d_1),(d_2)) = \frac{|(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{u}, \vec{v})|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}.$$

Cosinuşi directori ai unei drepte

Fie dreapta

$$(d) : \frac{x - x_1}{u_1} = \frac{y - y_1}{u_2} = \frac{z - z_1}{u_3}.$$

Atunci dreapta (d) are ca vector director $\vec{u} = u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath} + u_3\vec{k}$, un versor director fiind

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}\vec{\imath} + \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}\vec{\jmath} + \frac{u_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}\vec{k},$$

cel de-al doilea fiind $-\vec{v}$. Atunci

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}, \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}, \frac{u_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}} \right)$$

respectiv

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(-\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}, -\frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}, -\frac{u_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}} \right).$$