AM2, Curs 4, 12.03.2020

Integrala nedefinită (continuare)

1 Integrale conţinând radicalul unei funcţii polinomiale de gradul 2

$$\int \sqrt{x^2+a^2}dx$$

Se poate calcula utilizând metoda de integrare prin părţi. În acest sens, să notăm

$$I = \int \sqrt{x^2+a^2}dx.$$

Observăm că

$$\begin{aligned} I &= \int x' \sqrt{x^2+a^2}dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int x(\sqrt{x^2+a^2})'dx \\ &= x\sqrt{x^2+a^2} - \int x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx \end{aligned}$$

Întrucât numărătorul, x^2, este asemănător cu expresia de la numitor, x^2+a^2, exploatăm această asemănare scriind numărătorul sub forma

$$x^2 = x^2 + a^2 - a^2.$$

Atunci

$$\begin{aligned} I &= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx \\ &= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}dx + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx \\ &= x\sqrt{x^2+a^2} - I + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + \mathcal{C} \end{aligned}$$

De aici,

$$\begin{aligned} 2I &= x\sqrt{x^2+a^2} + a^2 \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + \mathcal{C} \\ \implies I &= \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\right] + \mathcal{C} \end{aligned}$$

În mod asemănător se pot calcula şi integralele $\int \sqrt{x^2-a^2}dx$, $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$.

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx$$

După aducerea la forma canonică (formarea de pătrate perfecte), problema se reduce la calculul uneia din integralele de mai sus.

2 Integralele unor funcţii trigonometrice (I)

$$\int R(\sin x)\cos x dx, \quad \int R(\cos x)\sin x dx$$

Întrucât $(\sin x)' = \cos x$, iar $(\cos x)' = -\sin x$, integralele de mai sus au în fapt forma

$$\int R(\sin x)\cdot(\sin x)' dx, \quad \int R(\cos x)\cdot(-\cos x)' dx.$$

Se vor folosi schimbările de variabilă $u = \sin x$, respectiv $u = \cos x$.

Exemplu. Fie integrala

$$I = \int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx.$$

Atunci, deoarece

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x,$$

urmează că

$$I = \int \frac{2\sin x\cos x}{1+\sin^2 x} dx = 2\int \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\cos x dx.$$

Cu schimbarea de variabilă $u = \sin x$ obţinem

$$du = (\sin x)' dx = \cos x dx.$$

Asociem integrala

$$J = 2\int \frac{u}{1+u^2} du = \int \frac{2u}{1+u^2} du = \int \frac{(1+u^2)'}{1+u^2} du.$$

Cu schimbarea de variabilă $v = 1+u^2$ obţinem

$$dv = (1+u^2)' du = 2u du.$$

Asociem integrala

$$J' = \int \frac{1}{v} dv = \ln|v| + \mathcal{C}.$$

Atunci, prin înlocuirea lui v obţinem că

$$J = \ln\left|1+u^2\right| + \mathcal{C} = \ln\left(1+u^2\right) + \mathcal{C}.$$

Prin înlocuirea lui u obţinem că integrala iniţială are valoarea

$$I = \ln\left(1+\sin^2 x\right) + \mathcal{C}.$$

3 Integralele unor funcţii trigonometrice (II)

$$\int \sin^m \cos^n x dx, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Dacă măcar una dintre puterile m, n ale uneia din funcţii este impară, **cealaltă** funcţie se poate alege ca variabilă nouă.

Dacă ambele puteri sunt pare, se va trece la unghiul dublu prin folosirea formulelor

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}, \quad \sin(2x) = 2\sin x \cos x.$$

Exemplu. Fie integrala

$$I = \int \sin^5 \cos^3 x dx.$$

Deoarece $\sin x$ este ridicată la o putere impară, $\cos x$ poate fi aleasă ca variabilă nouă. Dintr-un motiv similar, şi $\sin x$ poate fi aleasă ca variabilă nouă. Pentru fixarea ideilor, vom folosi schimbarea de variabilă $u = \sin x$. Atunci

$$du = (\sin x)' dx = \cos x dx.$$

Folosind identitatea trigonometrică fundamentală, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, obţinem

$$I = \int \sin^5 x \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int \sin^5 x (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x dx.$$

Asociem integrala

$$J = \int u^5(1-u^2) du = \int (u^5 - u^7) du = \frac{u^6}{6} - \frac{u^8}{8} + \mathcal{C}.$$

Prin înlocuirea lui u obţinem că

$$I = \frac{(\sin x)^6}{6} - \frac{(\sin x)^8}{8} + \mathcal{C}.$$

4 Integralele unor funcţii trigonometrice (III)

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

Prin analogie cu cele de mai sus, dacă R este impară într-una din funcţiile $\sin x$, $\cos x$, adică

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

respectiv

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

cealaltă funcţie se alege ca schimbare de variabilă.

Dacă R este pară atât în $\sin x$ cât şi în $\cos x$, fie se trece la unghiul dublu, fie se alege ca schimbare de variabilă $u = \operatorname{tg} x$. Calculele sunt similare celor de mai sus.

5 Integralele unor funcţii trigonometrice (IV)

$$\int R(\operatorname{tg} x)dx, \quad \int R(\operatorname{tg} x)\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

Se foloseşte schimbarea de variabilă $u = \operatorname{tg} x$. Pot fi necesare şi formulele

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Exemplu. Fie integrala

$$I = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx.$$

Împărţind şi numărătorul şi numitorul primei fracţii cu $\cos x$, obţinem că

$$I = \int \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}+1}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}dx = \int \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 1}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx.$$

Deoarece $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, urmează că

$$I = \int \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 1}\cdot(\operatorname{tg} x)'dx.$$

Cu schimbarea de variabilă $u = \operatorname{tg} x$, obţinem

$$du = (\operatorname{tg} x)'dx = \frac{1}{\cos^2 x}dx.$$

Asociem integrala

$$J = \int \frac{u}{1+u}du = \int \frac{1+u-1}{1+u}du = \int\left(\frac{1+u}{1+u} - \frac{1}{1+u}\right)du = \int\left(1 - \frac{1}{1+u}\right)du$$
$$= u - \ln|1+u| + \mathcal{C}.$$

Înlocuind u, urmează că

$$I = \operatorname{tg} x - \ln|1 + \operatorname{tg} x| + \mathcal{C}.$$

6 Integrale binome

$$\int x^m(ax^n+b)^p dx, \quad m, n, p \in \mathbb{Q}, \quad a, b \neq 0$$

Întrucât m, n, p sunt numere raţionale, nu neapărat întregi, integrala de mai sus poate conţine radicali de diverse forme. Dacă

$$p \in \mathbb{Z} \quad \text{sau} \quad \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \quad \text{sau} \quad \frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z},$$

şi numai în aceste cazuri, calculul unei integrale de forma de mai sus poate fi redus la calculul integralei unei funcţii raţionale. Sunt posibile următoarele situaţii.

1. Dacă $p \in \mathbb{Z}$, atunci $x = t^q$, unde q este numitorul comun al lui m şi n. Altfel spus, $t = \sqrt[N]{x}$, unde N este cel mai mic multiplu comun al ordinelor radicalilor deja existenţi.

2. Dacă $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, atunci $ax^n + b = t^q$, unde q este numitorul lui p. Altfel spus, $t = \sqrt[N]{ax^n + b}$, adică se alege ca variabilă nouă paranteza cu tot cu exponent, eliminând eventualul numărător al exponentului şi eventualul semn $-$.

3. Dacă $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, atunci $a + \frac{b}{x^n} = t^q$, unde q este numitorul lui p. Altfel spus, $t = \sqrt[N]{a + \frac{b}{x^n}}$, adică se alege ca variabilă nouă paranteza după un factor comun forţat, cu tot cu exponent, eliminând eventualul numărător al exponentului şi eventualul semn $-$.

Substituţiile de mai sus se numesc şi **substituţiile lui Cebâşev**.

Exemplu. Fie integrala

$$I = \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx, \quad x \in (0, \infty).$$

Atunci

$$I = \int x^3 (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} dx \implies m = 3, n = 2, p = -\frac{1}{2}.$$

Observăm că $p = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, dar $\frac{m+1}{n} = 2 \in \mathbb{Z}$. Alegem ca variabilă nouă

$$t = (x^2+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2+1},$$

eliminând semnul $-$ de la exponent, întrucât expresia $1 + x^2$ de sub radical nu este ridicată ea însăşi la o putere. De aici

$$t^2 = x^2 + 1 \implies x^2 = t^2 - 1 \implies x = \sqrt{t^2-1},$$

şi deci

$$dx = (\sqrt{t^2-1})' dt = \frac{1}{2\sqrt{t^2-1}} \cdot (t^2-1)' dt = \frac{1}{2\sqrt{t^2-1}} \cdot 2t dt = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} dt.$$

Asociem integrala

$$J = \int \left(\sqrt{t^2-1}\right)^3 \cdot (t^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} dt = \int (t^2-1)\sqrt{t^2-1} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} dt$$
$$= \int (t^2-1) dt = \frac{t^3}{3} - t + \mathcal{C}.$$

Prin înlocuirea lui t, obţinem că

$$I = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}{3} - \sqrt{x^2+1} + \mathcal{C}.$$

Integrala definită

Încă din antichitate, s-a pus problema determinării ariilor unor figuri geometrice care nu erau mărginite de segmente de dreaptă. Maeştri ai geometriei clasice, vechii greci s-au dovedit a fi şi precursori a ceea ce urma să devină calculul integral. Deşi in acea vreme nu exista, desigur, noţiunea de trecere la limită, acest impediment nu l-a oprit pe Eudoxius să introducă în preajma anului 370 î.Hr. metoda exhaustiunii (epuizării). În această abordare, aria măsurată se extindea pas cu pas, devenind din ce in ce mai apropiată de aria căutată.

Arhimede a folosit această metodă pentru a calcula (în mod exact!), în jurul anului 230 î.Hr., aria de sub graficul unei parabole, oferind cu această ocazie primul exemplu de serie convergentă, şi pentru a aproxima ariile cercurilor şi elipselor. De aceeaşi atenţie din partea sa s-a bucurat şi calculul volumelor unor corpuri cum ar fi sferele şi paraboloizii de revoluţie.

Bazele calculului integral au fost puse de către Isaac Newton, în 1666, pornind de la probleme de natură cinematică. Pentru Newton, calculul integral însemna găsirea „fluenţilor” atunci cand sunt cunoscute „fluxiunile” (derivatele), obiectivul principal fiind determinarea legii de mişcare a unui punct material atunci când este cunoscută permanent viteza sa. Din motive conjuncturale, tratatul respectiv nu a fost publicat în mod formal decât după mai mult timp de la redactarea sa, deşi conţinutul devenise cunoscut matematicienilor vremii.

În vreme ce punctul de vedere al lui Newton era, într-un fel, de natură geometrică, Gottfried Wilhelm von Leibniz a contribuit la punerea bazelor calculului integral cu un punct de vedere ceva mai apropiat de cel al analizei de azi şi sistematizat mai convenabil din punct de vedere analitic. Abordarea propusă de Leibniz consta în utilizarea proprietăţile seriilor convergente (în fapt, Leibniz şi-a numit abordarea „calculus summatorius”, numele de calcul integral fiind sugerat ulterior de Jacob Bernoulli, în 1690). Tot lui Leibniz i se datorează utilizarea cantităţilor infinitezimale dx şi dy şi notaţiile pentru acestea, precum şi introducerea semnului $\int$ pentru operaţia de integrare.

Leibniz a fost cel care şi-a publicat mai întâi propria abordare (1684, 1686), lucru care a dat naştere unei controverse intense privind adevăratul creator al calculului integral, punctul central al acesteia fiind măsura în care Leibniz a cunoscut rezultatele lui Newton. Astăzi, atât lui Newton cât şi lui Leibniz li se acordă credit pentru dezvoltarea independentă a noţiunilor de bază ale calculului integral.

Definiţia actuală a noţiunii de integrală i se datorează lui Bernhard Riemann (1854), extinderi ale acestei noţiuni fiind introduse, între alţii de Thomas Joannes Stieltjes (1894, integrala Riemann-Stieltjes) şi Henri Lebesgue (1904, integrala Lebesgue).

1 Diviziuni ale unui interval

Fiind dat un interval mărginit $[a, b]$, numim **diviziune** a sa o mulţime ordonată

$$\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \quad \text{cu} \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Punctele $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ se numesc **nodurile** diviziunii, iar lungimea maximă a **intervalelor elementare** $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots$, $[x_{n-1}, x_n]$ astfel determinate,

$$\|\Delta\| = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i),$$

se numeşte **norma** diviziunii Δ. În situaţia în care toate intervalele elementare ale diviziunii Δ au aceeaşi lungime, egală cu $\frac{1}{n}(b-a)$, diviziunea se numeşte **echidistantă**.

> **Exemplu.** Mulţimea
>
> $$\Delta_1 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, 1\right\}$$
>
> este o diviziune a intervalului $[0, 1]$, cu norma
>
> $$\|\Delta_1\| = \max\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{2}{5}\right\} = \frac{2}{5},$$
>
> fără a fi echidistantă. Mulţimea
>
> $$\Delta_2 = \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right\}$$
>
> este o diviziune echidistantă a intervalului $[0, 1]$, toate intervalele elementare ale diviziunii având lungimea $\frac{1}{5}$.

2 Notaţie

Mulţimea diviziunilor unui interval $[a, b]$ se notează $\mathcal{D}_{[a,b]}$.

3 Sisteme de puncte intermediare asociate

Fiind dată o diviziune $\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, vom numi **sistem de puncte intermediare asociat diviziunii** Δ o mulţime ordonată

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\},$$

astfel încât $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pentru $1 \leq i \leq n$ (în fiecare interval elementar se află câte un punct intermediar).

AM2, Curs 5, 19.03.2020

Integrala definită (continuare)

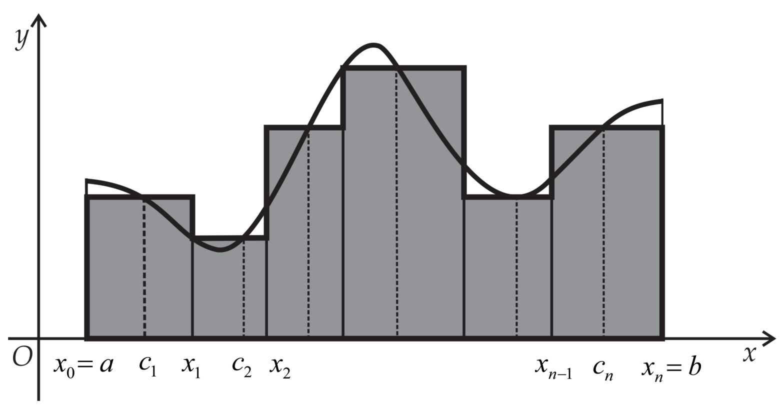
1 Concepte teoretice

1.1 Sume Riemann. Interpretare geometrică

Fiind date o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, o diviziune $\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ a intervalului $[a, b]$ şi $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ, vom numi **sumă Riemann asociată diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare** C suma

$$\begin{aligned}\sigma_\Delta(f, C) &= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= f(c_1)(x_1 - x_0) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(c_n)(x_n - x_{n-1})\end{aligned}$$

(valoarea funcţiei în fiecare punct intermediar se înmulţeşte cu lungimea intervalului din care punctul intermediar face parte, adunându-se rezultatele).



Pentru fixarea ideilor, să presupunem că $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$, graficul funcţiei f fiind atunci situat în întregime deasupra axei Ox. Atunci $f(c_1)(x - x_0)$ reprezintă aria unui dreptunghi care aproximează aria trapezului curbiliniu delimitat de graficul funcţiei f, dreptele $x = x_0$, $x = x_1$ şi axa Ox (primul trapez curbiliniu dintre cele n în care a fost împărţită porţiunea dintre graficul funcţiei f şi axa Ox). Desigur, această aproximare este cu atât mai bună (adică eroarea de aproximare este mai mică) cu cât x_1 este mai apropiat de x_0.

Ceilalţi termeni ai sumei Riemann având interpretări similare, obţinem că suma Riemann reprezintă o aproximare pentru aria porţiunii dintre graficul funcţiei f, axa Ox, paralela ,,iniţială” la Oy, $x = a$, şi paralala ,,finală” la Oy, $x = b$. Această aproximare este cu atât mai bună cu cât **toate** lungimile de intervale elementare $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}$ sunt mai mici.

1.2 Funcţii integrabile Riemann

Definiţie. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Vom spune că f este **integrabilă Riemann** pe $[a, b]$ (pe scurt, f este **integrabilă** pe $[a, b]$) dacă există un număr real I astfel încât oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că

oricare ar fi diviziunea $\Delta \in \mathcal{D}_{[a,b]}$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi oricare ar fi sistemul de puncte intermediare C asociat lui Δ, are loc inegalitatea

$$|\sigma_\Delta(f, C) - I| < \varepsilon.$$

Astfel, pentru o normă a diviziunii Δ suficient de mică, suma Riemann $\sigma_\Delta(f, C)$ reprezintă o aproximare „suficient de bună” a lui I, indiferent de alegerea sistemului de puncte intermediare C.

1.3 Integrala Riemann

Numărul I de mai sus se numeşte **integrala definită**, sau **integrala Riemann**, a funcţiei f pe intervalul $[a, b]$ şi se notează

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Să obsevăm şi că I, dacă există, este unic determinat.

Numerele a şi b se numesc **limitele de integrare**, intervalul $[a, b]$ se numeşte **interval de integrare**, iar variabila x se numeşte **variabilă de integrare**.

1.4 Definiţie alternativă

Are loc următoarea echivalenţă, cea de-a doua afirmaţie putând fi utilizată de asemenea ca definiţie a integrabilităţii Riemann.

Teorema 1.1. *Fie o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente.*

1. *f este integrabilă pe $[a, b]$.*

2. *Oricare ar fi un şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\geq 0}$ ale intervalului $[a, b]$ cu $\|\Delta_n\| \to 0$, împreună cu un şir de sisteme de puncte intermediare asociate $(C_n)_{n\geq 0}$, şirul sumelor Riemann $(\sigma_{\Delta_n}(f, C_n))_{n\geq 0}$ este convergent.*

Cea de-a doua afirmaţie pare, la prima vedere, imprecisă. Mai precis, se cere doar ca limita unui şir de sume Riemann să fie finită, apărînd, la prima vedere, posibilitatea ca şiruri diferite de sume Riemann să tindă la limite diferite, adică să existe „candidaţi” diferiţi pentru $\int_a^b f(x)dx$. În fapt, se poate demonstra că limita unui astfel de şir de sume Riemann nu depinde nici de alegerea şirului de diviziuni $(\Delta_n)_{n\geq 0}$, nici de alegerea şirului de sisteme de puncte intermediare asociate $(C_n)_{n\geq 0}$. Valoarea (comună) a acestor limite reprezintă $\int_a^b f(x)dx$.

1.5 Diferenţa între integrala nedefinită şi integrala definită a unei funcţii

Integrala nedefinită a unei funcţii f este o **mulţime de funcţii**, pe când integrala sa definită este un **număr**.

1.6 Inversarea limitelor de integrare

Observăm din cele de mai sus că nu este neapărat necesar ca $a < b$. Comparând sumele Riemann obţinute pentru intervalele $[a, b]$ şi $[b, a]$ (şi aceeaşi diviziune Δ şi acelaşi sistem de puncte intermediare C), observăm că a doua este opusă primei, întrucât $(x_i - x_{i-1})$ se transformă în $(x_{i-1} - x_i) = -(x_i - x_{i-1})$. Urmează imediat că

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

(**inversarea limitelor de integrare are ca efect inversarea semnului integralei**).

1.7 Interval de integrare redus la un punct

Prin definiţie (consistentă cu observaţia de mai sus şi cu interpretarea geometrică a integralei definite)

$$\int_a^a f(x)dx = 0,$$

(**dacă lungimea intervalului de integrare este** 0**, atunci şi valoarea integralei este** 0)

1.8 Integrala funcţiei nule

Cu ajutorul definiţiei, putem observa că, dacă $f(x) = 0$ pentru orice $x \in [a, b]$, atunci

$$\int_a^b f(x)dx = 0,$$

întrucât toate sumele Riemann asociate sunt nule.

2 Legătura între integrabilitate şi alte proprietăţi ale funcţiilor

După definirea noţiunii de funcţie integrabilă, este natural să căutăm legăturile între integrabilitate şi alte proprietăţi uzuale ale unor funcţii (continuitate, monotonie, mărginire).

Ţinând seama de motivaţia practică a introducerii noţiunii de integrală definită (calculul unor arii), ar fi natural ca funcţiile continue pe un interval $[a, b]$ să fie şi integrabile. Ţinând seama şi de faptul că integrala definită a unei funcţii este, în fapt, limita (finită) a unui şir (convergent) de sume Riemann, cum un şir convergent este mărginit, ne putem aştepta prin analogie ca şi o funcţie integrabilă să fie mărginită. Prin acelaşi gen de analogie, cum un şir monoton şi mărginit este convergent, ne putem aştepta ca o funcţie monotonă şi mărginită să fie integrabilă.

Teorema 2.1. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f continuă pe $[a,b]$. Atunci f este integrabilă pe $[a,b]$.*

Teorema 2.2. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe $[a,b]$. Atunci f este mărginită pe $[a,b]$.*

Teorema 2.3. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f monotonă şi mărginită pe $[a,b]$. Atunci f este integrabilă pe $[a,b]$.*

3 Formula Leibniz-Newton

Formula următoare reprezintă legătura dintre noţiunile de integrală definită, respectiv nedefinită.

Teorema 3.1. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ astfel încât f este integrabilă pe $[a,b]$ şi admite primitive pe $[a,b]$. Atunci*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \overset{\text{notaţie}}{=\!=\!=} F(x)\Big|_a^b,$$

F fiind o primitivă oarecare a lui f.

În fapt, prin intermediul formulei Leibniz-Newton, calculul unei integrale definite se reduce la calculul unei primitive şi la scăderea valorilor acestei primitive în capetele intervalului de integrare, mai precis din valoarea în capătul superior scăzându-se valoarea în capătul inferior.

Exemplu.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}) - \operatorname{tg} 0 = 1,$$

deoarece

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + \mathcal{C},$$

o primitivă a funcţiei $\frac{1}{\cos^2}$ fiind funcţia tg.

