CONCURSUL NATIONAL DE MATEMATICA
Traian Lalescu
Iaşi, 14-16 mai 2010
Profil Matematică teoretică

I. Fie $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea

$$f(aX + bY) = af(X) + bf(Y)$$

pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ şi orice $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Să se arate că există o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca

$$f(X) = Tr(AX), \text{pentru orice } X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

b) Să se arate că există o matrice inversabilă $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca $f(B) = 0$.

Solutie. a) Notam E_{ij}matricea care are 1 pe pozitia (i, j) si 0 in rest (2 pt). Daca $X = (x_{ij})$ atunci $X = \sum_{i,j=1}^n x_{ij}E_{ij}$ si $f(X) = \sum_{i,j=1}^n x_{ij}f(E_{ij})$. Daca $A = (a_{ij})$ si $AX = C$ atunci $c_{jj} = \sum_{i,j=1}^n a_{ji}x_{ij}$ si $Tr(AX) = \sum_{i,j=1}^n a_{ji}x_{ij}$. Notam $f(E_{ij}) = a_{ij}$ si atunci matricea $A = (a_{ij})$ verifica relatia $f(X) = Tr(AX), X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. (2 pt)

b) Daca $f(E_{ij}) = 0$ pentru orice i, j atunci $f = 0$ si nu avem ce demonstra.Daca $i \neq j$ si $f(E_{ij}) \neq 0$ atunci consideram matricea $B_\alpha = I_n - \alpha E_{ij}$ care este inversabila pentru orice α. Daca luam $\alpha = \frac{f(I_n)}{a_{ji}}$ atunci $f(B_\alpha) = 0$. (3 pt)

Daca $f(E_{ij}) = 0$ pentru orice $i \neq j$ atunci alegerea $B = (b_{ij})$ cu $b_{i,i+1} = 1$, $b_{n1} = 1$ si $b_{ij} = 0$ in rest, convine. (2 pt)

1 punct din oficiu.

II. Găsiţi locul geometric descris de centrul unei elipse, care este tangentă la două drepte perpendiculare date.

Soluţie. Vom schimba punctul de vedere si anume vom considera elipsa fixa si reperul variabil. Astfel, vom arata ca locul geometric al punctelor din care se duc tangente perpendiculare la elipsa este un cerc. (4 pt)

In adevar, fie elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Fie doua tangente perpendiculare prin punctul (x_0, y_0):

$$\begin{cases} y &= y_0 + m_1(x - x_0) \\ y &= y_0 + m_2(x - x_0) \end{cases}$$

iar $m_1.m_2 = -1$. Punem conditia sa fie tangente, deci sistemul:

$$\begin{cases} b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\ y = y_0 + m(x - x_0) \end{cases}$$

admite solutie unica. Echivalent, ecuatia

$$b^2x^2 + a^2(y_0 + m(x - x_0))^2 = a^2b^2$$

are solutie unica. Aceasta revine la

$$a^4m^2(y_0 - mx_0)^2 - a^2((y_0 - mx_0)^2 - b^2)(b^2 + m^2a^2) = 0$$

Astfel, m_1 si m_2 sunt solutiile ecuatiei:

$$(a^2 - x_0^2)m^2 + 2x_0y_0m + b^2 - y_0^2 = 0$$

Scriind conditia de ortogonalitate, obtinem:

$$-1 = \frac{b^2 - y_0^2}{a^2 - x_0^2}$$

ceea ce se scrie:

$$x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2$$

(3 pt)

Concluzia este ca locul cerut este arcul de cerc $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, situat in primul cadran, intre punctele (a, b) si (b, a). (2 pt)

1 punct din oficiu

III. a) Să se justifice faptul că

$$f(x) := \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n}\right)$$

defineşte o funcţie continuă $f : (0,1) \to \mathbb{R}$.

b) Dacă funcţia continuă $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ verifică

$$F\left(\frac{x}{2}\right) + F\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2F(x)$$

$\forall x \in [0,1]$, atunci F este constantă.

c) Să se demonstreze egalitatea:

$$\pi cotg \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n}\right)$$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Soluţie . a) Seria este uniform convergentă, deoarece

$$\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} = \frac{2x}{x^2 - n^2}$$

(2 pt)

b) Mulţimea punctelor în care $|F|$ îşi atinge maximul absolut este nevidă, iar odata cu x_0 conţine şi $\frac{x_0}{2}$ şi $\frac{x_0+1}{2}$. (2 pt) Astfel, este vorba de o mulţime densa în $[0,1]$. Din continuitate, $|F|$ rezultă constantă. Rezultă imediat că F este constantă. (2 pt)

c) Avem

$$f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)=\frac{2}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\frac{x}{2}-n}+\frac{1}{\frac{x}{2}+n}\right]+\frac{2}{x+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\frac{x+1}{2}-n}+\frac{1}{\frac{x+1}{2}+n}\right]=$$

$$=2\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{x-2n}+\frac{1}{x+2n}\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{x-(2n-1)}+\frac{1}{x+(2n+1)}\right]\right]=2f(x)$$

Un calcul simplu arată că şi funcţia $g(x):=\pi cotg\pi x$ verifică o relaţie similară. (1 pt)

Acum $F(x):=f(x)-g(x)$ se extinde prin continuitate la $[0,1]$, deci pe baza punctului precedent, este constantă. Deoarece $f(\frac{1}{2})=g(\frac{1}{2})=0$ deducem egalitatea pe $(0,1)$ iar prin periodicitate, se extinde la $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. (2 pt)

1 punct din oficiu

IV. Fie $f_n \in C[0,1]$ $(n\geq 1)$ un şir de funcţii concave. Presupunem că (f_n) converge simplu la 0. Să se arate că şirul (f_n) este uniform convergent pe $[0,1]$.

Soluţie $\forall\varepsilon>0\exists n_\varepsilon : |f_n(t)|<\frac{\varepsilon}{4}, n\geq n_\varepsilon, t\in\{0,\frac{1}{2},1\}$.(1 pt). Scriind ca f_n este concava, obtinem $f_n(x)\geq \min\{f_n(0),f_n(1)\}\geq -\frac{\varepsilon}{4}$. (3 pt) Pentru $a\in(0,\frac{1}{2})$ alegem $\lambda=\frac{\frac{1}{2}-a}{1-a}\in(0,1)$. Din concavitate: $f_n(\frac{1}{2})\geq(1-\lambda)\ f_n(a)+\lambda\ f_n(1)$ (3 pt) astfel ca $-\frac{\varepsilon}{4}\leq f_n(a)\leq\varepsilon, \forall n\geq n_\varepsilon, a\in(0,\frac{1}{2})$. Analog $-\varepsilon\leq f_n(a)\leq\frac{\varepsilon}{4}$ pentru $a\in(\frac{1}{2},1)$. (2 pt)

1 punct din oficiu