Concursul studenţesc de matematică "TRAIAN LALESCU"
Profil neelectric – etapa locală
- 22 februarie 2014 -

Problema 1. a) Să se studieze convergenţa şirurilor $(a_n)_{n\geq 0}$ şi $(b_n)_{n\geq 0}$ date prin

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} \\ b_n = a_n + \dfrac{a_{n-1}-b_{n-1}}{4} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

cu $a_0 = a$ şi $b_0 = b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Dacă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ sunt serii convergente, să se determine raportul sumelor celor două serii.

Problema 2. Se dă matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{N}^*).$$

a) Scriind matricea A sub forma $A = I_4 + B$, unde I_4 este matricea unitate de ordin patru, calculaţi B^2, B^3, $B^4, ..., B^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Demonstraţi că A^n este de forma

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n & c_n \\ 0 & 1 & a_n & b_n \\ 0 & 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

precizând a_n, b_n, c_n.

c) Demonstraţi că există o matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{N}^*)$ astfel încât toate elementele matricei A^n să fie pătrate perfecte.

Problema 3. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Notăm $A/B = \begin{pmatrix} a & b \\ z & t \end{pmatrix}$, $B/A = \begin{pmatrix} x & y \\ c & d \end{pmatrix}$.

a) Arătaţi că $\forall A, B \in M_2(\mathbb{C})$, $\det(A+B) = \det A + \det B + \det(A/B) + \det(B/A)$ şi deduceţi că $\det(A \pm I_2) = \det A + 1 \pm \mathrm{tr} A$, unde prin $\mathrm{tr}(A)$ înţelegem suma elementelor de pe diagonala principală a matricei A.

b) Arătaţi că $\forall A, B \in M_2(\mathbb{C})$, $\mathrm{tr}(AB) = (\mathrm{tr} A)(\mathrm{tr} B) - (\det(A/B) + (\det B/A))$ şi deduceţi că $\mathrm{tr}(A^2) = (\mathrm{tr} A)^2 - 2\det A$.

c) Fie $A \in M_2(\mathbb{R})$. Demonstraţi că $\det(A^2 - I_2) = 2\left[\det(A^2)+1\right] \iff \det A = 1$ şi $\mathrm{tr}\, A = 0$.

d) Fie $A \in M_2(\mathbb{C})$ şi notăm $x_n = \det(A^n + I_2)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $x_1 = x_2 = 1$, atunci $x_n \in \{1, 4\}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 4. O companie aeriană a impus ca pentru bagajul de mână suma dintre lungime, lăţime şi înălţime să nu depăşească un metru (forma bagajului este paralelipipedică). Ce dimensiuni ar trebui să aibă bagajul pentru a avea volumul maxim?