4 Operaţii cu funcţii integrabile

Prin intermediul formulei Leibniz-Newton, numită şi **formula fundamentală a calculului integral**, formulelor de calcul al primitivelor pentru functii uzuale le corespund formule de calcul pentru integrale definite.

Teorema 4.1. *Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe $[a,b]$ şi $c \in \mathbb{R}$. Au loc următoarele proprietăţi.*

1. **Proprietatea de aditivitate**

Funcţiile $f + g$ şi $f - g$ sunt integrabile pe $[a, b]$, iar

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

*(***integrala sumei este egală cu suma integralelor***), respectiv*

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

*(***integrala diferenţei este egală cu diferenţa integralelor***).*

2. **Proprietatea de omogenitate**

   Funcţia cf este integrabilă pe $[a, b]$, iar

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx,$$

*(***o constantă cu care se înmulţeşte poate fi trecută de sub integrală înaintea integralei***).*

Menţionăm că nu au loc formule asemănătoare pentru produs şi raport, adică integrala produsului nu este, de regulă, produsul integralelor şi nici integrala raportului nu este, de regulă, raportul integralelor. Condensat, formulele de mai sus pot fi scrise sub forma următoare.

Teorema 4.2. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe $[a, b]$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Atunci $c_1 f + c_2 g$ este integrabilă pe $[a, b]$ şi*

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))dx = c_1 \int_a^b f(x)dx + c_2 \int_a^b g(x)dx.$$

Proprietatea are loc şi pentru mai mult de două funcţii. Prin inducţie matematică se poate demonstra următorul rezultat.

Teorema 4.3. *Fie $f_1, f_2, \ldots, f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f_1, f_2, \ldots, f_n$ integrabile pe $[a, b]$ şi $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Atunci $c_1 f + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n$ este integrabilă pe $[a, b]$ şi*

$$\begin{aligned}&\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x))dx \\ &\quad = c_1 \int_a^b f_1(x)dx + c_2 \int_a^b f_2(x)dx + \ldots + c_n \int_a^b f_n(x)dx.\end{aligned}$$

5 Metode de calcul

Din nou, metodelor de calcul pentru integrale nedefinite le corespund prin intermediul formulei Leibniz-Newton metode de calcul similare pentru integrale definite.

5.1 Metoda de integrare prin părţi

Teorema 5.1. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile, cu f', g' continue. Atunci $f'g$ şi fg' sunt integrabile pe $[a, b]$, iar*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Exemplu. Determinaţi $\int_0^\pi x \cos x dx$.

Soluţie. Întrucât x este o funcţie polinomială, încercăm să scriem **cealaltă** funcţie de sub integrală ca o derivată, sub forma $\cos x = (\sin x)'$. Urmează că

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x \cos x dx &= \int_0^\pi x(\sin x)' dx = x \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi (x)' \sin x dx \\ &= x \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx = x \sin x \Big|_0^\pi - (-\cos x) \Big|_0^\pi \\ &= x \sin x \Big|_0^\pi + \cos x \Big|_0^\pi = 0 - 2 = -2.\end{aligned}$$

5.2 Prima metodă de schimbare de variabilă

Teorema 5.2. *Fie $[a, b], [c, d]$ intervale şi $[a, b] \xrightarrow{u} [c, d] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ funcţii care satisfac următoarele proprietăţi*

1. *u este derivabilă cu derivata continuă pe $[a, b]$;*
2. *f continuă pe $[c, d]$;*

Atunci $(f \circ u)u'$ este integrabilă pe $[a, b]$, iar

$$\int_a^b (f \circ u)(x)u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du,$$

Remarcăm faptul că atunci când se schimbă variabila de integrare se schimbă şi limitele de integrare.

Exemplu. Fie integrala

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx.$$

Atunci

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx = \int_0^1 \operatorname{arctg} x \cdot \frac{1}{1 + x^2} dx = \int_0^1 \operatorname{arctg} x \cdot (\operatorname{arctg} x)' dx.$$

Notând $u = \operatorname{arctg} x$, obţinem că

$$du = (\operatorname{arctg} x)' dx = \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Calculăm noile limite de integrare, înlocuindu-le pe cele vechi în schimbarea de variabilă. Astfel,

$$\begin{aligned} x = 0 &\implies u = \operatorname{arctg} 0 = 0 \\ x = 1 &\implies u = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Înlocuind du şi u (în această ordine), urmează că

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} u du = \frac{u^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}0^2 = \frac{\pi^2}{32}.$$

5.3 A doua metodă de schimbare de variabilă

Teorema 5.3. *Fie $[a,b], [c,d]$ intervale şi $[a,b] \xrightarrow{u} [c,d] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ funcţii care satisfac următoarele proprietăţi*

1. *u este derivabilă şi inversabilă, iar $v = u^{-1}$ este derivabilă cu derivata continuă pe $[c,d]$;*
2. *f este continuă pe $[c,d]$;*

Atunci $(f \circ u)$ este integrabilă pe $[a,b]$, iar

$$\int_a^b (f \circ u)(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) \cdot v'(u) du.$$

Practic, ca şi pentru integrale nedefinite, cea de-a doua metodă de schimbare de variabilă corespunde situaţiei în care nu se poate pune în evidenţă sub integrala iniţială derivata schimbării de variabilă.

5.4 Proprietăţi în raport cu intervalul

5.4.1 Extinderea intervalului de integrare. Aditivitatea în raport cu intervalul

Teorema 5.4. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$. Dacă f este integrabilă atât pe $[a,c]$ cât şi pe $[c,b]$, atunci este integrabilă pe întreg intervalul $[a,b]$, iar*

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \tag{1}$$

Să observăm însă că, în ipoteza în care toate cele trei integrale sunt bine definite, nu este neapărat necesar ca $c \in (a, b)$. În fapt, dacă integralele sunt bine definite, egalitatea are loc indiferent de poziţia lui c faţă de a şi b.

5.4.2 Integrarea funcţiilor pare şi impare

Reamintim că o funcţie $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$, $a > 0$, se numeşte **pară** dacă

$$f(-x) = f(x), \quad \text{pentru orice } x \in [-a, a]$$

(semnul $-$ dispare, aşa cum dispare când -1 este ridicat la putere pară). De asemenea, dacă

$$f(-x) = -f(x), \quad \text{pentru orice } x \in [-a, a]$$

(semnul $-$ se păstrează, aşa cum se păstrează când -1 este ridicat la putere impară), funcţia f se numeşte **impară**.

Teorema 5.5. *Fie $[-a, a]$ un interval simetric faţă de origine, $a > 0$, şi fie $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe $[-a, a]$.*

1. *Dacă f este impară, atunci $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.*
2. *Dacă f este pară, atunci $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.*

Exemplu. Determinaţi

$$\int_{-1}^{1} x^7 \sqrt{1 + x^2} dx.$$

Intervalul de integrare, $[-1, 1]$, este simetric faţă de origine. Rămâne să determinăm paritatea funcţiei de sub integrală. Fie

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^7 \sqrt{1 + x^2}.$$

Atunci

$$f(-x) = (-x)^7 \sqrt{1 + (-x)^2} = -x^7 \sqrt{1 + x^2} = -f(x), \quad x \in [-1, 1],$$

deci f este impară, iar

$$\int_{-1}^{1} x^7 \sqrt{1 + x^2} = 0.$$

Practic, funcţiile impare „păstrând semnul”, integrala pe partea negativă $[-a, 0]$ a intervalului $[-a, a]$ are semn schimbat faţă de integrala pe partea pozitivă $[0, a]$ a intervalului $[-a, a]$, iar suma lor este 0.

Funcţiile pare „eliminând semnul”, integrala pe partea negativă $[-a, 0]$ a intervalului $[-a, a]$ este egală cu integrala pe partea pozitivă $[0, a]$ a intervalului $[-a, a]$, suma lor fiind dublul integralei pe partea pozitivă $[0, a]$.

5.5 Proprietăţi în raport cu funcţia

Vom observa în cele ce urmează că integrala definită păstrează semnul funcţiei de integrat şi inegalităţile nestricte între funcţii. În plus, inegalitatea strictă într-un punct de continuitate a funcţiei de integrat atrage inegalitatea strictă pentru integrală.

5.5.1 Păstrarea inegalităţilor nestricte

Teorema 5.6. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe $[a, b]$.*

1. *Dacă $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [a, b]$, atunci*
$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$
2. *Dacă $f(x) \geq g(x)$, pentru orice $x \in [a, b]$, atunci*
$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

Corolar 5.6.1. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe $[a, b]$. Dacă*
$$m \leq f(x) \leq M, \quad \text{pentru orice } x \in [a, b],$$
atunci
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

AM2, Curs 6, 26.03.2020
Integrala definită (continuare)

1 Integrala definită ca funcţie de limita superioară

Am afirmat în capitolul precedent că orice funcţie continuă admite primitive. Pentru a dovedi acest lucru, prezentăm mai întâi următoarea formulă de derivare a integralei definite ca funcţie de limita superioară de integrare (limita inferioară fiind constantă).

Teorema 1.1. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f continuă pe $[a, b]$. Atunci*

$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

este derivabilă pe $[a, b]$, iar

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x), \text{ pentru orice } x \in [a, b].$$

Altfel spus, derivarea acestui tip de integrală se realizează prin înlocuirea variabilei x sub integrală şi apoi „eliminarea reciprocă" a lui $'$, $\int$ şi dx (reamintim că integrarea şi derivarea sunt „operaţii inverse").

Exemplu.

$$\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^x \sin t dt\right)' = \sin x$$

O consecinţă imediată a acestei formule este faptul că o primitivă a lui f este

$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^x f(x)dx,$$

aceasta având în plus şi proprietatea că

$$F(a) = \int_a^a f(x)dx = 0.$$

Am demonstrat deci următorul rezultat.

Teorema 1.2. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f continuă pe $[a, b]$. Atunci f admite primitive pe $[a, b]$.*

Formula de derivare care face obiectul Teoremei 1.1 este valabilă doar atunci când limita inferioară de integrare este o constantă, iar cea superioară este x, şi nu o altă funcţie în care x apare într-un mod mai complicat. Într-un caz mai general, funcţionează următoarea formulă de derivare a unei integrale definite în care atât limita inferioară de integrare cât şi cea superioară sunt variabile, motivată de formula de derivare a funcţiei compuse.

Teorema 1.3. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, iar $u, v : [c,d] \to [a,b]$ funcţii derivabile, cu derivata continuă. Atunci*

$$F : [c,d] \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$$

este derivabilă pe $[c,d]$, iar

$$\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt \right)' = f(v(x)) \cdot v'(x) - f(u(x)) \cdot u'(x).$$

Demonstraţia este similară demonstraţiei Teoremei 1.1.

Exemplu. Demonstraţi că funcţia

$$f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} e^t dt,$$

este strict descrescătoare.

Soluţie. Pentru a studia monotonia funcţiei f, calculăm derivata acesteia, observând că

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\int_{\sin x}^{\cos x} e^t dt \right)' = e^{\cos x} \cdot (\cos x)' - e^{\sin x} \cdot (\sin x)' \\ &= -e^{\cos x} \sin x - e^{\sin x} \cos x < 0, \quad \text{pentru } x \in [0, \frac{\pi}{2}], \end{aligned}$$

de unde concluzia.

2 Aplicaţii ale integralei definite

2.1 Aria subgraficului unei funcţii

2.1.1 Funcţii cu semn pozitiv

Definiţie. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [a,b]$. Vom numi **subgrafic** al funcţiei f mulţimea Γ_f definită prin

$$\Gamma_f = \{(x,y); a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

situată între dreptele verticale $x = a$ şi $x = b$, axa Ox şi graficul funcţiei f.

Teorema 2.1. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe $[a,b]$, $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [a,b]$. Atunci aria lui Γ_f este*

$$\text{aria}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)dx.$$

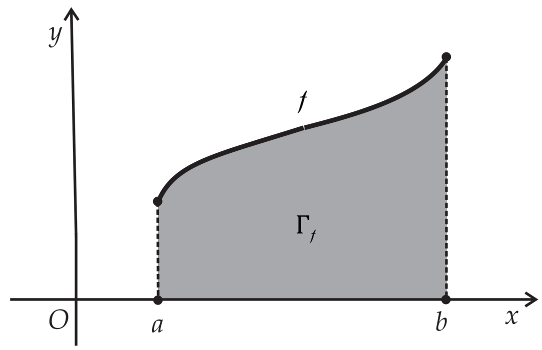


Figure 1: Subgraficul unei funcţii pozitive f.

2.1.2 Funcţii cu semn oarecare

Dacă funcţia f nu păstrează semn constant pozitiv, Γ_f se defineşte prin

$$\Gamma_f = \{(x,y); a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x) \text{ sau } 0 \geq y \geq f(x)\},$$

fiind situată între dreptele verticale $x = a$ şi $x = b$, axa Ox şi graficul funcţiei f (acum putându-se afla, parţial sau total şi deasupra graficului funcţiei f).

Se poate observa că dacă f păstrează semn constant pozitiv, atunci definiţia coincide cu cea de mai sus. Aria lui Γ_f poate fi calculată şi în acest caz printr-o formulă asemănătoare.

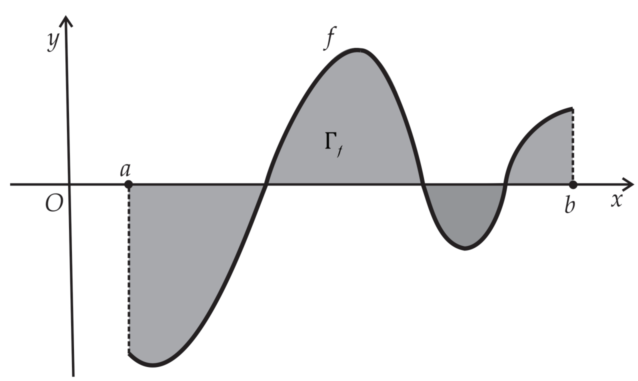


Figure 2: Subgraficul unei funcţii cu semn oarecare f.

Teorema 2.2. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe $[a,b]$, cu semn oarecare. Atunci aria lui Γ_f este*

$$\text{aria}(\Gamma_f) = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Desigur, modulul este necesar datorită faptului că aria calculată trebuie să fie pozitivă, iar funcţia f nu are, în cazul de faţă, această proprietate.

2.2 Aria mulţimii mărginite de graficele a două funcţii

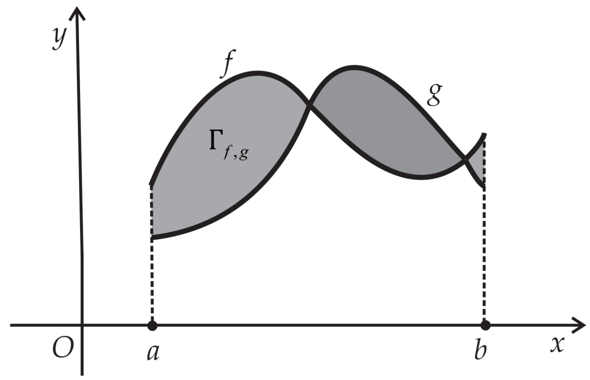


Figure 3: Mulţimea mărginită de graficele a două funcţii f şi g.

Definiţie. Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe $[a, b]$. Numim **mulţimea mărginită de graficele funcţiilor** f **şi** g mulţimea $\Gamma_{f,g}$ definită prin

$$\Gamma_{f,g} = \{(x, y); a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x) \text{ sau } g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

situată între dreptele verticale $x = a$, $x = b$, şi graficele funcţiilor f, g.

Teorema 2.3. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe $[a, b]$. Atunci aria lui $\Gamma_{f,g}$ este*

$$\text{aria}(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b |g(x) - f(x)| dx.$$

Dacă una dintre funcţii ia tot timpul valori mai mari (graficul său este deasupra graficului celeilalte), atunci se poate renunţa la modul.

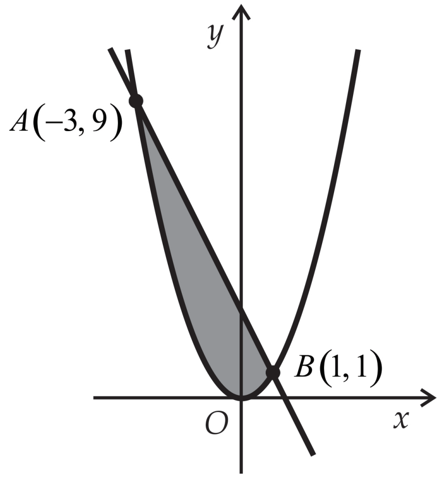
Corolar 2.3.1. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe $[a, b]$, astfel încât $f(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$. Atunci aria lui $\Gamma_{f,g}$ este*

$$aria(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx.$$

Exemplu. Determinaţi aria domeniului plan mărginit de graficele funcţiilor $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = 3 - 2x$.

Domeniul plan mărginit de graficele funcţiilor f, g este cel haşurat în figură. Domeniul de integrare se obţine determinând abscisele punctelor de intersecţie. La rândul lor, acestea se obţin rezolvând sistemul format de ecuaţiile graficelor celor două funcţii, anume

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 3 - 2x. \end{cases}$$



Atunci $x^2 = 3 - 2x$, de unde $x^2 + 2x - 3 = 0$, ecuaţie cu soluţiile $x_1 = -3$ şi $x_2 = 1$. Din reprezentarea grafică, $g \geq f$ pe domeniul de intersecţie (acest lucru se poate demonstra şi algebric). Atunci aria căutată este

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{1}\left[(3-2x)-x^2\right]dx &= \int_{-3}^{1}3dx - \int_{-3}^{1}2xdx - \int_{-3}^{1}x^2dx\\ &= 3x\Big|_{-3}^{1} - 2\frac{x^2}{2}\Big|_{-3}^{1} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-3}^{1} = \frac{32}{3}.\end{aligned}$$

2.3 Centrul de masă al unei plăci plane omogene

Teorema 2.4. *Fie $f : [a,b] \to [0,\infty)$, f continuă pe $[a,b]$ şi neidentic nulă. Atunci coordonatele centrului de masă al lui Γ_f, privit ca o placă plană* **omogenă** *de grosime neglijabilă, sunt*

$$x_G = \frac{\displaystyle\int_a^b xf(x)dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}, \quad y_G = \frac{\displaystyle\int_a^b \frac{1}{2}f^2(x)dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}.$$

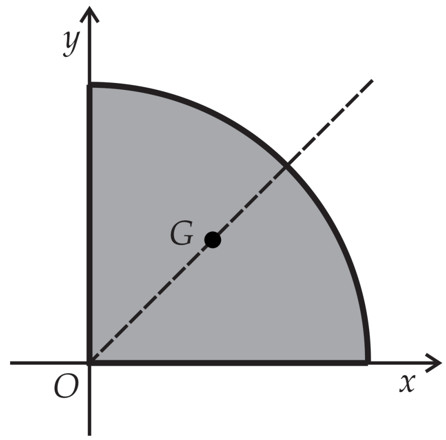
2.3.1 Consideraţie practică

În aplicaţii, este util a se observa mai întâi eventuala simetrie a lui Γ_f. Astfel, dacă Γ_f are o axă de simetrie, atunci şi centrul de masă se află pe acea axă, lucru ce poate simplifica determinarea poziţiei sale.

Exemplu. Fie $r > 0$. Să se determine coordonatele centrului de masă al plăcii plane omogene definite prin

$$M = \left\{(x,y);\ x^2 + y^2 \leq r^2,\ x \geq 0, y \geq 0\right\}.$$

Soluţie. Placa plană respectivă este porţiunea din discul cu centrul în origine şi de rază r situată în primul cadran. Cum cercul cu centrul în origine şi de rază r are ecuaţia



$x^2 + y^2 = r^2$, de unde $y^2 = r^2 - x^2$, porţiunea de cerc situată în primul cadran are ecuaţia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. În concluzie, placa respectivă poate fi privită ca subgrafic al funcţiei

$$f : [0, r] \to [0, \infty), \quad f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

De aici,

$$x_G = \frac{\int_0^r x f(x) dx}{\int_0^r f(x) dx} = \frac{\int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2} dx}{\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx},$$

$$y_G = \frac{\int_0^r \frac{1}{2} f^2(x) dx}{\int_0^r f(x) dx} = \frac{\int_0^r \frac{1}{2}\left(r^2 - x^2\right) dx}{\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx}.$$

Cu schimbarea de variabilă

$$x = r \sin t \implies dx = r \cos t dt,$$

urmează că

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} \cdot r \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2 t dt$$

$$= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{r^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4}.$$

Similar,

$$\int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sin t \cdot \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} \cdot r \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin t \cos^2 t dt.$$

Cu schimbarea de variabilă

$$\cos t = u \implies du = -\sin t dt,$$

urmează că

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin t \cos^2 t dt = \int_1^0 r^3 u^2(-du) = r^3 \int_0^1 u^2 du = r^3 \frac{u^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{r^3}{3},$$

iar

$$x_G = \frac{\frac{r^3}{3}}{\frac{\pi r^2}{4}} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Deoarece

$$\int_0^2 \frac{1}{2}(r^2 - x^2)dx = \frac{1}{2}\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^r = \frac{r^3}{3},$$

urmează că

$$y_G = \frac{\frac{r^3}{3}}{\frac{\pi r^2}{4}} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Alternativ, pentru simplificarea calculelor, era suficient să observăm că placa respectivă, fiind simetrică faţă de prima bisectoare, are centrul de greutate situat pe aceasta, de unde $x_G = y_G$, putându-se astfel calcula doar y_G.

