

I. Determinați valorile limitelor

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{\sqrt{n^8 + 3n + 1}} + \frac{n^3}{\sqrt{n^8 + 3n + 2}} + \dots + \frac{n^3}{\sqrt{n^8 + 5n}} \right)$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^3) - x^3}{3x^5}$.

II. Studiați convergența seriilor

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2n + 5}{n^5 + n + 2}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n + 2)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n + 2)}$.

III. (a) Demonstrați că ecuația $2(x+2)\sin(4x) = 1$ are cel puțin o rădăcină în intervalul $[0, \frac{\pi}{24}]$.

(b) Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(4 + \sin(x^4) + x^5)$. Calculați $f'(x)$.

(c) Demonstrați că $x \geq \sin x$, pentru orice $x \in [0, \infty)$.

(d) Determinați punctele de extrem local ale funcției

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 5,$$

natura acestora și valorile extreme asociate.

Punctaj: I:2.5p(1.5+1), II:2p(1+1), III:4.5p(1+0.75+1+1.75), 1p din oficiu,

TL: 1h 30min