2.4 Lungimea graficului unei funcţii

Teorema 2.5. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f derivabilă cu f' continuă. Atunci graficul său G_f are lungimea*

$$l(G_f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Exemplu. Determinaţi lungimea graficului funcţiei

$$f : [\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln x.$$

Soluţie.

$$l(G_f) = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx$$
$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x^{-1}(x^2+1)^{\frac{1}{2}} dx.$$

Integrala obţinută este o integrală binomă, cu $m = -1$, $n = 2$, $p = \frac{1}{2}$. Deoarece

$$\frac{m+1}{n} = 0 \in \mathbb{Z},$$

vom face schimbarea de variabilă

$$u = (x^2+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2+1}.$$

Atunci

$$u^2 = x^2 + 1 \implies x^2 = u^2 - 1 \implies x = \sqrt{u^2 - 1}$$
$$\implies dx = \left(\sqrt{u^2 - 1}\right)' du = \frac{u}{\sqrt{u^2 - 1}} du.$$

Limitele noi de integrare sunt

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies u = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{3} + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$x = \sqrt{3} \implies u = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{3 + 1} = 2.$$

Urmează că

$$l(G_f) = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} \frac{u}{\sqrt{u^2 - 1}} \frac{u}{\sqrt{u^2 - 1}} du = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} \frac{u^2}{u^2 - 1} du = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} \frac{u^2 - 1 + 1}{u^2 - 1} du$$
$$= \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} \left(\frac{u^2 - 1}{u^2 - 1} + \frac{1}{u^2 - 1}\right) du = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} 1 du + \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} \frac{1}{u^2 - 1} du$$
$$= u \Big|_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} + \frac{1}{2} \ln \left|\frac{u - 1}{u + 1}\right| \Big|_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \ln \frac{2 + \sqrt{3}}{3(2 - \sqrt{3})}.$$

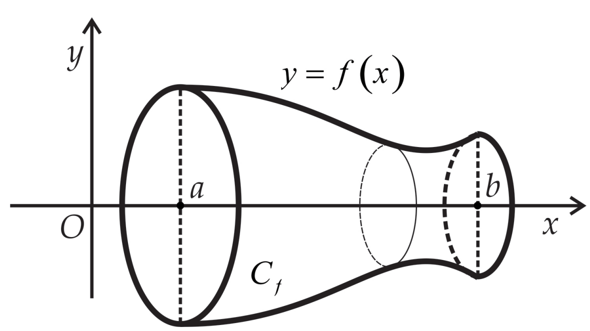
2.5 Volumul unui corp de rotaţie

Fie $f : [a, b] \to [0, \infty)$, f continuă.

Definiţie. Numim **corp de rotaţie** generat de graficul funcţiei f mulţimea spaţială

$$C_f = \left\{(x, y, z); a \leq x \leq b,\ f(x) \geq \sqrt{y^2 + z^2}\right\}$$

obţinută prin rotaţia subgraficului funcţiei f în jurul lui Ox.

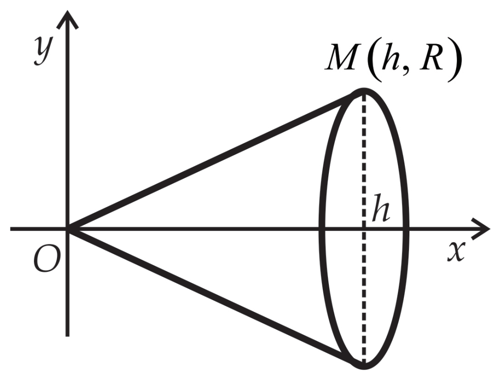


Un exemplu de corp de rotaţie este cilindrul circular drept (obţinut prin rotaţia subgraficului unei funcţii cu graficul un segment paralel cu Ox). Un altul este conul circular drept (obţinut prin rotaţia subgraficului unei funcţii cu graficul un segment ce conţine O). De asemenea, bila sferică şi trunchiul de con circular drept sunt corpuri de rotaţie.

Teorema 2.6. *Fie $f : [a, b] \to [0, \infty)$, f continuă. Volumul corpului de rotaţie generat de graficul funcţiei f este*

$$\mathrm{vol}(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Exemplu. Demonstraţi că volumul conului circular drept de înălţime h şi rază a bazei R este $V = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$.



Soluţie. Un con circular drept de înălţime h şi rază a bazei R poate fi obţinut prin rotaţia subgraficului unei funcţii cu graficul un segment ce conţine O, adică al funcţiei

$$f : [0, h] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = kx,$$

unde k se determină din condiţia ca punctul $M(h, R)$ să aparţină graficului funcţiei f. Urmează că $kh = R$, deci $k = \frac{R}{h}$. Atunci

$$\begin{aligned} V = \mathrm{vol}(C_f) &= \pi \int_0^h f^2(x)dx = \pi \int_0^h \left(\frac{R}{h}x\right)^2 dx = \pi \left(\frac{R}{h}\right)^2 \int_0^h x^2 dx \\ &= \pi \frac{R^2}{h^2} \frac{x^3}{3} \bigg|_0^h = \pi \frac{R^2}{h^2} \frac{h^3}{3} = \frac{\pi R^2 h}{3}. \end{aligned}$$

2.6 Volumul corpului de rotaţie generat de graficele a două funcţii

Fie $f : [a, b] \to [0, \infty)$, f, g continue, $0 \le f(x) \le g(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$.

Definiţie. Numim **corp de rotaţie** generat de graficele funcţiilor f şi g mulţimea spaţială

$$C_{f,g} = \left\{ (x, y, z); a \le x \le b,\ f(x) \le \sqrt{y^2 + z^2} \le g(x) \right\}$$

obţinută prin rotaţia lui $\Gamma_{f,g}$, mulţimea mărginită de graficele funcţiilor f şi g, în jurul lui Ox.

Teorema 2.7. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f, g continue pe $[a, b]$, astfel încât $f(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$. Atunci volumul lui $C_{f,g}$ este*

$$vol(C_{f,g}) = \pi \int_a^b \Big(g^2(x) - f^2(x)\Big)\, dx.$$

Vom preciza în cele ce urmează legătura între volumul corpului $C_{f,g}$ obţinut prin rotaţia mulţimii $\Gamma_{f,g}$ în jurul axei Ox şi aria $\Gamma_{f,g}$ a acestei mulţimi.

2.7 Ariile suprafeţelor de rotaţie

Fie $f : [a, b] \to [0, \infty)$, f derivabilă cu f' continuă.

Definiţie. Numim **suprafaţă de rotaţie** generată de graficul funcţiei f mulţimea spaţială

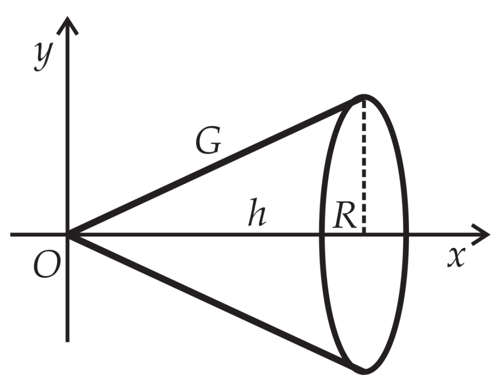
$$S_f = \left\{(x, y, z); a \leq x \leq b, f(x) = \sqrt{y^2 + z^2}\right\}$$

obţinută prin rotaţia graficului funcţiei f în jurul lui Ox.

Teorema 2.8. *Fie $f : [a, b] \to [0, \infty)$, f derivabilă cu f' continuă. Aria suprafeţei de rotaţie generate de graficul funcţiei f este*

$$\text{aria}(S_f) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Exemplu. Demonstraţi că aria laterală a conului circular drept de generatoare G şi rază a bazei R este $S = \pi R G$.



Soluţie. Întrucât conul este circular drept, între înălţimea sa h, generatoarea sa G şi raza bazei R există relaţia $G^2 = R^2 + h^2$, obţinută prin aplicarea Teoremei lui Pitagora. Ca mai sus, un con circular drept de înălţime h şi rază a bazei R poate fi obţinut prin rotaţia graficului funcţiei

$$f : [0, h] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{R}{h} x.$$

Atunci

$$\begin{aligned}
S = \text{aria}(S_f) &= 2\pi \int_0^h f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx = 2\pi \int_0^h \frac{R}{h}x\sqrt{1+\left(\frac{R}{h}\right)^2}dx \\
&= 2\pi \frac{R}{h}\int_0^h x\sqrt{\frac{R^2+h^2}{h^2}}dx = 2\pi\frac{R}{h}\int_0^h x\sqrt{\frac{G^2}{h^2}}dx = 2\pi\frac{R}{h}\frac{G}{h}\int_0^h xdx \\
&= 2\pi\frac{RG}{h^2}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^h = 2\pi\frac{RG}{h^2}\frac{h^2}{2} = \pi RG.
\end{aligned}$$

AM2, Curs 7, 02.04.2020

Integrala improprie

În definiţia integralei Riemann, s-a presupus că intervalul de integrare $[a, b]$ este un interval închis şi mărginit, demonstrându-se mai apoi că o funcţie integrabilă este în mod necesar şi mărginită. Totuşi, apar în mod natural situaţii în care aceste condiţii nu sunt îndeplinite.

În cele ce urmează, vom extinde noţiunea de integrală Riemann pentru a acoperi aceste cazuri (interval de integrare nemărginit, respectiv integrand nemărginit pe intervalul de integrare), obţinându-se aşa-numitele **integrale improprii** sau **integrale generalizate**. Prin analogie cu seriile numerice, pentru care convergenţa sau divergenţa seriei erau definite cu ajutorul limitei şirului sumelor parţiale, vom defini convergenţa sau divergenţa unor integrale improprii cu ajutorul unui procedeu de trecere la limită pentru integrale „parţiale", pe domenii mai mici, pe care se evită situaţiile problematice în cauză.

Vom începe mai întâi cu situaţia în care intervalul de integrare este nemărginit, continuând apoi cu situaţia în care integrandul este nemărginit pe intervalul de integrare.

1 Integrale improprii în raport cu intervalul

Integralele pentru care intervalul de integrare este nemărginit se numesc **integrale improprii în raport cu intervalul**, sau de **specia (speţa) I**.

Vom studia mai întâi integrale de tipul $\int_a^\infty f(x)dx$. În acest sens, fie $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât f este integrabilă pe orice interval $[a, A]$, $A > a$. Putem atunci vorbi despre $\int_a^A f(x)dx$ pentru orice $A > a$, următorul pas fiind cel de a studia ceea ce se întâmplă când $A \to \infty$ (ne „apropiem" de $+\infty$ prin trecere la limită).

1.1 Convergenţă şi divergenţă. Integrabilitate

Definiţie. Fie $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât f este integrabilă pe orice interval $[a, A]$, $A > a$.

Dacă există limita $\lim\limits_{A\to\infty} \int_a^A f(x)dx$ şi este finită, spunem că integrala $\int_a^\infty f(x)dx$ este **convergentă** iar funcţia f este **integrabilă** pe $[a, \infty)$ (pe scurt, **integrabilă**).

Dacă limita $\lim\limits_{A\to\infty} \int_a^A f(x)dx$ nu există, sau există, dar este infinită, spunem că integrală $\int_a^\infty f(x)dx$ este **divergentă** iar funcţia f **nu este integrabilă** pe $[a, \infty)$ (pe scurt, **nu este integrabilă**).

În situaţia în care limita $\lim\limits_{A\to\infty} \int_a^A f(x)dx$ există (finită sau nu), această limită reprezintă **valoarea integralei** $\int_a^\infty f(x)dx$.

Exemple. 1. Fie integrala $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$. Funcţia

$$f_1 : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

este integrabilă pe orice interval $[0, A]$, $A > 0$, întrucât este continuă pe un astfel de interval. Observăm că

$$\lim_{A\to\infty} \int_0^A \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{A\to\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^A = \lim_{A\to\infty} \operatorname{arctg} A = \frac{\pi}{2},$$

deci integrala $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}$ este convergentă, valoarea sa este $\frac{\pi}{2}$, iar f_1 este integrabilă pe $[0,\infty)$.

2. Fie integrala $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$. Funcţia

$$f_2 : [1,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x},$$

este integrabilă pe orice interval $[1, A]$, $A > 1$, întrucât este continuă pe un astfel de interval. Observăm că

$$\lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{1}{x}dx = \lim_{A\to\infty} \ln x \Big|_1^A = \lim_{A\to\infty} \ln A = \infty,$$

deci integrala $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ este divergentă, valoarea sa fiind $+\infty$, iar f_2 nu este integrabilă pe $[1,\infty)$.

1.1.1 Integrale improprii de speţa I cu integrand pozitiv

Fie $f : [a,\infty) \to [0,\infty)$ astfel încât f este integrabilă pe orice interval $[a, A]$, $a < A$. Să notăm

$$F : [a,\infty) \to \mathbb{R}, \quad F(A) = \int_a^A f(x)dx.$$

Întrucât f este pozitivă, F este crescătoare, valoarea integralei crescând odată cu creşterea lungimii intervalului. Atunci limita $\lim_{A\to\infty} F(A)$, utilizată în definiţiile convergenţei şi divergenţei, există, finită sau nu. Are deci loc următorul rezultat, similar în natura sa cu proprietatea seriilor cu termeni pozitivi de a fi sau convergente, sau divergente către $+\infty$.

Teorema 1.1. *Fie $f : [a,\infty) \to [0,\infty)$ astfel încât f este integrabilă pe orice interval $[a, A]$, $a < A$. Atunci integrala $\int_a^\infty f(x)dx$ este fie convergentă, fie divergentă cu valoarea $+\infty$.*

1.1.2 Alte tipuri de intervale nemărginite

În mod similar definim convergenţa unor integrale de tipul $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$, cu ajutorul limitei

$$\lim_{A \to -\infty} \int_{A}^{a} f(x)dx,$$

respectiv a unor integrale de tipul $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, cu ajutorul limitei

$$\lim_{\substack{B \to \infty \\ A \to -\infty}} \int_{A}^{B} f(x)dx.$$

1.2 Proprietăţi de calcul

Integralele improprii păstrează cele mai multe proprietăţi ale integralelor definite. În particular, au loc următoarele proprietăţi de calcul, prima reprezentând **proprietatea de aditivitate în raport cu intervalul**, cea de-a doua reprezentând **proprietatea de aditivitate în raport cu funcţia**.

Teorema 1.2. *Fie $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe $[a, \infty)$. Atunci f este integrabilă pe orice subinterval $[c, \infty)$, $c > a$, şi*

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx.$$

Teorema 1.3. *Fie $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe $[a, \infty)$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Atunci $c_1 f + c_2 g$ este integrabilă pe $[a, \infty)$, şi*

$$\int_{a}^{\infty} (c_1 f(x) + c_2 g(x))dx = c_1 \int_{a}^{\infty} f(x)dx + c_2 \int_{a}^{\infty} g(x)dx$$

1.3 Criterii de convergenţă

1.3.1 Criteriul de comparaţie

Teorema 1.4. *Fie $f, g : [a, \infty) \to [0, \infty)$, astfel încât*

$$f(x) \leq g(x), \quad \text{pentru orice } x \in [a, \infty).$$

1. *Dacă $\int_{a}^{\infty} g(x)dx$ este convergentă, atunci şi $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ este convergentă.*
2. *Dacă $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ este divergentă, atunci şi $\int_{a}^{\infty} g(x)dx$ este divergentă.*

Rezultatul este uşor de reţinut (şi înţeles) ţinând seama de următoarea observaţie. Integrala pe $[a, \infty)$ a unei funcţii pozitive este fie „mică" (convergentă, cu valoare numerică), fie „mare" (divergentă), cu valoarea $+\infty$.

Cum $f \leq g$, inegalitatea se păstrează şi între cele două integrale, adică

$$\int_a^\infty f(x)dx \leq \int_a^\infty g(x)dx.$$

Dacă $\int_a^\infty g(x)dx$ este „mică" (convergentă), atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ este „şi mai mică" (tot convergentă). Dacă $\int_a^\infty f(x)dx$ este „mare" (divergentă), atunci $\int_a^\infty g(x)dx$ este „şi mai mare" (tot divergentă).

Tot de aici putem observa că nu putem trage nicio concluzie dacă $\int_a^\infty g(x)dx$ este divergentă, întrucât $\int_a^\infty f(x)dx$ este „mai mică", dar poate fi sau „mică" (convergentă), sau „mare" (divergentă). Similar, dacă $\int_a^\infty f(x)dx$ este convergentă, atunci nu putem obţine nicio concluzie.

Teorema 1.5. *Fie $f : [a, \infty) \to [0, \infty)$, integrabilă pe $[a, A]$ pentru orice $A > a$.*

1. *Dacă există $p > 1$ astfel ca*

$$\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = l \in [0, \infty)$$

atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ este convergentă.

2. *Dacă există $p \leq 1$ astfel ca*

$$\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = l \in (0, \infty]$$

atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ este divergentă.

Combinând cele două proprietăţi obţinem următorul criteriu de convergenţă util în aplicaţii.

Corolar 1.5.1. *Fie $f : [a, \infty) \to [0, \infty)$ continuă astfel încât există $p \in \mathbb{R}$ cu proprietatea*

$$\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = l \in (0, \infty).$$

Atunci

1. *Dacă $p > 1$, atunci integrala $\int_a^\infty f(x)dx$ este convergentă.*

2. *Dacă $p \leq 1$, atunci integrala $\int_a^\infty f(x)dx$ este divergentă.*

Remarcăm faptul că în situaţia în cauză, integrala $\int_a^\infty f(x)dx$ are comportament „invers" lui p. Astfel dacă p este „mic" (≤ 1), integrala este „mare" (divergentă cu valoarea $+\infty$), iar dacă p este „mare" (> 1), integrala este „mică" (convergentă).

Exemplu. Studiaţi convergenţa integralei $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}dx$.

Soluţie. Deoarece integrandul are comportarea aproximativă a lui $\frac{1}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{x^2}$ pentru $x \to \infty$, alegem $p = 2$. Atunci

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} = \lim_{x\to\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{x^4\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}} = 1 \in (0,\infty).$$

Cum $p = 2 > 1$, urmează că $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}dx$ este convergentă.

Exemplu. Studiaţi convergenţa integralei $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3+2x+3}dx$.

Soluţie. Deoarece integrandul are comportarea aproximativă a lui $\frac{\sqrt{x}}{x^3} = \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$ pentru $x \to \infty$, alegem $p = \frac{5}{2}$. Atunci

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{5}{2}} \frac{\sqrt{x}}{x^3+2x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3+2x+3} = 1 \in (0,\infty).$$

Deoarece $p = \frac{5}{2} > 1$, urmează că integrala $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3+2x+3}dx$ este convergentă.

1.4 Transformarea într-o serie numerică

Integrala $\int_a^\infty f(x)dx$ poate fi transformată într-o serie numerică. Astfel, are loc egalitatea

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^{a+1} f(x)dx + \int_{a+1}^{a+2} f(x)dx + \dots .$$

Cu notaţia $a_n = \int_{a+n}^{a+n+1} f(x)dx$, $n \geq 0$, urmează că

$$\int_a^\infty f(x)dx = \sum_{n=0}^\infty a_n$$

În acest fel, convergenţa unei integrale improprii în raport cu intervalul poate fi legată de convergenţa unei serii numerice. Desigur, transformarea integralei într-o serie numerică nu este unică, intervalul $[a,\infty)$ putând fi împărţit şi în alte moduri.

Teorema 1.6. *Fie $f : [a, \infty) \to [0, \infty)$, f continuă şi monoton descrescătoare. Atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ are aceeaşi natură cu $\sum_{n=k}^{\infty} f(n)$, unde indicele de plecare $k \in [a, \infty)$ poate fi ales convenabil.*

Exemplu. Studiaţi convergenţa integralei $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} dx$

Soluţie. Funcţia

$$f : [1, \infty) \to [0, \infty), \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}},$$

este continuă şi monoton descrescătoare pe $[1, \infty)$. Urmează că $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} dx$ are aceeaşi natură cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1}}$.

Studiem acum natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1}}$ cu ajutorul unui criteriu de comparaţie. Întrucât

$$\frac{1}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^4}} = \frac{1}{n^2},$$

iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă (serie armonică generalizată cu $p = 2 > 1$), urmează că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1}}$ este convergentă. La rândul ei, integrala $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} dx$ este convergentă, având aceeaşi natură cu această serie.

1.5 Convergenţă absolută

Definiţie. Fie $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$. Vom spune că $\int_a^\infty f(x)dx$ este **absolut convergentă**, iar f este **absolut integrabilă** pe $[a, \infty)$, dacă $\int_a^\infty |f(x)|dx$ este convergentă, adică $|f|$ este integrabilă pe $[a, \infty)$.

Se poate demonstra că dacă $\int_a^\infty f(x)dx$ este absolut convergentă, atunci este şi convergentă, nefiind însă valabilă şi reciproca (aşa cum numele sugerează, absoluta convergenţă înseamnă **mai mult** decât convergenţa). Pentru funcţii cu valori pozitive, cum $|f|$ coincide cu f, noţiunea de absolută convergenţă coincide cu noţiunea de convergenţă.

2 Integrale improprii în raport cu funcţia

Integralele pentru care integrandul este nemărginit pe intervalul de integrare se numesc **integrale improprii în raport cu funcţia**, sau de **specia (speţa) II**.

Vom studia mai întâi integrale de tipul $\int_a^b f(x)dx$ în care limita inferioară a este punct singular, în sensul că f este nemărginită într-o vecinătate a lui a.

Definiţie. Fie $f : (a,b] \to \mathbb{R}$. Vom spune că a este **punct singular** pentru funcţia f dacă f este mărginită pe orice subinterval $[A,b]$, $a < A < b$, dar f este nemărginită pe $(a,b]$.

2.0.1 Prototip

Un prototip al acestor integrale este integrala $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$, $p > 0$, în care integrandul nu este definit în $x = 0$, punctul singular, nefiind nici mărginit pe $(0,1]$, întrucât limita sa la dreapta în $x = 0$ este $+\infty$.

Fie $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ astfel încât f este integrabilă pe orice interval $[A,b]$, $a < A < b$. Putem atunci vorbi despre $\int_A^b f(x)dx$ pentru orice $a < A < b$, următorul pas fiind cel de a studia ceea ce se intâmplă când $A \to a$, punctul singular al funcţiei (ne „apropiem" de punctul singular prin trecere la limită).

2.1 Convergenţă şi divergenţă. Integrabilitate

Definiţie. Fie $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ astfel încât f este integrabilă pe orice interval $[A,b]$, $a < A < b$.

Dacă există limita $\lim\limits_{\substack{A\to a\\A>a}} \int_A^b f(x)dx$ şi este finită, spunem că integrala $\int_a^b f(x)dx$ este **convergentă** iar funcţia f este **integrabilă** pe $(a,b]$ (pe scurt, **integrabilă**).

Dacă limita $\lim\limits_{\substack{A\to a\\A>a}} \int_A^b f(x)dx$ nu există, sau există, dar este infinită, spunem că integrală $\int_a^b f(x)dx$ este **divergentă** iar funcţia f **nu este integrabilă** pe $(a,b]$ (pe scurt, **nu este integrabilă**).

În situaţia în care limita $\lim\limits_{\substack{A\to a\\A>a}} \int_A^b f(x)dx$ există (finită sau nu), această limită reprezintă **valoarea integralei** $\int_a^b f(x)dx$.

Exemple. 1. Fie integrala $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$, $p \in (0,1)$. Punctul singular al funcţiei este $x = 0$, întrucât $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{x^p} = +\infty$. Funcţia

$$f_1 : (0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \frac{1}{x^p},$$

este integrabilă pe orice interval $[A,1]$, $0 < A < 1$, întrucât este continuă pe un astfel de interval. Observăm că

$$\lim_{\substack{A\to 0\\ A>0}} \int_A^1 \frac{1}{x^p}dx = \lim_{A\to 0} \int_A^1 x^{-p}dx = \lim_{\substack{A\to 0\\ A>0}} \left(\frac{x^{1-p}}{1-p} \Bigg|_A^1 \right)$$

$$= \lim_{\substack{A\to 0\\ A>0}} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{A^{1-p}}{1-p} \right) = \frac{1}{1-p}.$$

Integrala $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$, $p \in (0,1)$ este deci convergentă, cu valoarea $\frac{1}{1-p}$.

2. Fie integrala $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$. Ca mai sus, punctul singular al funcţiei este $x = 0$, funcţia

$$f_2 : (0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x},$$

este integrabilă pe orice interval $[A,1]$, $0 < A < 1$, iar

$$\lim_{\substack{A\to 0\\ A>0}} \int_A^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\substack{A\to 0\\ A>0}} \ln x \Bigg|_A^1 = \lim_{\substack{A\to 0\\ A>0}} (\ln 1 - \ln A) = 0 - (-\infty) = +\infty.$$

Integrala $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ este deci divergentă, cu valoarea $+\infty$.

2.1.1 Integrale improprii de speţa II cu integrand pozitiv

Fie $f : (a,b] \to [0,\infty)$ astfel încât f este integrabilă pe orice interval $[A,b]$, $a < A < b$. Putem obţine următorul rezultat analog celui corespunzător pentru integrale improprii de speţa I.

Teorema 2.1. *Fie $f : (a,b] \to [0,\infty)$ astfel încât f este integrabilă pe orice interval $[A,b]$, $a < A < b$. Atunci integrala $\int_a^b f(x)dx$ este fie convergentă, fie divergentă cu valoarea $+\infty$.*

2.2 Proprietăţi de calcul

Au loc următoarele proprietăţi de calcul, similare celor pe care le au integralele improprii de speţa I.

Teorema 2.2. *Fie $f : (a,b] \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe $(a,b]$. Atunci f este integrabilă pe orice subinterval $(a,c]$, $a < c < b$, şi*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Teorema 2.3. *Fie $f, g : (a,b] \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe $(a,b]$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Atunci $c_1 f + c_2 g$ este integrabilă pe $(a,b]$, şi*

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))dx = c_1 \int_a^b f(x)dx + c_2 \int_a^b g(x)dx.$$

2.3 Criterii de convergenţă

Teorema 2.4. *Fie $f : (a,b] \to [0,\infty)$, integrabilă pe $[A,b]$ pentru orice $a < A < b$.*

1. *Dacă există $p < 1$ astfel ca*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} (x-a)^p f(x) = l \in [0,\infty),$$

atunci $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă.

2. *Dacă există $p \geq 1$ astfel ca*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} (x-a)^p f(x) = l \in (0,\infty],$$

atunci $\int_a^b f(x)dx$ este divergentă.

Demonstraţia este similară demonstraţiei Teoremei 1.5, criteriul corespunzător de convergenţă pentru integrale improprii de specia I.

Corolar 2.4.1. *Fie $f : (a,b] \to [0,\infty)$ continuă astfel încât există $p \in \mathbb{R}$ cu proprietatea*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} (x-a)^p f(x) = l \in (0,\infty).$$

Atunci

1. *Dacă $p < 1$, atunci integrala $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă.*
2. *Dacă $p \geq 1$, atunci integrala $\int_a^b f(x)dx$ este divergentă.*

Remarcăm faptul că în situaţia în cauză, integrala $\int_a^b f(x)dx$ are comportamentul lui p. Astfel dacă p este „mic" ($p < 1$), integrala este „mică" (convergentă), iar dacă p este „mare" (> 1), integrala este „mare" (divergentă cu valoarea $+\infty$).

Exemplu. Studiaţi convergenţa integralei $\int_0^1 \frac{1}{5x^2 - x^3}dx$.

Soluţie. Deoarece
$$\int_0^1 \frac{1}{5x^2 - x^3}dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2(5-x)}dx,$$
urmează că $x = 0$ este punct singular pentru integrand (cealaltă rădăcină a numitorului, $x = 5$, nu aparţine intervalului de integrare). Deoarece termenul care anulează numitorul în punctul singular, x^2, are puterea 2, alegem $p = 2$. Atunci

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x-0)^2 \frac{1}{x^2(5-x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{5-x} = \frac{1}{5} \in (0,\infty).$$

Cum $p = 2 > 1$, urmează că integrala $\int_0^1 \frac{1}{5x^2 - x^3}dx$ este divergentă, cu valoarea $+\infty$.

2.4 Convergenţă absolută

Definiţie. Fie $f : (a,b] \to \mathbb{R}$. Vom spune că $\int_a^b f(x)dx$ este **absolut convergentă**, iar f este **absolut integrabilă** pe $(a,b]$ dacă $\int_a^b |f(x)|dx$ este convergentă, adică $|f|$ este integrabilă pe $(a,b]$.

Se poate demonstra că dacă $\int_a^b f(x)dx$ este absolut convergentă, atunci este şi convergentă pe $(a,b]$, nefiind însă valabilă şi reciproca (din nou, aşa cum numele sugerează, absoluta convergenţă înseamnă **mai mult** decât convergenţa). Pentru funcţii cu valori pozitive, cum $|f|$ coincide cu f, noţiunea de absolută convergenţă coincide cu noţiunea de convergenţă.

2.4.1 Integrale improprii cu limita superioară punct singular

Integralele de tipul $\int_a^b f(x)dx$ în care limita superioară b este punct singular, în sensul că f este nemărginită într-o vecinătate a lui b, se studiază analog celor în care limita inferioară este punct singular, utilizând „apropierea" de punctul singular b prin trecere la limită.

Definiţie. Fie $f : [a,b) \to \mathbb{R}$. Vom spune că b este **punct singular** pentru funcţia f dacă f este mărginită pe orice subinterval $[a, A]$, $a < A < b$, dar f este nemărginită pe $[a,b)$.

2.4.2 Prototip

Un prototip al acestor integrale este integrala $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^p}dx$, $p > 0$, în care integrandul nu este definit în $x = 1$, punctul singular, nefiind nici mărginit pe $[0,1)$, întrucât limita sa la stânga în $x = 1$ este $+\infty$.

Prin analogie, pentru integralele improprii cu limita superioară punct singular se pot obţine următoarele criterii de convergenţă.

2.4.3 Criterii de convergenţă

Teorema 2.5. *Fie $f : [a, b) \to [0, \infty)$, integrabilă pe $[a, A]$ pentru orice $a < A < b$.*

1. *Dacă există $p < 1$ astfel ca*
$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} (b - x)^p f(x) = l \in [0, \infty)$$
atunci $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă.

2. *Dacă există $p \geq 1$ astfel ca*
$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} (b - x)^p f(x) = l \in (0, \infty]$$
atunci $\int_a^b f(x)dx$ este divergentă.

Corolar 2.5.1. *Fie $f : [a, b) \to [0, \infty)$ continuă astfel încât există $p \in \mathbb{R}$ cu proprietatea*

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} (b - x)^p f(x) = l \in (0, \infty).$$

Atunci

1. *Dacă $p < 1$, atunci integrala $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă.*
2. *Dacă $p \geq 1$, atunci integrala $\int_a^b f(x)dx$ este divergentă.*

Exemplu. Studiaţi convergenţa integralei $\displaystyle\int_2^5 \frac{x^2}{(x - 1)\sqrt{5 - x}} dx$.

Soluţie. Observăm că $x = 5$ este punct singular, întrucât celălalt punct în care se anulează numitorul, $x = 1$, nu aparţine intervalului de integrare. Deoarece termenul care anulează numitorul, $\sqrt{5 - x}$, poate fi scris ca $(5 - x)^{\frac{1}{2}}$, având puterea $\frac{1}{2}$, alegem $p = \frac{1}{2}$. Urmează că

$$\lim_{\substack{x \to 5 \\ x < 5}} (5 - x)^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{(x - 1)\sqrt{5 - x}} = \lim_{\substack{x \to 5 \\ x < 5}} \frac{x^2}{x - 1} = \frac{25}{4} \in (0, \infty).$$

Deoarece $p = \frac{1}{2} < 1$, urmează că integrala $\displaystyle\int_2^5 \frac{x^2}{(x - 1)\sqrt{5 - x}} dx$ este convergentă.

AM2, Curs 8, 09.04.2020
Integrala improprie (continuare)

0.1 Integrale improprii cu mai mult de un punct singular

Pot fi întâlnite şi integrale improprii de speţa II cu mai mult de un punct singular, sau integrale improprii în care atât intervalul de integrare este nemărginit, cât şi funcţia de integrat este nemărginită pe acest interval, având puncte singulare finite. Acestea din urmă combină atât caracteristicile integralelor improprii de speţa I, cât şi ale celor de speţa II.

În această situaţie, se scrie integrala ca suma mai multor integrale improprii, fiecare cu câte un unic punct singular, respectiv ca suma dintre o integrală improprie de speţa I şi una de speţa II.

> **Exemplu.** Studiaţi convergenţa integralei $\int_1^4 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2}dx$.

Soluţie. În această situaţie, atât $x = 1$ cât şi $x = 4$ sunt puncte singulare, fiind rădăcini ale numitorului. Scriem integrala sub forma

$$\int_1^4 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2}dx = \int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2}dx + \int_2^4 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2}dx,$$

ca suma între o integrală cu limita inferioară punct singular (prima integrală) şi o integrală cu limita superioară punct singular (a doua integrală). Deoarece

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x-1)^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x^3}{(4-x)^2} = \frac{1}{9} \in (0, \infty),$$

iar $p = \frac{1}{2} < 1$, urmează că $\int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2}dx$ este convergentă.

Deoarece

$$\lim_{\substack{x\to 4\\ x<4}} (4-x)^2 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2} = \lim_{\substack{x\to 4\\ x<4}} \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} = \frac{64}{\sqrt{3}} = \frac{64\sqrt{3}}{3} \in (0, \infty),$$

iar $p = 2 > 1$, urmează că integrala $\int_2^4 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2}dx$ este divergentă. Fiind suma dintre o integrală convergentă şi una divergentă, integrala $\int_1^4 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}(4-x)^2}dx$ este divergentă.

Integrala curbilinie

Până în momentul de faţă, s-a presupus că reprezentarea geometrică a domeniului de integrare este o parte a unei drepte, anume un segment (pentru integralele definite şi unele integrale improprii), respectiv o semidreaptă sau o dreaptă (pentru alte integrale improprii). În cele ce urmează vom renunţa la această restricţie, domeniul de integrare fiind acum o curbă din plan sau din spaţiu. Desigur, este necesar să definim mai întâi conceptul, intuitiv evident, de curbă continuă.

1 Curbe în plan şi în spaţiu

1.1 Noţiuni de bază

1.1.1 Curbă continuă (drum continuu) în spaţiu

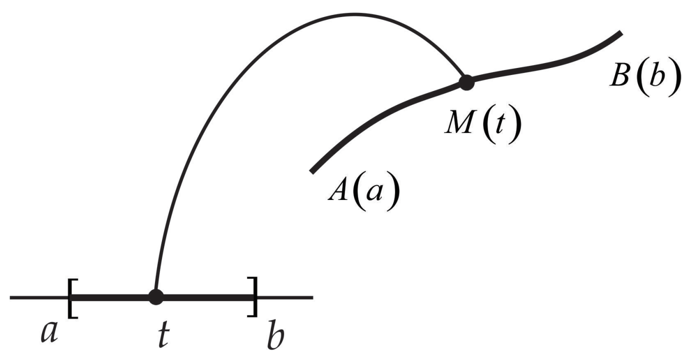
Numim **curbă continuă (drum continuu) în spaţiu** o mulţime de forma

$$(C) = \{(x(t), y(t), z(t)),\ t \in [a,b],\ x, y, z \text{ continue pe } [a,b]\}.$$

Reprezentarea

$$(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases},\ t \in [a,b],$$

se numeşte **reprezentarea parametrică** a curbei (C), t numindu-se **parametrul** curbei. Poziţia unui punct M pe curbă se poate indica precizând valoarea parametrului care-i corespunde, sub forma $M = M(t_0)$, $t_0 \in [a,b]$. O curbă în $\mathbb{R}^3$ se mai numeşte şi **curbă în spaţiu**.



În situaţia în care $x, y, z \in C^1[a,b]$ (funcţiile care definesc reprezentarea parametrică sunt derivabile cu derivata continuă), se spune că (C) este o **curbă de clasă C^1 (un drum de clasă C^1)** sau o **curbă cu tangentă continuă (un drum cu tangentă continuă)**.

Dacă (C) nu se autointersectează, ea se numeşte **simplă**, iar dacă punctul iniţial $A(a)$ şi punctul final $B(b)$ coincid, curba se numeşte **închisă**.

1.1.2 Curbe plane

Similar se definesc noţiunile corespunzătoare pentru curbe în plan, reprezentarea parametrică fiind de această dată

$$(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},\ t \in [a,b].$$

1.1.3 Puncte critice

Fiind dată o curbă în spaţiu de clasă C^1, reprezentată parametric sub forma

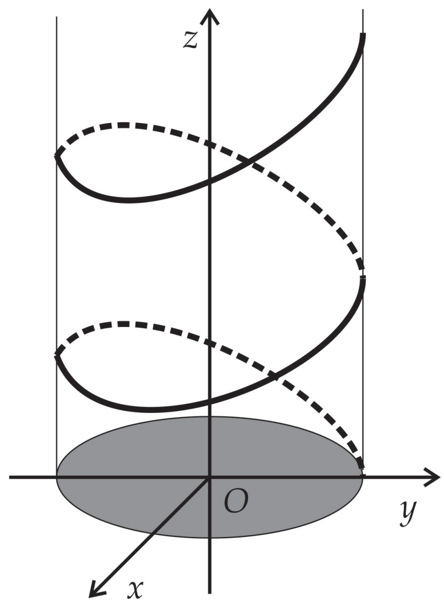
$$(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases},\ t \in [a,b],$$

vom spune că $M(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ este un **punct critic** al curbei (C) dacă $x'(t_0) = y'(t_0) = z'(t_0) = 0$ (derivatele funcţiilor care definesc reprezentarea parametrică se anulează simultan). Un punct al unei curbe de clasă C^1 care nu este punct critic se numeşte **punct regulat**.

1.1.4 Curbă netedă

O curbă cu tangentă continuă şi fără puncte critice se numeşte **curbă netedă**. O curbă care nu este netedă, dar se poate scrie ca reuniunea unui număr finit de curbe netede se numeşte **curbă netedă pe porţiuni**.

Analog se definesc noţiunile corespunzătoare pentru curbe în plan.



Exemplu. Curba în spaţiu

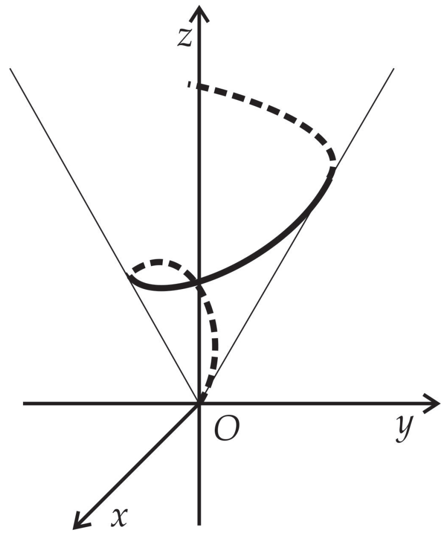
$$(C): \begin{cases} x = r\cos(kt) \\ y = r\sin(kt) \\ z = ct \end{cases}, \; t \in [a,b], \; r, c, k \neq 0,$$

situată pe suprafaţa cilindrului $x^2 + y^2 = r^2$, se numeşte **elice cilindrică**. Cum funcţiile care definesc reprezentarea parametrică sunt de clasă C^1, iar $z'(t) = c \neq 0$, elicea cilindrică este o curbă netedă.

Exemplu. Curba în spaţiu

$$(C): \begin{cases} x = rt\cos(kt) \\ y = rt\sin(kt) \\ z = ct \end{cases}, \; t \in [a,b], \; r, c, k \neq 0,$$

situată pe suprafaţa conului $x^2 + y^2 - \frac{r^2}{c^2}z^2 = 0$, se numeşte **elice conică**. Cum



funcţiile care definesc reprezentarea parametrică sunt de clasă C^1, iar $z'(t) = c \neq 0$, elicea conică este o curbă netedă.

1.1.5 Alte moduri de a defini o curbă în $\mathbb{R}^3$

Reprezentarea parametrică

$$(C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ t \in [a,b],$$

este echivalentă cu

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a,b],$$

unde $\vec{r}(t)$ este vectorul de poziţie al punctului curent $M(t)$, numită **reprezentarea parametrică vectorială**. Curbele pot fi reprezentate şi în alte moduri, de exemplu ca intersecţia unor mulţimi (**reprezentarea implicită**), sau precizând valorile a două coordonate ca funcţie de cea de-a treia (**reprezentarea explicită**). Pentru consideraţiile următoare, cea mai ,,bună" reprezentare va fi cea parametrică.

Exemplu. Curba

$$(C): \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}, \quad R > 0,$$

reprezintă un cerc, definit în mod implicit ca intersecţia dintre sfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ cu centrul în origine şi cu rază R şi planul $x + y + z = 0$.

Curba definită explicit prin

$$(C): \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = 3x + 2 \end{cases}, \quad x \in [0,2],$$

reprezintă un segment al dreptei $x = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{3}$, cu capetele în $A(0,1,2)$ şi

$B(2,5,8)$.

1.1.6 Transformarea unei reprezentări explicite într-una parametrică

Să observăm că o reprezentare explicită a unei curbe poate fi transformată întotdeauna într-una parametrică alegându-se variabila în funcţie de care sunt reprezentate celelalte două ca parametru, iar o curbă de clasă C^1 definită explicit este întotdeauna netedă. Într-adevăr, dacă

$$(C) : \begin{cases} y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases}, \quad x \in [a,b], \quad f, g \in C^1[a,b],$$

este o curbă de clasă C^1, atunci o reprezentare parametrică a ei este

$$(C) : \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \\ z = g(t) \end{cases}, \quad t \in [a,b],$$

iar $t' = 1 \neq 0$.

1.1.7 Orientarea unei curbe

Pe o curbă dată parametric se pot defini două **orientări (sensuri de parcurgere)**. Sensul pozitiv este cel al creşterii argumentului. În situaţia în care o curbă este definită prin consideraţii geometrice, reprezentarea parametrică fiind absentă, sensul pozitiv va fi cel trigonometric (un observator care se deplasează pe frontiera domeniului vede întotdeauna domeniul la stânga sa).

1.2 Lungimea unei curbe

Intuitiv, lungimea unei curbe continue s-ar putea defini ca limita lungimilor unui şir de linii frînte aproximante. Totuşi, ceea ce este poate mai puţin intuitiv este faptul că există curbe continue cu multe „salturi abrupte" şi, în consecinţă, cu lungime infinită. Astfel, formule de calcul ale lungimii vor putea fi obţinute doar pentru curbe cu proprietăţi mai mari de regularitate (netede pe porţiuni).

1.2.1 Formula de calcul a lungimii unei curbe

Teorema 1.1. *Fie*

$$(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ t \in [a,b],$$

o curbă în spaţiu cu tangentă continuă. Atunci (C) *este rectificabilă (are lungime finită) , iar*

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

Conform proprietăţii de aditivitate a integralei definite în raport cu domeniul, formula de mai sus se poate extinde imediat şi pentru curbe cu tangentă continuă pe porţiuni.

Exemplu. Determinaţi lungimea curbei

$$(C): \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = ct \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi], \ r > 0.$$

Soluţie. Au loc egalităţile

$$x'(t) = -r\sin t, \quad y'(t) = r\cos t, \quad z'(t) = c.$$

Atunci

$$\begin{aligned} l(C) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[-r\sin t]^2 + [r\cos t]^2 + [c]^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + c^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + c^2} dt = 2\pi\sqrt{r^2 + c^2}. \end{aligned}$$

Se poate observa că elicea de mai sus are ca punct iniţial $A(r, 0, 0)$, iar ca punct final $B(r, 0, 2\pi c)$, cu aceleaşi valori ale coordonatelor x şi y, dar cu z diferit, între timp parametrul t parcurgând intervalul de periodicitate $[0, 2\pi]$ pentru cos şi sin. Putem spune că (C) este o **spiră** a unei elice de rază r şi **pas** $2\pi c$.

1.2.2 Formula de calcul a lungimii unei curbe plane

Similar, fie

$$(C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ t \in [a, b],$$

o curbă plană cu tangentă continuă. Atunci

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

1.3 Elementul de arc (elementul de lungime)

1.3.1 Elementul de lungime în spaţiu

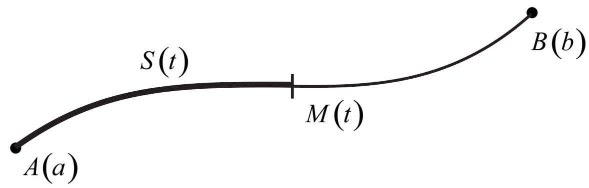
Fie

$$(C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ t \in [a, b],$$

o curbă cu tangentă continuă. Definim $s : [a, b] \to [0, \infty)$ prin

$$s(t) = \text{ lungimea porţiunii din } (C) \text{ cu capetele } A(a) \text{ şi } M(t).$$

Conform celor de mai sus,



$$s(t) = \int_a^t \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2 + [z'(u)]^2} du,$$

de unde, ţinând seama că $ds = s'(t)dt$,

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

Diferenţiala ds de mai sus poartă numele de **elementul de arc (elementul de lungime)** al curbei (C).

1.3.2 Elementul de lungime în plan (coordonate carteziene)

Similar, fie

$$(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ t \in [a, b],$$

o curbă plană cu tangentă continuă. Atunci

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

2 Integrale curbilinii de specia (speţa) I

Reamintim că integrala Riemann a unei funcţii definite pe un interval a fost definită cu ajutorul unui procedeu de aproximare. Mai precis, dat fiind intervalul de integrare $[a, b]$, s-au construit diviziuni ale acestuia, în fiecare subinterval astfel determinat alegându-se câte un punct intermediar. Pe baza acestor elemente, s-au construit sume Riemann în care fiecare subinterval „contribuia" cu valoarea funcţiei în punctul intermediar, înmulţită cu lungimea subintervalului.

2.1 Definiţie

Vom folosi un procedeu asemănător pentru a defini noţiunea de integrală curbilinie de specia I. Fie

$$(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ t \in [a, b],$$

o curbă netedă în spaţiu şi $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ astfel încât $(C) \subset D$. Fie de asemenea

$$\Delta = \{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n\}, \quad \text{cu} \quad a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b.$$

o diviziune a intervalului $[a, b]$, care determină pe (C) punctele

$$A_0(t_0),\ A_1(t_1), \ldots, A_n(t_n).$$

Pe fiecare arc de curbă $\overset{\frown}{A_0A_1}$, $\overset{\frown}{A_1A_2}$, $\ldots$, $\overset{\frown}{A_{n-1}A_n}$ alegem câte un punct intermediar

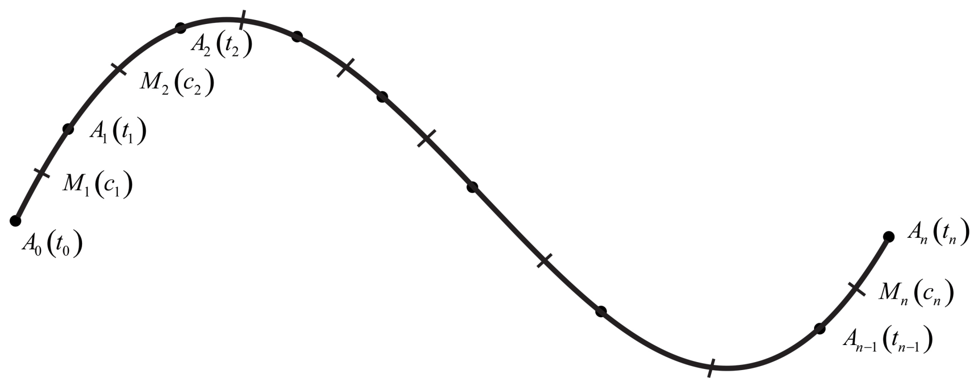
$$M_1(c_1),\ M_2(c_2),\ \ldots\ , M_n(c_n), \quad t_{i-1} \le c_i \le t_i,\ 1 \le i \le n.$$

Aceste puncte determină un sistem de puncte intermediare

$$S = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}.$$

Numim atunci **sumă Riemann asociată diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare** S suma

$$\sigma_\Delta(F,S) = \sum_{i=1}^{n} F(x(c_i), y(c_i), z(c_i))\, l(\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}).$$



Definiţie. Dacă există un număr real I astfel încât oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că

oricare ar fi diviziunea Δ cu $\max\limits_{1\le i\le n} l(\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}) < \delta_\varepsilon$ şi oricare ar fi sistemul de puncte S asociat lui Δ, are loc inegalitatea

$$|\sigma_\Delta(F,S) - I| < \varepsilon,$$

atunci I se numeşte **integrala curbilinie de specia (speţa) I** a funcţiei F pe curba (C) şi se notează

$$\int_C F(x,y,z)ds.$$

Integrala curbilinie de specia I se mai numeşte şi **integrala curbilinie în raport cu elementul de lungime**.

2.2 Formula de calcul

Are loc următoarea formulă, prin intermediul căreia calculul unei integrale curbilinii de specia I se reduce la calculul unei integrale definite, o formulă similară având loc şi pentru curbe plane.

Teorema 2.1. *Fie*

$$(C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases},\ t \in [a, b],$$

o curbă netedă în spaţiu şi fie $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *astfel încât* $(C) \subset D$*, iar* F *continuă pe* D*. Atunci*

$$\int_C F(x, y, z)ds = \int_a^b F(x(t), y(t), z(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}dt.$$

Pentru $F \equiv 1$ (funcţia constantă 1), folosind şi Teorema 1.1, obţinem că

$$\int_C ds = l(C),$$

adică **integrând funcţia constantă** 1 **în raport cu elementul de lungime al unei curbe obţinem lungimea acelei curbe**.

2.2.1 Curbe plane (coordonate carteziene)

Similar, fie

$$(C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},\ t \in [a, b],$$

o curbă netedă în plan şi fie $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ astfel încât $(C) \subset D$, iar F continuă pe D. Atunci

$$\int_C F(x, y)ds = \int_a^b F(x(t), y(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt.$$

2.2.2 Procedeul de înlocuire

Din cele de mai sus, se observă că determinarea valorii integralei începe cu operaţia de **înlocuire**. Mai precis, coordonatele x, y, z se înlocuiesc cu expresiile acestora date de reprezentarea parametrică a curbei, iar pentru calculul lui ds se înlocuiesc de această dată derivatele x', y', z'.

Exemplu. Determinaţi $\int_C xyds$, unde (C) este curba plană definită explicit prin $(C): y = x^2$, $x \in [-1, 1]$.

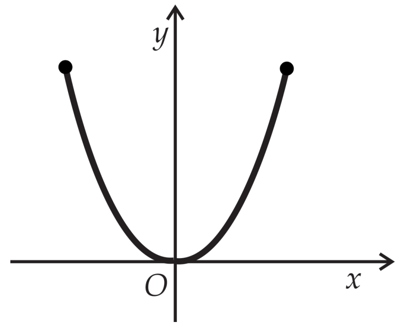
Soluţie. Curba (C) se poate reprezenta parametric alegând x ca parametru. Se obţine

$$(C): \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases},\ t \in [-1, 1] \implies x'(t) = 1, y'(t) = 2t \implies ds = \sqrt{1 + 4t^2}dt.$$

Atunci

$$\int_C xyds = \int_{-1}^1 t \cdot t^2 \cdot \sqrt{1 + 4t^2}dt = \int_{-1}^1 t^3\sqrt{1 + 4t^2}dt = 0,$$

deoarece intervalul de integrare $[-1, 1]$ este simetric faţă de origine, iar integrandul este funcţie impară.



2.3 Proprietăţi de calcul

2.3.1 Independenţa de sensul de parcurgere

Fie

$$\overset{\frown}{AB} : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ t \in [a,b],$$

o curbă netedă şi fie $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ astfel ca $\overset{\frown}{AB} \subset D$, iar F continuă pe D. Atunci

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} F(x,y,z)ds = \int_{\overset{\frown}{BA}} F(x,y,z)ds,$$

adică valoarea integralei **nu depinde** de sensul de parcurgere al curbei $\overset{\frown}{AB}$, proprietate motivată de faptul că, în definiţia de mai sus, lungimea $l(\overset{\frown}{A_{i-1}A_i})$ nu depinde de sensul de parcurgere al arcului.

Întrucât calculul integralelor curbilinii de specia I se poate reduce, în condiţiile date, la calculul unei integrale definite, integrala curbilinie de specia I moşteneşte unele dintre proprietăţile de calcul ale integralei definite.

2.3.2 Aditivitatea în raport cu funcţia

Fie

$$(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ t \in [a,b],$$

o curbă netedă şi fie $F_1, F_2 : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ astfel încât $(C) \subset D$, iar F_1, F_2 continue pe D. Fie deasemenea $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\int_C (c_1 F_1(x,y,z) + c_2 F_2(x,y,z))ds = c_1 \int_C F_1(x,y,z)ds + c_2 \int_C F_2(x,y,z)ds.$$

2.3.3 Aditivitatea în raport cu domeniul de integrare

Fie $\overset{\frown}{AB}$ o curbă netedă şi M un punct pe $\overset{\frown}{AB}$. Fie deasemenea $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ astfel ca $\overset{\frown}{AB} \subset D$. Atunci

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} F(x,y,z)ds = \int_{\overset{\frown}{AM}} F(x,y,z)ds + \int_{\overset{\frown}{MB}} F(x,y,z)ds.$$

AM2, Curs 9, 16.04.2020
Integrale curbilinii de specia (speţa) II

1 Integrale curbilinii de specia (speţa) II

1.1 Definiţie

Din nou, vom folosi un procedeu de sumare pentru a defini noţiunea de integrală curbilinie de specia II. Fie

$$(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ t \in [a, b],$$

o curbă netedă în spaţiu şi fie $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{\imath} + Q(x, y, z)\vec{\jmath} + R(x, y, z)\vec{k}$$

astfel încât $(C) \subset D$. Fie de asemenea

$$\Delta = \{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n\}, \quad \text{cu} \quad a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b,$$

o diviziune a intervalului $[a, b]$, care determină pe (C) punctele

$$A_0(t_0),\ A_1(t_1), \ldots, A_n(t_n).$$

Pe fiecare arc de curbă $\overset{\frown}{A_0 A_1}$, $\overset{\frown}{A_1 A_2}, \ldots, \overset{\frown}{A_{n-1} A_n}$ alegem câte un punct intermediar

$$M_1(c_1),\ M_2(c_2),\ \ldots\ , M_n(c_n), \quad t_{i-1} \leq c_i \leq t_i,\ 1 \leq i \leq n.$$

Aceste puncte determină un sistem de puncte intermediare

$$S = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}.$$

Numim atunci **sumă Riemann asociată diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare** S suma

$$\begin{aligned} \sigma_\Delta(\vec{F}, S) = \sum_{i=1}^{n} & P(x(c_i), y(c_i), z(c_i))(x_i - x_{i-1}) + Q(x(c_i), y(c_i), z(c_i))(y_i - y_{i-1}) \\ & + R(x(c_i), y(c_i), z(c_i))(z_i - z_{i-1}). \end{aligned}$$

Definiţie. Dacă există un număr real I astfel încât oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că

oricare ar fi diviziunea Δ cu $\max\limits_{1 \leq i \leq n} l(\overset{\frown}{A_{i-1} A_i}) < \delta_\varepsilon$ şi oricare ar fi sistemul de puncte S asociat lui Δ, are loc inegalitatea

$$\left| \sigma_\Delta(\vec{F}, C) - I \right| < \varepsilon,$$

atunci I se numeşte **integrala curbilinie de specia (speţa) II** a funcţiei $\vec{F}$ pe curba (C) şi se notează

$$\int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

sau

$$\int_C \vec{F}(x,y,z)d\vec{r}$$

În situaţia în care curba (C) este închisă, se pot folosi notaţiile $\oint \vec{F}d\vec{r}$, $\oint \vec{F}d\vec{r}$, acestea indicând şi sensul de parcurgere al lui (C)

Integrala curbilinie de specia II se mai numeşte şi **integrala curbilinie în raport cu coordonatele**, datorită prezenţei lui dx, dy, dz. Funcţiile P, Q, R se mai numesc şi **componentele** lui $\vec{F}$.

1.2 Formula de calcul

Are loc următoarea formulă, prin intermediul căreia calculul unei integrale curbilinii de specia II se reduce la calculul unei integrale definite, o formulă similară având loc şi pentru curbe plane.

Teorema 1.1. *Fie*

$$(C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ t \in [a,b],$$

o curbă netedă în spaţiu şi fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ astfel încât $(C) \subset D$, iar P, Q, R continue pe D. Atunci

$$\int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_a^b \big[P(x(t),y(t),z(t))x'(t)$$
$$+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\big]\,dt.$$

Similar, fie

$$(C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ t \in [a,b],$$

o curbă netedă în plan şi fie $P, Q : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ astfel încât $(C) \subset D$, iar P, Q continue pe D. Atunci

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \big[P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\big]\,dt.$$

Formulele de mai sus se extind şi pentru cazul curbelor netede pe porţiuni.

1.2.1 Procedeul de înlocuire

Din cele de mai sus, se observă că, din nou, determinarea valorii integralei începe cu operaţia de **înlocuire**.

Exemplu. Determinaţi

$$\int_C xyzdx + xydy + xdz, \quad (C) : \begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \\ z = \sqrt{3}t \end{cases}, \ t \in [0,1].$$

Soluţie. Calculăm mai întâi dx, dy, dz. Observăm că

$$dx = e^t dt, \quad dy = -e^{-t}dt, \quad dz = \sqrt{3}dt.$$

Atunci, înlocuind x, y, z şi dx, dy, dz, obţinem

$$\begin{aligned}
\int_C xyzdx + xydy + xdz &= \int_0^1 \left(e^t \cdot e^{-t} \cdot \sqrt{3}t \cdot e^t + e^t \cdot e^{-t} \cdot (-e^{-t}) + e^t \cdot \sqrt{3}\right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\sqrt{3}te^t - e^{-t} + \sqrt{3}e^t\right) dt \\
&= \sqrt{3}\int_0^1 te^t dt - \int_0^1 e^{-t}dt + \sqrt{3}\int_0^1 e^t dt \\
&= \sqrt{3}\left(\int_0^1 t(e^t)'dt\right) - \frac{e^{-t}}{-1}\Bigg|_0^1 + \sqrt{3}e^t\Bigg|_0^1 \\
&= \sqrt{3}\left(te^t\Bigg|_0^1 - \int_0^1 e^t dt\right) + \frac{1}{e^t}\Bigg|_0^1 + \sqrt{3}e^t\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{e} - 1 + \sqrt{3}e.
\end{aligned}$$

1.3 Proprietăţi de calcul

1.3.1 Dependenţa de sensul de parcurgere

Fie

$$\overset{\frown}{AB} : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ t \in [a,b],$$

o curbă netedă şi fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ astfel ca $\overset{\frown}{AB} \subset D$, iar P, Q, R continue pe D. Atunci

$$\begin{aligned}
&\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \\
&\quad = -\int_{\overset{\frown}{BA}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz,
\end{aligned}$$

adică valoarea integralei **depinde** de sensul de parcurgere al curbei $\overset{\frown}{AB}$, în sensul că îşi schimbă semnul atunci când se schimbă sensul de parcurgere al curbei.

Această proprietate este motivată de faptul că, în definiţia de mai sus, diferenţele între coordonate $x_i - x_{i-1}, y_i - y_{i-1}, z_i - z_{i-1}$ îşi schimbă semnul atunci când se schimbă sensul de parcurgere al curbei, devenind, respectiv, $x_{i-1} - x_i$, $y_{i-1} - y_i$, $z_{i-1} - z_i$.

Întrucât calculul integralelor curbilinii de specia II se poate reduce, în condiţiile date, la calculul unei integrale definite, şi integrala curbilinie de specia II are proprietăţile de aditivitate ale integralei definite.

1.3.2 Aditivitatea în raport cu funcţia

Fie

$$(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ t \in [a,b],$$

o curbă netedă şi fie $\vec{F}_1, \vec{F}_2 : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$ cu componentele continue pe D astfel încât $(C) \subset D$. Fie deasemenea $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\int_C (c_1\vec{F}_1(x,y,z) + c_2\vec{F}_2(x,y,z))d\vec{r} = c_1 \int_C \vec{F}_1(x,y,z)d\vec{r} + c_2 \int_C \vec{F}_2(x,y,z)d\vec{r}.$$

1.3.3 Aditivitatea în raport cu domeniul de integrare

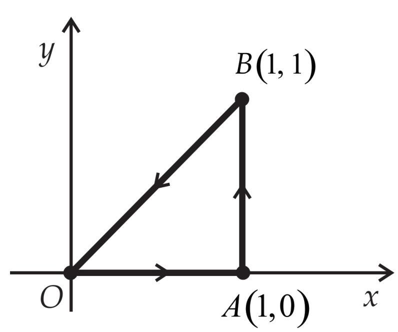
Fie $\overset{\frown}{AB}$ o curbă netedă şi M un punct pe $\overset{\frown}{AB}$. Fie deasemenea $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$ cu componentele continue pe D astfel ca $\overset{\frown}{AB} \subset D$. Atunci

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{F}(x,y,z)d\vec{r} = \int_{\overset{\frown}{AM}} \vec{F}(x,y,z)d\vec{r} + \int_{\overset{\frown}{MB}} \vec{F}(x,y,z)d\vec{r}.$$

Exemplu. Determinaţi

$$\int_C y^2dx + x^2dy,$$

unde (C) este triunghiul cu vârfurile $O(0,0)$, $A(1,0)$ şi $B(1,1)$, parcurs în sens trigonometric.



Soluţie. Curba (C) este netedă pe porţiuni, iar

$$\int_C y^2dx + x^2dy = \int_{OA} y^2dx + x^2dy + \int_{AB} y^2dx + x^2dy + \int_{BO} y^2dx + x^2dy.$$

Putem parametriza segmentele OA şi AB prin

$$OA : \begin{cases} x = t,\ t \in [0,1], \\ y = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow\ dx = dt,\ dy = 0$$

$$AB : \begin{cases} x = 1, \\ y = t,\ t \in [0,1] \end{cases} \qquad \Longrightarrow\ dx = 0,\ dy = dt.$$

Rămâne să precizăm (şi comentăm) parametrizarea lui BO. Acest segment face parte din prima bisectoare, cu ecuaţia $y = x$. Alegând (natural) x ca parametru, obţinem însă că de la B la O valoarea lui t (adică a lui x) **scade** de la 1 la 0.

Obţinem

$$BO : \begin{cases} x = t, \\ y = t \end{cases}, \quad t \in [1,0] \ \Longrightarrow\ dx = dt,\ dy = dt.$$

Scrierea (mai puţin uzuală) $t \in [1,0]$ este făcută pentru a păstra orientarea segmentului BO, de la B (obţinut pentru $t = 1$) către O (obţinut pentru $t = 0$). Această scriere este compatibilă cu (şi motivată de) proprietatea integralei curbilinii de specia II de a-şi schimba semnul după schimbarea orientării domeniului de integrare. **Nu** putem aplica acelaşi artificiu şi pentru calculul integralei curbilinii de specia I, care **nu** are această proprietate! Atunci

$$\int_C y^2dx + x^2dy = \int_0^1 0^2dt + \int_0^1 1^2dt + \int_1^0 2t^2dt = t\,\Big|_0^1 + 2\cdot\frac{t^2}{3}\,\Big|_1^0 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

1.4 Aplicaţii

1.4.1 Lucrul mecanic

Considerăm un câmp de forţe $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$,

$$\vec{F} = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}$$

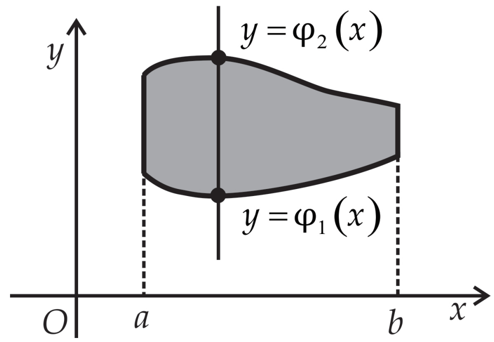
care deplasează un punct material $M(x,y,z)$ de-a lungul curbei (C). Atunci lucrul mecanic efectuat de câmpul de forţe $\vec{F}$ este

$$\int_C \vec{F}d\vec{r} = \int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

1.4.2 Ariile unor domenii plane

1.4.3 Domenii simple în raport cu Oy

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime închisă şi mărginită. D se numeşte **simplă în raport cu** Oy dacă au loc următoarele proprietăţi.



1. Proiecţia lui D pe Ox este un segment $[a,b]$.
2. Există $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue astfel ca D se poate scrie sub forma

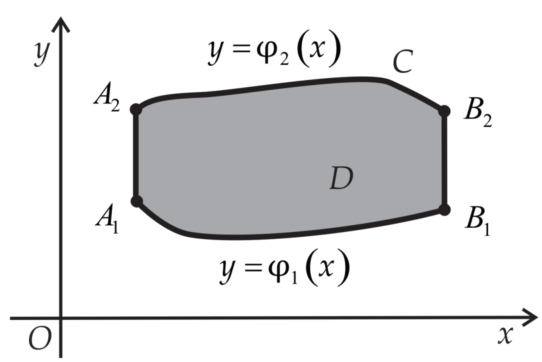
$$D = \{(x,y); \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), x \in [a,b]\}.$$

Cea de-a doua condiţie reprezintă faptul că orice paralelă prin interiorul segmentului $[a,b]$ la axa Oy taie frontiera domeniului D în cel mult două puncte, $\varphi_1(x)$ fiind ordonata punctului de intrare, iar $\varphi_2(x)$ fiind ordonata punctului de ieşire. Cele două puncte pot eventual şi coincide. De remarcat că domeniul este simplu în raport cu axa la care se duce paralela, nu cu cea pe care se face proiecţia.

1.4.4 Ariile domeniilor simple în raport cu Oy

Teorema 1.2. *Fie D un domeniu simplu în raport cu Oy, cu frontiera (C). Atunci*

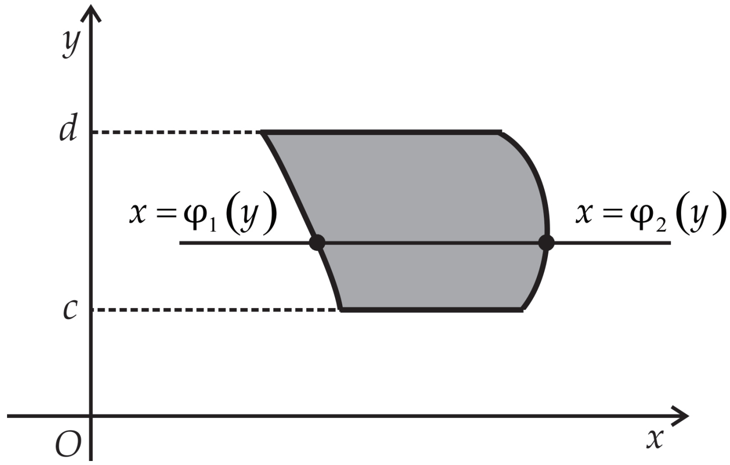
$$\text{aria}\ (D) = -\int_C y dx.$$



1.4.5 Domenii simple în raport cu Ox

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime închisă şi mărginită. D se numeşte **simplă în raport cu** Ox dacă dacă au loc următoarele proprietăţi.

1. Proiecţia lui D pe Oy este un segment $[c,d]$.



2. Există $\varphi_1, \varphi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ continue astfel ca D se poate scrie sub forma

$$D = \{(x, y); \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y), y \in [c, d]\}.$$

Cea de-a doua condiţie reprezintă faptul că orice paralelă prin interiorul segmentului $[c, d]$ la axa Ox taie frontiera domeniului D în cel mult două puncte, $\varphi_1(y)$ fiind abscisa punctului de intrare, iar $\varphi_2(y)$ fiind abscisa punctului de ieşire. Cele două puncte pot eventual şi coincide.

1.4.6 Ariile domeniilor simple în raport cu Oy

Fie D un domeniu simplu în raport cu Oy, cu frontiera (C). Atunci

$$\text{aria } (D) = \int_C x dy.$$

Demonstraţia este similară celei pentru domenii simple în raport cu Ox.

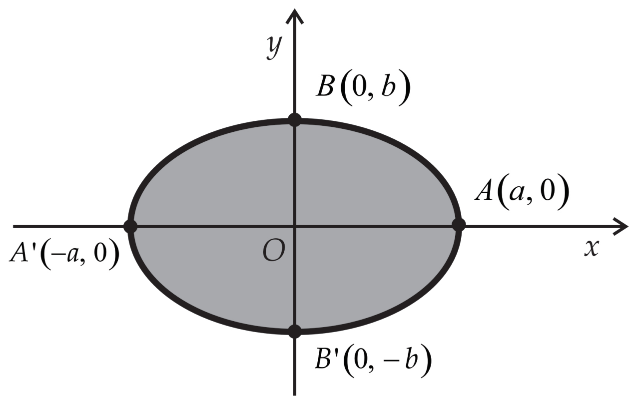
Semnul integralelor curbilinii folosite în calculul ariilor se poate reţine cu ajutorul următoarei reguli mnemotehnice: $\int_C x dy$, cu x „înaintea" lui y (de fapt, a lui dy), corespunzător ordinii alfabetice, reprezintă aria lui D. În schimb, $\int_C y dx$, cu y „înaintea" lui x (de fapt, a lui dx), contrar ordinii alfabetice, reprezintă opusul ariei lui D.

1.4.7 Ariile domeniilor simple în raport cu ambele axe

Fie D un domeniu simplu în raport cu ambele axe, cu frontiera (C). Prin combinarea formulelor de mai sus, obţinem că

$$\text{aria } (D) = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx.$$

Exemplu. Determinaţi aria domeniului mărginit de elipsa $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, de semiaxe a şi b, unde $a, b > 0$.



Soluţie. Domeniul respectiv este simplu în raport cu ambele axe. Frontiera sa se poate parametriza sub forma

$$(C) : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi].$$

Din motive de simetrie, vom folosi formula

$$\text{aria } (D) = \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx.$$

Atunci

$$dx = -a\sin t dt, \quad dy = b\cos t dt,$$

deci

$$\begin{aligned} \text{aria } (D) &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos t \cdot b\cos t - b\sin t \cdot (-a\sin t))dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t)dt = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot 2\pi = \pi ab. \end{aligned}$$

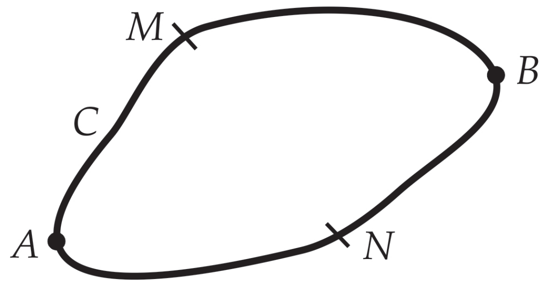
2 Integrale curbilinii independente de drum

S-a observat că integrala curbilinie de specia II poate fi folosită pentru a calcula lucrul mecanic al unei forţe care acţionează asupra unui punct material care se deplasează de-a lungul unei curbe netede. Pentru cazul unui câmp de forţe conservativ (de exemplu mişcarea în câmp gravitaţional, fără frecare sau rezistenţă), acest lucru mecanic depinde doar de punctul de plecare şi de cel de sosire, nu şi de calea de deplasare aleasă. Acest lucru ne conduce la investigarea condiţiilor în care valoarea unei integrale curbilinii de specia II este independentă de drumul ales.

2.1 Definiţie

Fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue pe D. Spunem că integrala curbilinie de specia II $\int Pdx + Qdy + Rdz$ este **independentă de drum** în D dacă pentru orice $A, B \in D$

valoarea integralei $\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$ este aceeaşi pentru orice curbă netedă pe porţiuni $\widehat{AB}$ care uneşte A şi B.



2.1.1 Notaţie

Dacă $\int Pdx + Qdy + Rdz$ este independentă de drum în D, iar $\widehat{AB}$ este o curbă netedă pe porţiuni oarecare în D, vom nota $\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$ şi prin

$$\int_A^B Pdx + Qdy + Rdz.$$

Teorema 2.1. *Fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue pe D. Atunci integrala curbilinie de specia II $\int Pdx + Qdy + Rdz$ este independentă de drum dacă şi numai dacă $\int_C Pdx + Qdy + Rdz = 0$ pentru orice curbă închisă netedă pe porţiuni (C) conţinută în D.*

Să notăm faptul că $\int_C Pdx + Qdy + Rdz = 0$ pentru orice curbă închisă netedă pe porţiuni (C) conţinută în D corespunde unui principiu de conservare a energiei pentru câmpul de forţe $\vec{F} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$ în D.

2.1.2 Forme diferenţiale exacte

Fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue pe D. Spunem că forma diferenţială $Pdx + Qdy + Rdz$ este **formă diferenţială exactă** dacă există $U : D \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 pe D astfel încât $Pdx + Qdy + Rdz$ este diferenţiala acesteia, adică

$$dU = Pdx + Qdy + Rdz.$$

2.1.3 Primitive (potenţiale)

În această situaţie, U se numeşte **primitiva** sau **potenţialul** formei diferenţiale $Pdx + Qdy + Rdz$, având loc egalităţile

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R.$$

Ca şi în cazul funcţiilor de o singură variabilă reală, primitivele unei funcţii sunt determinate până la o constantă.

Teorema 2.2. *Fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue pe D. Atunci $\int Pdx + Qdy + Rdz$ este independentă de drum în D dacă şi numai dacă $Pdx + Qdy + Rdz$ este formă diferenţială exactă.*

2.1.4 Formula Leibniz-Newton

Cu ajutorul Teoremei 2.2, se poate obţine de asemenea următoarea formulă de tip Leibniz-Newton pentru integrala curbilinie de specia II.

Corolar 2.2.1. *Fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue pe D astfel încât $Pdx + Qdy + Rdz$ este formă diferenţială exactă şi fie $\overset{\frown}{AB}$ o curbă netedă pe porţiuni în D. Atunci*

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = U(x_B, y_B, z_B) - U(x_A, y_A, z_A),$$

unde U este o primitivă a formei diferenţiale $Pdx + Qdy + Rdz$.

Exemplu. 1. Demonstraţi că

$$\omega = \frac{y}{z}dx + \frac{x}{z}dy - \frac{xy}{z^2}dz$$

este o formă diferenţială exactă în $D = (0, \infty)^3$, observând că o primitivă a acesteia este

$$U : D \to \mathbb{R}, \quad U(x, y, z) = \frac{xy}{z}.$$

2. Determinaţi

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{y}{z}dx + \frac{x}{z}dy - \frac{xy}{z^2}dz,$$

unde $\overset{\frown}{AB}$ este o curbă netedă pe porţiuni care uneşte $A(1, 1, 1)$ şi $B(4, 2, 2)$.

Soluţie. 1. Au loc egalităţile

$$\begin{aligned} d\left(\frac{xy}{z}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{z}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{z}\right)dy + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{xy}{z}\right)dz \\ &= \frac{y}{z}dx + \frac{x}{z}dy - \frac{xy}{z^2}dz, \end{aligned}$$

de unde concluzia.

2. Conform formulei Leibniz-Newton pentru integrala curbilinie de specia II,

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{y}{z}dx + \frac{x}{z}dy - \frac{xy}{z^2}dz = U(4, 2, 2) - U(1, 1, 1) = 4 - 1 = 3.$$

AM2, Curs 10, 30.04.2020
Integrale curbilinii de specia (speţa) II

1 Aplicaţii

1.1 Lucrul mecanic

Considerăm un câmp de forţe $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$,

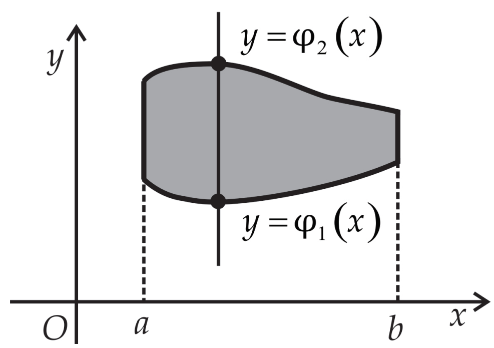
$$\vec{F} = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}$$

care deplasează un punct material $M(x,y,z)$ de-a lungul curbei (C). Atunci lucrul mecanic efectuat de câmpul de forţe $\vec{F}$ este

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

1.2 Ariile unor domenii plane

1.2.1 Domenii simple în raport cu Oy



Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime închisă şi mărginită. D se numeşte **simplă în raport cu** Oy dacă au loc următoarele proprietăţi.

1. Proiecţia lui D pe Ox este un segment $[a,b]$.
2. Există $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue astfel ca D se poate scrie sub forma

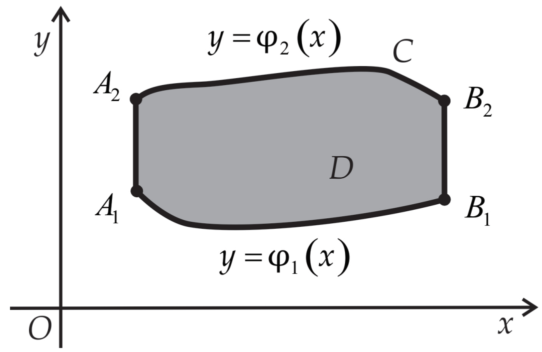
$$D = \{(x,y); \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), x \in [a,b]\}.$$

Cea de-a doua condiţie reprezintă faptul că orice paralelă prin interiorul segmentului $[a,b]$ la axa Oy taie frontiera domeniului D în cel mult două puncte, $\varphi_1(x)$ fiind ordonata punctului de intrare, iar $\varphi_2(x)$ fiind ordonata punctului de ieşire. Cele două puncte pot eventual şi coincide. De remarcat că domeniul este simplu în raport cu axa la care se duce paralela, nu cu cea pe care se face proiecţia.

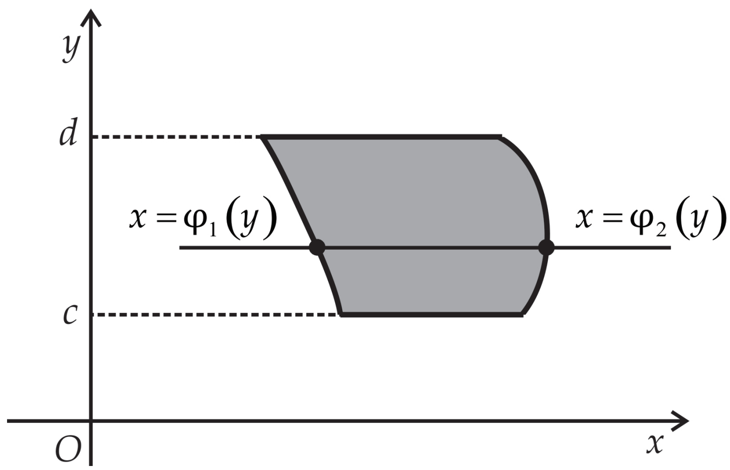
1.2.2 Ariile domeniilor simple în raport cu Oy

Teorema 1.1. *Fie D un domeniu simplu în raport cu Oy, cu frontiera* (C). *Atunci*

$$\text{aria } (D) = -\int_C y dx.$$



1.2.3 Domenii simple în raport cu Ox



Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime închisă şi mărginită. D se numeşte **simplă în raport cu** Ox dacă dacă au loc următoarele proprietăţi.

1. Proiecţia lui D pe Oy este un segment $[c, d]$.
2. Există $\varphi_1, \varphi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ continue astfel ca D se poate scrie sub forma

$$D = \{(x, y); \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y), y \in [c, d]\}.$$

Cea de-a doua condiţie reprezintă faptul că orice paralelă prin interiorul segmentului $[c, d]$ la axa Ox taie frontiera domeniului D în cel mult două puncte, $\varphi_1(y)$ fiind abscisa punctului de intrare, iar $\varphi_2(y)$ fiind abscisa punctului de ieşire. Cele două puncte pot eventual şi coincide.

1.2.4 Ariile domeniilor simple în raport cu Ox

Fie D un domeniu simplu în raport cu Ox, cu frontiera (C). Atunci

$$\text{aria }(D) = \int_C x dy.$$

Demonstraţia este similară celei pentru domenii simple în raport cu Oy.

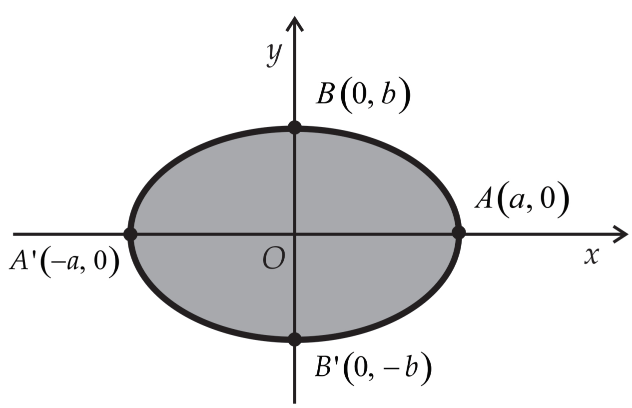
Semnul integralelor curbilinii folosite în calculul ariilor se poate reţine cu ajutorul următoarei reguli mnemotehnice: $\int_C x dy$, cu x „înaintea" lui y (de fapt, a lui dy), corespunzător ordinii alfabetice, reprezintă aria lui D. În schimb, $\int_C y dx$, cu y „înaintea" lui x (de fapt, a lui dx), contrar ordinii alfabetice, reprezintă opusul ariei lui D.

1.2.5 Ariile domeniilor simple în raport cu ambele axe

Fie D un domeniu simplu în raport cu ambele axe, cu frontiera (C). Prin combinarea formulelor de mai sus, obţinem că

$$\text{aria }(D) = \frac{1}{2}\int_C x dy - y dx.$$

Exemplu. Determinaţi aria domeniului mărginit de elipsa $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, de semiaxe a şi b, unde $a, b > 0$.



Soluţie. Domeniul respectiv este simplu în raport cu ambele axe. Frontiera sa se poate parametriza sub forma

$$(C) : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi].$$

Din motive de simetrie, vom folosi formula

$$\text{aria }(D) = \frac{1}{2}\int_C x dy - y dx.$$

Atunci

$$dx = -a \sin t dt, \quad dy = b \cos t dt,$$

deci

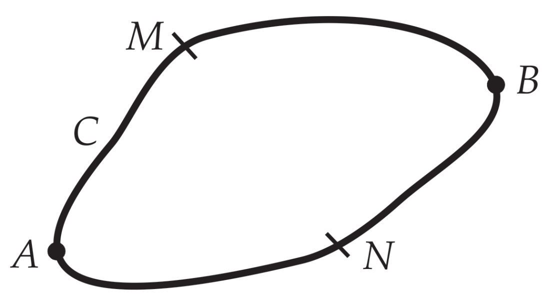
$$\begin{aligned} \text{aria }(D) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t \cdot b \cos t - b \sin t \cdot (-a \sin t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot 2\pi = \pi ab. \end{aligned}$$

2 Integrale curbilinii independente de drum

S-a observat că integrala curbilinie de specia II poate fi folosită pentru a calcula lucrul mecanic al unei forţe care acţionează asupra unui punct material care se deplasează de-a lungul unei curbe netede. Pentru cazul unui câmp de forţe conservativ (de exemplu mişcarea în câmp gravitaţional, fără frecare sau rezistenţă), acest lucru mecanic depinde doar de punctul de plecare şi de cel de sosire, nu şi de calea de deplasare aleasă. Acest lucru ne conduce la investigarea condiţiilor în care valoarea unei integrale curbilinii de specia II este independentă de drumul ales.

2.1 Definiţie

Fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue pe D. Spunem că integrala curbilinie de specia II $\int Pdx + Qdy + Rdz$ este **independentă de drum** în D dacă pentru orice $A, B \in D$ valoarea integralei $\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$ este aceeaşi pentru orice curbă netedă pe porţiuni $\widehat{AB}$ care uneşte A şi B.



2.1.1 Notaţie

Dacă $\int Pdx + Qdy + Rdz$ este independentă de drum în D, iar $\widehat{AB}$ este o curbă netedă pe porţiuni oarecare în D, vom nota $\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$ şi prin

$$\int_A^B Pdx + Qdy + Rdz.$$

Teorema 2.1. *Fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue pe D. Atunci integrala curbilinie de specia II $\int Pdx + Qdy + Rdz$ este independentă de drum dacă şi numai dacă $\int_C Pdx + Qdy + Rdz = 0$ pentru orice curbă închisă netedă pe porţiuni (C) conţinută în D.*

Să notăm faptul că $\int_C Pdx + Qdy + Rdz = 0$ pentru orice curbă închisă netedă pe porţiuni (C) conţinută în D corespunde unui principiu de conservare a energiei pentru câmpul de forţe $\vec{F} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$ în D.

2.1.2 Forme diferenţiale exacte

Fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue pe D. Spunem că forma diferenţială $Pdx + Qdy + Rdz$ este **formă diferenţială exactă** dacă există $U : D \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 pe D astfel încât $Pdx + Qdy + Rdz$ este diferenţiala acesteia, adică

$$dU = Pdx + Qdy + Rdz.$$

2.1.3 Primitive (potenţiale)

În această situaţie, U se numeşte **primitiva** sau **potenţialul** formei diferenţiale $Pdx + Qdy + Rdz$, având loc egalităţile

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R.$$

Ca şi în cazul funcţiilor de o singură variabilă reală, primitivele unei funcţii sunt determinate până la o constantă.

2.1.4 Formula Leibniz-Newton

Se poate obţine de asemenea următoarea formulă de tip Leibniz-Newton pentru integrala curbilinie de specia II.

Corolar 2.1.1. *Fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue pe D astfel încât $Pdx + Qdy + Rdz$ este formă diferenţială exactă şi fie $\overset{\frown}{AB}$ o curbă netedă pe porţiuni în D. Atunci*

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = U(x_B, y_B, z_B) - U(x_A, y_A, z_A),$$

unde U este o primitivă a formei diferenţiale $Pdx + Qdy + Rdz$.

Exemplu. 1. Demonstraţi că

$$\omega = \frac{y}{z}dx + \frac{x}{z}dy - \frac{xy}{z^2}dz$$

este o formă diferenţială exactă în $D = (0, \infty)^3$, observând că o primitivă a acesteia este

$$U : D \to \mathbb{R}, \quad U(x, y, z) = \frac{xy}{z}.$$

2. Determinaţi

$$\int_{\widehat{AB}} \frac{y}{z}dx + \frac{x}{z}dy - \frac{xy}{z^2}dz,$$

unde $\widehat{AB}$ este o curbă netedă pe porţiuni care uneşte $A(1,1,1)$ şi $B(4,2,2)$.

Soluţie. 1. Au loc egalităţile

$$\begin{aligned} d\left(\frac{xy}{z}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{z}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{z}\right)dy + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{xy}{z}\right)dz \\ &= \frac{y}{z}dx + \frac{x}{z}dy - \frac{xy}{z^2}dz, \end{aligned}$$

de unde concluzia.

2. Conform formulei Leibniz-Newton pentru integrala curbilinie de specia II,

$$\int_{\widehat{AB}} \frac{y}{z}dx + \frac{x}{z}dy - \frac{xy}{z^2}dz = U(4,2,2) - U(1,1,1) = 4 - 1 = 3.$$

2.1.5 Domenii simplu conexe în plan

Definiţie. Fie un domeniu $D \subset \mathbb{R}^2$. Spunem că D este **simplu conex** dacă odată cu orice curbă închisă (C) domeniul D conţine şi interiorul acesteia.

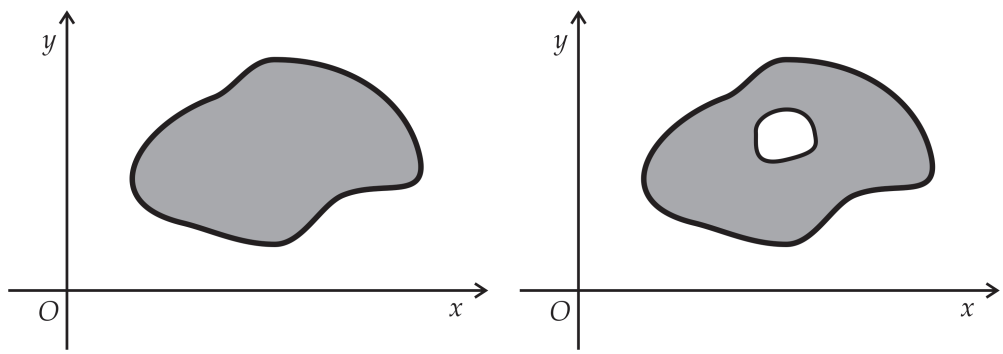


Figure 1: *

Domeniu simplu conex Domeniu dublu conex

Cu alte cuvinte, un domeniu simplu conex în plan nu conţine goluri, indiferent de cât de mici sunt acestea. Astfel, interioarele unui cerc sau unui pătrat sunt domenii simplu conexe. Un inel (regiunea dintre două cercuri) nu este însă un domeniu simplu conex, şi nici interiorul unui cerc din care lipseşte centrul nu este un domeniu simplu conex. În ultimul caz, „golul" constă dintr-un singur punct! Astfel de domenii vor fi numite, în general, **multiplu conexe**. Distingând după numărul de goluri, un domeniu cu un singur gol va fi numit **dublu conex**, un domeniu cu două goluri va fi numit **triplu conex**; in general, un domeniu cu $n-1$ goluri va fi numit **n-uplu conex**.

2.1.6 Domenii simplu conexe în spaţiu

Definiţie. Fie un domeniu $D \subset \mathbb{R}^3$. Spunem că D este **simplu conex** dacă odată cu orice curbă închisă (C) domeniul D conţine şi o suprafaţă netedă cu frontiera (C).

În acest caz, un domeniu simplu conex poate conţine goluri. De exemplu, domeniul dintre două sfere concentrice este simplu conex, şi tot domeniu simplu conex este interiorul unei sfere din care lipseşte centrul (sau chiar lipsesc un număr finit de puncte). Dacă domeniul nu are goluri, atunci el este simplu conex.

Pentru domenii simplu conexe, obţinem atunci următoarele consecinţe.

Teorema 2.2. *Fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue pe D şi derivabile parţial, cu derivatele parţiale continue pe domeniul simplu conex D. Următoarele afirmaţii sunt echivalente.*

1. $\int Pdx + Qdy + Rdz$ *este independentă de drum în D.*
2. $\int_C Pdx + Qdy + Rdz = 0$ *pentru orice curbă închisă netedă pe porţiuni (C) conţinută în D.*
3. $Pdx + Qdy + Rdz$ *este formă diferenţială exactă.*
4. *Are loc egalitatea*
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{0} \quad \text{în } D.$$

Teorema 2.3. *Fie $P, Q : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue pe D şi derivabile parţial, cu derivatele parţiale continue pe domeniul simplu conex D. Următoarele afirmaţii sunt echivalente.*

1. $\int Pdx + Qdy$ *este independentă de drum în D.*
2. $\int_C Pdx + Qdy = 0$ *pentru orice curbă închisă netedă pe porţiuni (C) conţinută în D.*
3. $Pdx + Qdy$ *este formă diferenţială exactă.*
4. *Are loc egalitatea*
$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \text{în } D.$$

AM2, Curs 11, 07.05.2020

Integrala dublă

1 Definiţie

1.1 Introducere

Să recapitulăm modul de definire al integralei definite (Riemann) pentru o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Mai întâi, se construia o diviziune a intervalului $[a, b]$,

$$\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \quad \text{cu} \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b,$$

(şi, ca rezultat, se obţineau subintervalele $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots$, $[x_{n-1}, x_n]$, cu interioarele disjuncte şi care puteau avea în comun două câte două doar cel mult unul dintre capete). Apoi, se considera un sistem de puncte intermediare

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\},$$

astfel încât $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pentru $1 \leq i \leq n$ (în fiecare interval elementar se afla câte un punct intermediar) şi se asociau sume Riemann de forma

$$\begin{aligned}\sigma_\Delta(f, C) &= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= f(c_1)(x_1 - x_0) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(c_n)(c_n - c_{n-1})\end{aligned}$$

(valoarea funcţiei în fiecare punct intermediar se înmulţea cu lungimea intervalului din care punctul intermediar făcea parte, adunându-se rezultatele). Mai departe, $\int_a^b f(x)dx$ se obţinea ca limita unui astfel de şir de sume Riemann.

Vom păstra acelaşi punct de vedere, bazat pe **împărţirea domeniului de integrare în subdomenii, asocierea unui sistem de puncte intermediare, definirea sumei Riemann şi trecerea la limită** şi pentru definiţia noţiunii de integrală dublă a unei funcţii definite pe un domeniu închis şi mărginit din $\mathbb{R}^2$, care are arie.

1.1.1 Domenii de integrare

Nu vom prezenta aici noţiuni legate de existenţa sau inexistenţa ariei unei mulţimi din $\mathbb{R}^2$, însă vom observa că orice domeniu închis şi mărginit din $\mathbb{R}^2$ a cărui frontieră este reuniunea unui număr finit de curbe netede are arie. În acest capitol, pentru simplificarea expunerii, prin **domeniu de integrare** vom înţelege un domeniu închis şi mărginit din $\mathbb{R}^2$ a cărui frontieră este reuniunea unui număr finit de curbe netede (altfel spus, cu frontiera **netedă pe porţiuni**). În particular, un astfel de domeniu de integrare are arie.

1.1.2 Împărţirea domeniului de integrare în subdomenii

1.1.3 Diviziuni (partiţii) ale unui domeniu de integrare

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu de integrare. Vom spune că o mulţime ordonată de domenii de integrare $\Delta = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ reprezintă o **diviziune** (sau **partiţie**) a lui D dacă

1. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i = D$.

2. $\overset{\circ}{D}_i \bigcap \overset{\circ}{D}_j = \emptyset$, pentru orice $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$.

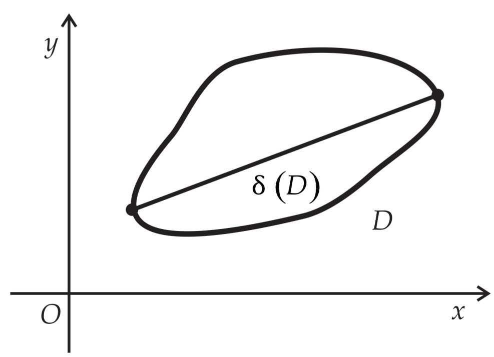
Altfel spus, D se poate scrie ca reuniunea tuturor subdomeniilor D_1, D_2, $\ldots, D_n$, iar aceste subdomenii pot avea comune, două câte două, cel mult puncte de pe frontieră, întrucât au două câte două interioarele disjuncte.

1.1.4 Notaţie

Mulţimea diviziunilor unui domeniu de integrare D se notează $\mathcal{D}_D$.

1.1.5 Diametrul unui domeniu de integrare

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu de integrare. Numim **diametru** al lui D, notat $\delta(D)$, distanţa maximă dintre două puncte ale lui D.



1.1.6 Normă a unei partiţii

Fiind dată o diviziune $\Delta = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$, vom numi **normă** a diviziunii Δ, notată $\|\Delta\|$, valoarea maximă a **diametrelor** $\delta(D_1), \delta(D_2), \ldots, \delta(D_n)$, adică

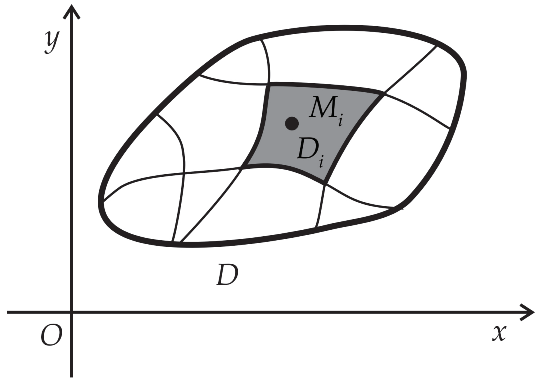
$$\|\Delta\| = \max_{1 \leq i \leq n} \delta(D_n).$$

1.1.7 Sisteme de puncte intermediare asociate

Fiind dată o diviziune $\Delta = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$, vom numi **sistem de puncte intermediare asociat diviziunii** Δ o mulţime ordonată de puncte

$$C = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\},$$

astfel încât $M_i \in D_i$ pentru $1 \leq i \leq n$ (în fiecare subdomeniu se află câte un punct intermediar).



1.1.8 Sume Riemann. Interpretare geometrică

Fiind date un domeniu de integrare D, o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$, o diviziune $\Delta = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ a domeniului de integrare D şi $C = \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ, $M_i = M_i(\alpha_i, \beta_i)$, $1 \leq i \leq n$, vom numi **sumă Riemann asociată diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare** C suma

$$\begin{aligned}\sigma_\Delta(f, C) &= \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i, \beta_i)\,\text{aria}(D_i)\\ &= f(\alpha_1, \beta_1)\,\text{aria}(D_1) + f(\alpha_2, \beta_2)\,\text{aria}(D_2) + \ldots + f(\alpha_n, \beta_n)\,\text{aria}(D_n)\end{aligned}$$

(valoarea funcţiei în fiecare punct intermediar se înmulţeşte cu aria subdomeniului din care punctul intermediar face parte, adunându-se rezultatele).

1.1.9 Funcţii integrabile Riemann

Definiţie. Fie D un domeniu de integrare şi fie $f : D \to \mathbb{R}$. Vom spune că f este **integrabilă Riemann** pe D (pe scurt, f este **integrabilă** pe D) dacă există un număr real I astfel încât oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că

oricare ar fi diviziunea $\Delta \in \mathcal{D}_D$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi oricare ar fi sistemul de puncte intermediare C asociat lui Δ, are loc inegalitatea

$$|\sigma_\Delta(f, C) - I| < \varepsilon.$$

La fel ca şi în cazul integralei unei funcţii definite pe un interval $[a, b]$, pentru o normă a diviziunii „suficient de mică”, suma Riemann $\sigma_\Delta(f, C)$ reprezintă o aproximare „suficient de bună” a lui I.

1.1.10 Integrala dublă

Numărul I definit mai sus se numeşte **integrala dublă** a funcţiei f pe D şi se notează

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy.$$

Să observăm şi că I, dacă există, este unic determinat.

Mulţimea D se numeşte **domeniu de integrare**, funcţia f se numeşte **integrand** iar variabilele x, y se numesc **variabile de integrare**. Expresia $dxdy$ (un tot unitar, mai degrabă decât un produs, deşi poate fi interpretat şi în acest ultim fel) se numeşte **element de arie**.

1.1.11 Definiţie alternativă

Are loc următoarea echivalenţă, cea de-a doua afirmaţie putând fi utilizată de asemenea ca definiţie a integrabilităţii Riemann.

Teorema 1.1. *Fie D un domeniu de integrare şi fie o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente.*

1. *f este integrabilă pe D.*
2. *Oricare ar fi un şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\geq 0}$ ale lui D cu $\|\Delta_n\| \to 0$, împreună cu un şir de sisteme de puncte intermediare asociate $(C_n)_{n\geq 0}$, şirul sumelor Riemann $(\sigma_{\Delta_n}(f, C_n))_{n\geq 0}$ este convergent.*

La fel ca şi în cazul integralei unei funcţii definite pe un interval $[a, b]$, se poate demonstra că limita unui astfel de şir de sume Riemann nu depinde nici de alegerea şirului de diviziuni $(\Delta_n)_{n\geq 0}$, nici de alegerea şirului de sisteme de puncte intermediare asociate $(C_n)_{n\geq 0}$. Valoarea (comună) a limitelor reprezintă $\iint_D f(x, y)dxdy$.

1.1.12 Domeniu de integrare cu arie nulă. Integrala funcţiei nule

Cu ajutorul definiţiei, ţinând cont de faptul că toate sumele Riemann asociate sunt nule, putem obţine următoarele proprietăţi.

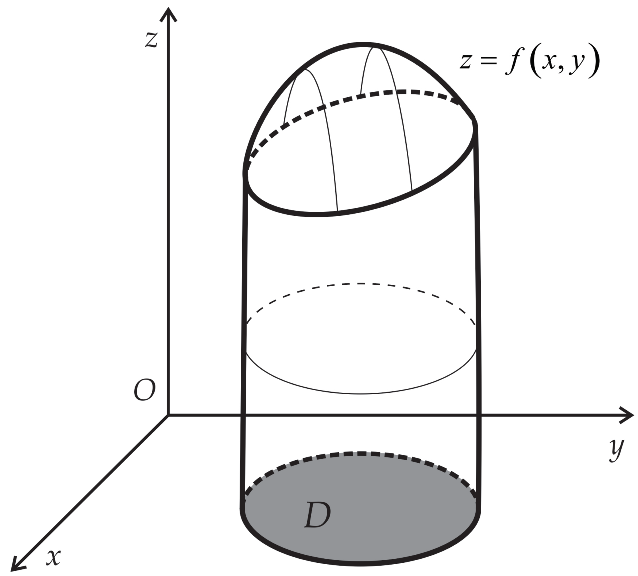
1. Fie D un domeniu de integrare cu arie nulă şi fie $f : D \to \mathbb{R}$ integrabilă. Atunci
$$\iint_D f(x, y)dxdy = 0.$$
2. Fie D un domeniu de integrare. Atunci
$$\iint_D 0dxdy = 0.$$

1.1.13 Interpretare geometrică: arie

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu de integrare. Conform definiţiei, se obţine că
$$\iint_D 1dxdy = \text{aria}(D).$$

La fel ca şi în cazul integralei definite, integrându-l pe 1 pe o mulţime obţinem „măsura” acelei mulţimi. Pentru un interval $[a, b]$, „măsura” sa era lungimea acestuia, $b - a$. Acum, „măsura” potrivită pentru domeniul de integrare D (din $\mathbb{R}^2$) este aria acelei mulţimi.

1.1.14 Interpretare geometrică: volum



Am observat deja că, fiind dată o funcţie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilă pe $[a,b]$, $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [a,b]$, interpretarea geometrică a integralei definite $\int_a^b f(x)dx$ este aria subgraficului funcţiei f. Pentru integrala dublă, o interpretare similară se obţine „adăugând o dimensiune” şi transformând graficul în suprafaţă, iar aria în volum.

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu de integrare şi fie $f : D \to \mathbb{R}$ integrabilă pe D, $f(x,y) \geq 0$ pentru orice $(x,y) \in D$. Definim suprafaţa Σ în $\mathbb{R}^3$ prin

$$\Sigma = \{(x,y,z); z = f(x,y),\ (x,y) \in D\}.$$

Ţinând seama şi de interpretarea geometrică a sumelor Riemann amintită anterior, $\iint_D f(x,y)dxdy$ reprezintă volumul corpului cilindric cu generatoarea paralelă cu Oz determinat de D şi de suprafaţa Σ.

1.1.15 Legătura între integrabilitate şi alte proprietăţi ale funcţiilor

La fel ca şi în cazul integralelor simple (şi în mod natural de altfel), funcţiile continue sunt integrabile. De asemenea, funcţiile integrabile sunt mărginite.

Teorema 1.2. *Fie D un domeniu de integrare şi fie $f : D \to \mathbb{R}$, f continuă pe D. Atunci f este integrabilă pe D.*

Teorema 1.3. *Fie D un domeniu de integrare şi fie $f : D \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe D. Atunci f este mărginită pe D.*

2 Operaţii cu funcţii integrabile

Teorema 2.1. *Fie D un domeniu de integrare, $f, g : D \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe D, şi $c \in \mathbb{R}$. Au loc următoarele proprietăţi.*

1. **Proprietatea de aditivitate**

   Funcţiile $f + g$ şi $f - g$ sunt integrabile pe D, iar

$$\iint_D (f(x,y) + g(x,y))dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_D g(x,y)dxdy$$

   *(***integrala sumei este egală cu suma integralelor***), respectiv*

$$\iint_D (f(x,y) - g(x,y))dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy - \iint_D g(x,y)dxdy$$

   *(***integrala diferenţei este egală cu diferenţa integralelor***).*

2. **Proprietatea de omogenitate**

   Funcţia cf este integrabilă pe D, iar

$$\iint_D cf(x,y)dxdy = c\iint_D f(x,y)dxdy,$$

   *(***o constantă cu care se înmulţeşte poate fi trecută de sub integrală înaintea integralei***).*

Menţionăm că nu au loc formule asemănătoare pentru produs şi raport, adică integrala produsului nu este, de regulă, produsul integralelor şi nici integrala raportului nu este, de regulă, raportul integralelor. Condensat, formulele de mai sus pot fi scrise sub forma următoare.

Teorema 2.2. *Fie D un domeniu de integrare, $f, g : D \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe D şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Atunci $c_1 f + c_2 g$ este integrabilă pe D şi*

$$\iint_D (c_1 f(x,y) + c_2 g(x,y))dxdy = c_1 \iint_D f(x,y)dxdy + c_2 \iint_D g(x,y)dxdy.$$

3 Proprietăţi ale integralei duble

3.1 Proprietăţi în raport cu domeniul

3.1.1 Restrângerea domeniului de integrare

Teorema 3.1. *Fie D un domeniu de integrare şi fie $f : D \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe D. Atunci f este integrabilă pe orice subdomeniu $D_1 \subset D$.*

3.1.2 Extinderea domeniului de integrare. Aditivitatea în raport cu domeniul

Teorema 3.2. *Fie D un domeniu de integrare şi fie $f : D \to \mathbb{R}$. Dacă domeniile de integrare $D_1, D_2, \ldots, D_n$ formează o diviziune a lui D, iar f este integrabilă pe $D_1, D_2, \ldots, D_n$, atunci f este integrabilă pe întreg D, iar*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy + \ldots + \iint_{D_n} f(x,y)dxdy$$

3.2 Proprietăţi în raport cu funcţia

3.2.1 Păstrarea inegalităţilor între funcţii

Vom observa în cele ce urmează că integrala dublă păstrează semnul funcţiei de integrat şi inegalităţile nestricte între funcţii.

Teorema 3.3. *Fie D un domeniu de integrare şi fie $f, g : D \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe D.*

1. *Dacă $f(x,y) \geq 0$, pentru orice $(x,y) \in D$, atunci*

$$\iint_D f(x,y)dxdy \geq 0.$$

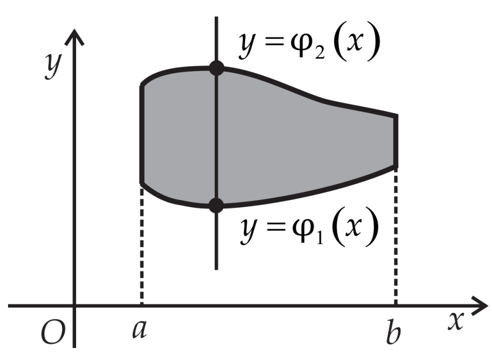
2. *Dacă $f(x,y) \geq g(x,y)$, pentru orice $(x,y) \in D$, atunci*

$$\iint_D f(x,y)dxdy \geq \iint_D g(x,y)dxdy.$$

4 Calculul integralelor duble

În mod natural, o primă idee este de a reduce calculul integralei duble la calculul succesiv a două integrale definite, utilizând pe rând cele două variabile ca variabile de integrare.

4.1 Domenii simple în raport cu axa Oy



Fie D un domeniu simplu în raport cu axa Oy. Reamintim că, în această situaţie, au loc următoarele.

1. Proiecţia lui D pe Ox este un segment $[a, b]$.

2. Există $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue astfel ca D se poate scrie sub forma

$$D = \{(x, y); \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), x \in [a, b]\}.$$

Teorema 4.1. *Fie D un domeniu simplu în raport cu axa Oy şi fie $f : D \to \mathbb{R}$ integrabilă pe D. Dacă $I : [a, b] \to \mathbb{R}$,*

$$I(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy, \quad \text{pentru } x \in [a, b],$$

este bine definită şi integrabilă pe $[a, b]$, atunci

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

În membrul drept, domeniul $[a, b]$ al primei integrale este **domeniul de proiecţie**, iar domeniul celei de-a doua integrale, $[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$ este **domeniul de secţiune** (pentru $x \in (a, b)$, paralela la axa Oy cu abscisa constantă x taie frontiera domeniului D în cel mult două puncte, $\varphi_1(x)$ fiind ordonata punctului de intrare, iar $\varphi_2(x)$ fiind ordonata punctului de ieşire; cele două puncte pot eventual şi coincide).

De notat că, în cele de mai sus, ordinea de scriere a integralelor nu este ordinea de calcul. Astfel, mai întâi se calculează integrala interioară (cea în raport cu y), iar abia apoi cea exterioară (cea în raport cu x).

Procedeul de calcul de mai sus poartă numele de **reducerea la integrale iterate** sau, urmărind raţionamentul geometric, **metoda de proiecţie şi secţiune**. În particular, ipotezele asupra lui I sunt satisfăcute dacă f este funcţie continuă.

Corolar 4.1.1. *Fie D un domeniu simplu în raport cu axa Oy şi fie $f : D \to \mathbb{R}$ continuă pe D. Atunci*

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

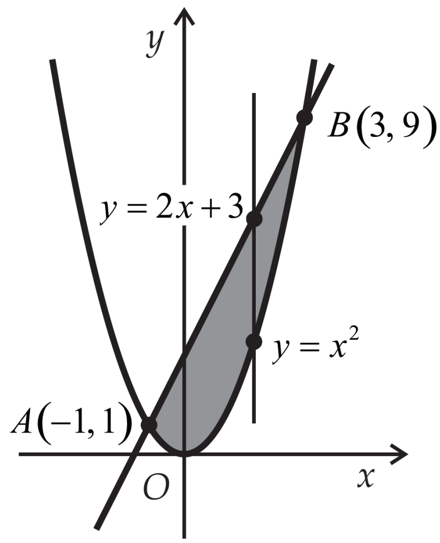
De notat că formule similare au loc şi pentru domenii simple în raport cu Ox.

Exemplu. Determinaţi

$$\iint_D xy dx dy,$$

unde D este domeniul limitat de parabola $(P) : y = x^2$ şi dreapta $(D) : y = 2x + 3$.

Soluţie. Domeniul de integrare D este cel haşurat în figură, observându-se că el este simplu în raport cu Oy. Pentru calculul integralei, aplicăm metoda de proiecţie şi secţiune. În acest scop, determinăm mai întâi punctele de intersecţie (de fapt, sunt necesare doar abscisele acestora).



Determinarea punctelor de intersecţie se face rezolvând un sistem constituit din ecuaţiile parabolei şi dreptei.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 3 \end{cases} \implies x^2 = 2x + 3 \implies x^2 - 2x - 3 = 0 \implies x_1 = -1, x_2 = 3.$$

Urmează că domeniul de proiecţie (pe Ox) este $[-1, 3]$.

Pentru a determina domeniul de secţiune, ducem o paralelă la axa Oy printr-un punct oarecare x din domeniul de proiecţie. Observăm că punctul de „intrare" în D al paralelei este situat pe parabola $y = x^2$, în timp ce punctul de „ieşire" este situat pe dreapta $y = 2x + 3$. Urmează că

$$\iint_D xydxdy = \int_{-1}^{3} \left(\int_{x^2}^{2x+3} xydy \right) dx.$$

Calculăm mai întâi integrala interioară, anume

$$I_1 = \int_{x^2}^{2x+3} xydy.$$

Deoarece variabila de integrare este y, urmează că

$$I_1 = x \int_{x^2}^{2x+3} ydy = x \cdot \frac{y^2}{2} \Bigg|_{x^2}^{2x+3} = \frac{x}{2} \left(4x^2 + 6x + 9 - x^4 \right) = 2x^3 + 3x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{1}{2}x^5.$$

De aici

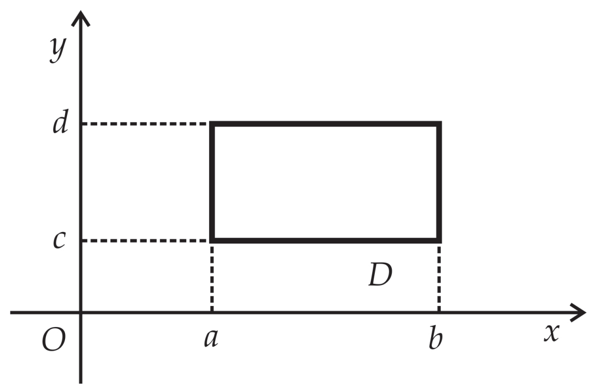
$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{3} \left(2x^3 + 3x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{x^5}{2} \right) dx = \left(2\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} + \frac{9}{2}\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^6}{6} \right) \Bigg|_{-1}^{3} \\ &= \left(\frac{1}{2}x^4 + x^3 + \frac{9}{4}x^2 - \frac{1}{12}x^6 \right) \Bigg|_{-1}^{3} = \frac{76}{3}. \end{aligned}$$

4.2 Domenii dreptunghiulare

În cazul domeniilor cu formă generală menţionate mai sus, calculul integralelor iterate presupune în particular determinarea domeniului de secţiune. Aceste formule de calcul se simplifică considerabil, nemaifiind necesar să se calculeze domeniile de secţiune, atunci când domeniul de integrare este un dreptunghi cu laturile paralele cu axele de coordonate. Un astfel de dreptunghi poate fi scris sub forma

$$D = [a, b] \times [c, d],$$

unde $[a, b]$ reprezintă proiecţia domeniului pe axa Ox, iar $[c, d]$ reprezintă proiecţia domeniului pe axa Oy, fiind simplu atât în raport cu Ox, cât şi cu Oy.



Corolar 4.1.2. *Fie $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$, f continuă. Atunci*

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Exemplu. Determinaţi $\displaystyle\iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \sin(x+y)dxdy.$

Soluţie. Are loc egalitatea

$$\iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \sin(x+y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x+y)dy \right) dx.$$

Calculăm mai întâi integrala interioară, anume

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x+y)dy = (-\cos(x+y)) \Bigg|_{y=0}^{y=\frac{\pi}{4}} = -\cos(x+\frac{\pi}{4}) + \cos x.$$

De aici,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(x+\frac{\pi}{4}) + \cos x)dx = -\sin(x+\frac{\pi}{4}) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin x \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= -\sin(3\frac{\pi}{4}) + \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

4.3 Domenii dreptunghiulare şi funcţii separabile ca produse

În descrierea unui dreptunghi cu laturile paralele cu axele de coordonate sub forma

$$D = [a, b] \times [c, d],$$

intervalele în care variabilele x şi y sunt „separate" cu ajutorul unui produs (cartezian). Dacă şi în expresia funcţiei de integrat f variabilele x şi y sunt separate în acelaşi mod, adică f se poate scrie ca produs între o funcţie care depinde doar de variabila x şi o funcţie care depinde doar de variabila y, există atunci premizele pentru o separare „totală" a variabilelor, tot sub forma unui produs.

Teorema 4.2. *Fie $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, unde f_1, f_2 sunt funcţii continue. Atunci*

$$\begin{aligned}\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy &= \iint_{[a,b]\times[c,d]} f_1(x) \cdot f_2(y)dxdy \\ &= \left(\int_a^b f_1(x)dx\right) \cdot \left(\int_c^d f_2(y)dy\right)\end{aligned}$$

Prima integrală simplă conţine toate apariţiile variabilei x, împreună cu domeniul corespunzător, iar cea de-a doua, tot simplă, conţine toate apariţiile variabilei y, din nou împreună cu domeniul corespunzător.

De asemenea, este de remarcat faptul că separarea sumelor sau diferenţelor de funcţii are loc **tot timpul** (indiferent de forma domeniului), şi se face în integrale **de acelaşi tip** (adică tot duble), în vreme ce separarea produselor are loc **uneori** (în condiţiile particulare de mai sus) şi se face în integrale **simple**.

Exemplu. Determinaţi $\iint_{[0,\pi]\times[0,1]} \sin x dxdy$.

Soluţie. În acest caz, integrandul este funcţie doar de variabila x. Putem totuşi considera că el se separă ca produs între o funcţie doar de variabila x şi o funcţie doar de variabila y, sub forma

$$\sin x = \sin x \cdot 1.$$

Atunci

$$\begin{aligned}\iint_{[0,\pi]\times[0,1]} \sin x dxdy &= \iint_{[0,\pi]\times[0,1]} \sin x \cdot 1 dxdy = \int_0^\pi \sin x dx \cdot \int_0^1 1 dy \\ &= (-\cos x)\Big|_0^\pi \cdot y\Big|_0^1 = 2 \cdot 1 = 2.\end{aligned}$$

Exemplu. Determinaţi $\iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \sin(x+y) dxdy$.

Soluţie. Au loc egalităţile

$$\begin{aligned}\iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \sin(x+y)dxdy &= \iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{4}]} (\sin x\cos y + \cos x \sin y)dxdy \\ &= \iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \sin x\cos y dxdy \\ &\quad + \iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \cos x\sin y dxdy.\end{aligned}$$

Mai sus, separarea se face tot în integrale duble, pe acelaşi domeniu, întrucât se calculează integrala unei **sume**. De asemenea

$$\begin{aligned}\iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \sin x\cos y dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos y dy = (-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \sin y\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Aici, separarea se face în integrale simple, întrucât se calculează integrala unui **produs** de funcţii depinzând de câte o variabilă. Din acelaşi motiv,

$$\begin{aligned}\iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \cos x\sin y dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin y dy = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot (-\cos y)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 1\cdot(1-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Atunci

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

AM2, Curs 12, 14.05.2020

Integrala dublă (continuare)

1 Formula de schimbare de variabilă în integrala dublă

În unele situaţii, fie funcţia de integrat, fie forma geometrică a domeniului se simplifică după schimbări de variabile.

1.1 Schimbări de variabilă (transformări regulate)

Fie D_1 un domeniu de integrare mărginit de curba închisă netedă pe porţiuni C_1 şi D_2 un domeniu de integrare mărginit de curba închisă netedă pe porţiuni C_2. Spunem că D_2 se transformă în D_1 prin **schimbarea de variabilă** (sau **transformarea regulată**)

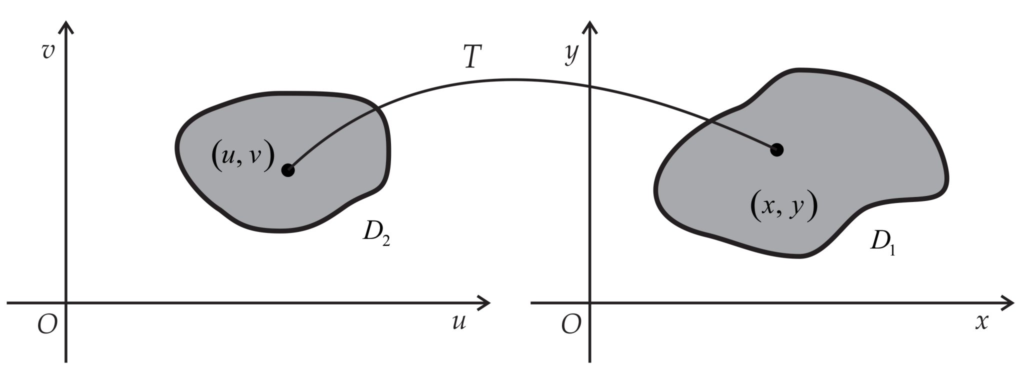
$$T : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}, \ (u,v) \in D_2,$$

dacă

1. T este bijectivă ca funcţie de la D_2 la D_1.
2. Funcţiile $x = x(u,v)$ şi $y = y(u,v)$ au derivatele parţiale de ordinul 1 şi derivatele parţiale mixte de ordinul al doilea continue.
3. Determinantul funcţional (numit **determinant jacobian**)

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

   este nenul pentru $(u,v) \in D_2$.



1.2 Formula de schimbare de variabilă

Teorema 1.1. *Fie D_1 un domeniu de integrare mărginit de curba închisă netedă pe porţiuni C_1 şi D_2 un domeniu de integrare mărginit de curba închisă netedă pe porţiuni C_2, astfel încât D_2 se transformă în D_1 prin* **schimbarea de variabilă** *(sau* **transformarea regulată***)*

$$T : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}, \ (u,v) \in D_2.$$

Fie, de asemenea, $f : D_1 \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci

$$\iint_{D_1} f(x,y)dxdy = \iint_{D_2} f(x(u,v),y(u,v)) \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dudv.$$

În prima parte a membrului drept, **variabilele vechi** x şi y se înlocuiesc în funcţie de **variabilele noi** u şi v. Cea de-a doua parte a membrului drept reprezintă **formula de transformare a elementului de arie**, care poate fi scrisă sub forma

$$dxdy = \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dudv.$$

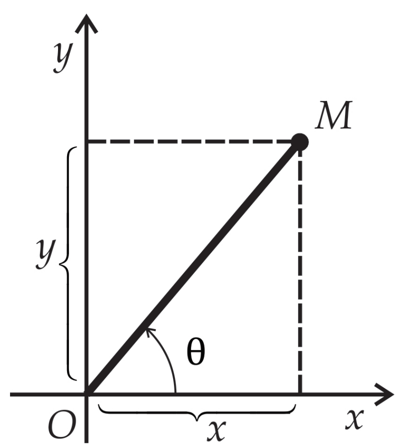
1.3 Coordonate polare şi polare generalizate

1.3.1 Coordonate polare

Fiind dat un reper cartezian xOy în plan şi un reper polar asociat, cu **polul** în O, originea sistemului de coordonate şi **axa polară** dată de semiaxa Ox, putem preciza poziţia unui punct $M \neq O$ atât prin coordonatele sale carteziene (x,y), cât şi prin **coordonatele sale polare** (ρ,θ), unde

1. ρ reprezintă distanţa între M şi O.

2. θ reprezintă unghiul orientat între Ox şi OM, măsurat în sens trigonometric.



În aceste condiţii, legătura între coordonatele carteziene (x,y) şi coordonatele polare (ρ,θ) este dată de formulele

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \quad \rho > 0, \quad \theta \in [0,2\pi).$$

De asemenea,

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \rho}(\rho\cos\theta) & \dfrac{\partial}{\partial \theta}(\rho\cos\theta) \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho}(\rho\sin\theta) & \dfrac{\partial}{\partial \theta}(\rho\sin\theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta) \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho.$$

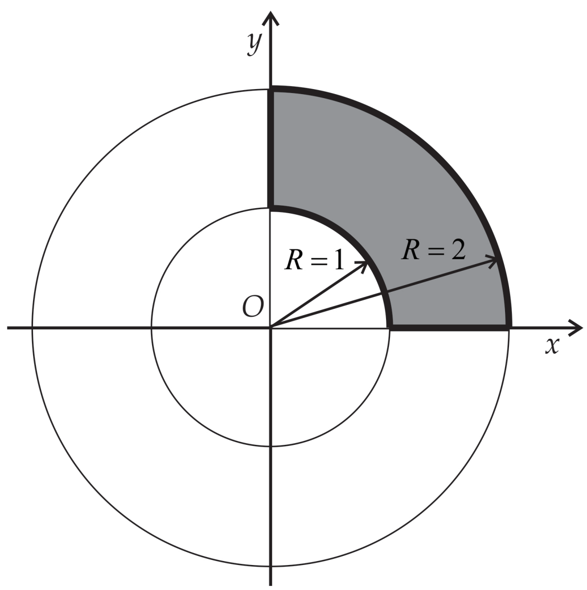
Coordonatele polare sunt utilizate în special pentru integrarea pe domenii circulare (discuri), sau porţiuni din aceste domenii, de exemplu sectoare circulare sau coroane circulare, mai ales când aceste domenii sunt centrate în origine.

În practică, atât pentru ρ cât şi pentru θ vor fi folosite intervalele corespunzătoare închise, ceea ce simplifică calculele. Închiderea intervalelor adaugă la domeniu mulţimi de arie nulă (de obicei porţiuni din cercuri, sau segmente), ceea ce nu modifică valorile integralelor.

Exemplu. Determinaţi

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy,$$

unde $D = \{(x,y); 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, x, y \geq 0\}$.



Soluţie. Domeniul de integrare este cel haşurat în figură. Cercul interior, de ecuaţie $x^2+y^2=1$, are centrul în $O(0,0)$ şi rază 1, iar cercul exterior, de ecuaţie $x^2+y^2=4$, are centrul în $O(0,0)$ şi rază 2. Vom folosi coordonate polare, sub forma

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \quad \rho \in [1,2], \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad dxdy = \rho d\rho d\theta.$$

Atunci

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \iint_{[1,2]\times[0,\frac{\pi}{2}]} e^{-(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta)}\rho d\rho d\theta = \iint_{[1,2]\times[0,\frac{\pi}{2}]} e^{-\rho^2}\rho d\rho d\theta$$

$$= \left(\int_1^2 \rho e^{-\rho^2} d\rho \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta \right) = I_1 \cdot I_2.$$

Observăm că

$$I_1 = \int_1^2 \rho e^{-\rho^2} d\rho = \frac{1}{2} \int_1^2 2\rho e^{-\rho^2} d\rho = \frac{1}{2} \int_1^2 (\rho^2)' e^{-\rho^2} d\rho.$$

Cu schimbarea de variabilă $u = \rho^2$ şi notând că

$$\rho = 1 \implies u = 1, \quad \rho = 2 \implies u = 4,$$

obţinem

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_1^4 e^{-u} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-u}}{-1} \Bigg|_1^4 = \frac{1}{2} \left(e^{-1} - e^{-4} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^4} \right).$$

De asemenea,

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta = \frac{\pi}{2},$$

iar

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy = I_1 \cdot I_2 = \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^4} \right).$$

De notat că, deşi integrandul se poate separa ca un produs de funcţii care depind fiecare de câte o singură variabilă, sub forma

$$e^{-(x^2+y^2)} = e^{-x^2} \cdot e^{-y^2},$$

integrala dublă de mai sus **nu** se poate separa ca un produs de integrale simple, întrucât domeniul nu este un dreptunghi.

1.3.2 Coordonate polare generalizate

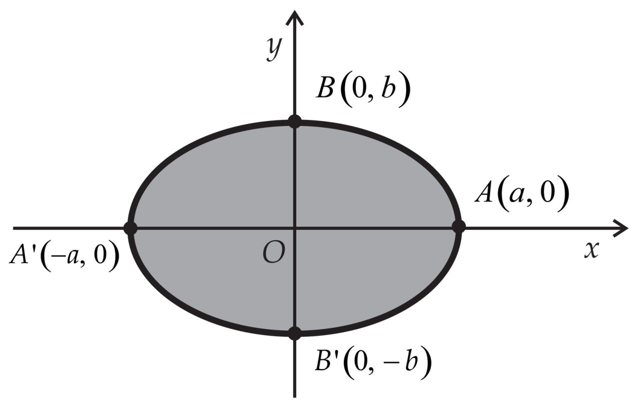
Pentru domenii mărginite de elipse centrate în origine, sau porţiuni ale acestora, se pot folosi **coordonatele polare generalizate** (**coordonatele eliptice**). Astfel, pentru un domeniu mărginit de elipsa de ecuaţie carteziană $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$, vor fi folosite coordonatele (ρ, θ) legate de cele carteziene prin relaţiile

$$\begin{cases} x = a\rho \cos\theta \\ y = b\rho \sin\theta \end{cases}, \quad \rho \in (0, 1], \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

În acest context, θ are aceeaşi semnificaţie ca şi în cazul coordonatelor polare, însă ρ nu mai reprezintă distanţa până la origine, ci o distanţă normalizată ($\rho = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$, în loc de $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$). Printr-un calcul asemănător celui de mai sus se poate deduce că, în acest caz,

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = ab\rho \implies dxdy = ab\rho d\rho d\theta.$$

Exemplu. Determinaţi aria domeniului D mărginit de elipsa $(E) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.



Soluţie. Avem că
$$\text{aria } (D) = \iint_D 1 dxdy,$$
domeniul D fiind cel haşurat în figură. Vom folosi coordonatele eliptice, date de
$$\begin{cases} x = a\rho \cos\theta \\ y = b\rho \sin\theta \end{cases}, \quad \rho \in [0,1], \quad \theta \in [0,2\pi], \quad dxdy = ab\rho d\rho d\theta,$$
unde a, b sunt semiaxele elipsei (E). Urmează că
$$\begin{aligned} \text{aria}(D) &= \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} ab\rho d\rho d\theta = ab \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \rho d\rho d\theta = ab \int_0^1 \rho d\rho \cdot \int_0^{2\pi} 1 d\theta \\ &= ab\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^1 \cdot \theta \Bigg|_0^{2\pi} = ab \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi ab. \end{aligned}$$

2 Legătura între integrala dublă şi integrala curbilinie de specia II. Formula Riemann-Green

În cele ce urmează vom preciza legătura între integrala curbilinie de specia II pe o curbă închisă netedă pe porţiuni şi o anumită integrală dublă pe domeniul plan delimitat de acea curbă.

Teorema 2.1. *Fie D un domeniu de integrare simplu în raport atât cu Ox cât şi cu Oy şi fie C frontiera acestuia, orientată pozitiv. Fie de asemenea $P, Q : D \to \mathbb{R}$ funcţii continue pe D pentru care derivatele parţiale $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ şi $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ sunt de asemenea continue pe D. Atunci*
$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} (x,y)dxdy$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dxdy.$$

De remarcat faptul că în membrul drept apariţia celei de-a doua integrale (trecerea de la integrala curbilinie la integrala dublă) se produce numai în condiţiile apariţiei în acel membru şi a operaţiei inverse, derivarea.

2.0.1 Formula de integrare prin părţi în integrala dublă

Pentru $P \equiv 0$ şi $Q = uv$, unde $u, v : D \to \mathbb{R}$ sunt continue pe D şi derivabile parţial în raport cu variabila x, obţinem că

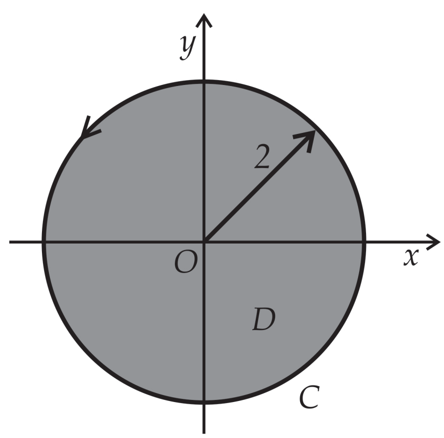
$$\iint_D \frac{\partial}{\partial x}(uv) dxdy = \int_C uvdy \implies \iint_D \frac{\partial u}{\partial x} vdxdy = \int_C uvdy - \iint_D u \frac{\partial v}{\partial x} dxdy.$$

O formulă similară de integrare prin părţi are loc şi pentru derivate parţiale în raport cu variabila y.

Exemplu. Cu ajutorul formulei Riemann-Green, calculaţi

$$\int_\Gamma (y^2 - y)dx + (2xy + x)dy,$$

unde Γ este cercul cu centrul în origine şi de rază 2, parcurs în sens trigonometric.



Soluţie. Observăm că sunt îndeplinite ipotezele formulei Riemann-Green. Urmează că

$$\int_\Gamma (y^2 - y)dx + (2xy + x)dy = \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y^2 - y & 2xy + x \end{vmatrix} dxdy,$$

unde D este discul determinat de Γ. Atunci

$$\int_\Gamma (y^2 - y)dx + (2xy + x)dy = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(2xy + x) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2 - y) \right) dxdy$$
$$= \iint_D ((2y + 1) - (2y - 1))\, dxdy = \iint_D 2dxdy$$
$$= 2 \iint_D dxdy = 2\text{aria}(D) = 2 \cdot \pi 2^2 = 8\pi.$$

3 Aplicaţii ale integralei duble

3.1 Centrul de masă al unei plăci plane

3.1.1 Plăci neomogene

Teorema 3.1. *Fie o placă plană* **neomogenă** *cu grosime neglijabilă, asimilabilă unui domeniu de integrare D, cu densitate variabilă $\rho(x, y)$. Atunci masa plăcii este*

$$m = \iint_D \rho(x, y) dxdy$$

iar coordonatele centrului de masă al plăcii sunt

$$x_{CM} = \frac{1}{m} \iint_D x\rho(x, y) dxdy, \quad y_{CM} = \frac{1}{m} \iint_D y\rho(x, y) dxdy.$$

Să notăm că formulele corespunzătoare obţinute cu ajutorul integralei definite sunt cazuri particulare ale celor de mai sus, atât din punctul de vedere al formei plăcii (un subgrafic al unei funcţii integrabile), cât şi al densităţii sale, placa fiind asumată a fi omogenă (cu densitate constantă).

3.1.2 Plăci omogene

Pentru plăci omogene, cu $\rho(x, y) = \rho =$ constant, urmează că

$$m = \iint_D \rho dxdy = \rho \iint_D 1 dxdy = \rho \, \text{aria}(D),$$

şi similar

$$x_{CM} = \frac{\iint_D x dxdy}{\iint_D 1 dxdy} = \frac{\iint_D x dxdy}{\text{aria}(D)}, \qquad y_{CM} = \frac{\iint_D y dxdy}{\iint_D 1 dxdy} = \frac{\iint_D y dxdy}{\text{aria}(D)}.$$

Integrala triplă

4 Definiţie

4.1 Introducere

Pentru introducerea noţiunii de integrală triplă a unei funcţii definite pe un domeniu de integrare din $\mathbb{R}^3$, vom revizui construcţia utilizată pentru definiţia integralei duble, trecând de la domenii plane (**bi**dimensionale) la domenii spaţiale (**tri**dimensionale).

4.1.1 Domenii de integrare

In acest capitol, prin **domeniu de integrare** vom înţelege un domeniu închis şi mărginit (de o suprafaţă netedă pe porţiuni) din $\mathbb{R}^3$, care are volum, din nou fără a intra în detalii asupra noţiunii de volum (practic, asupra „măsurării" volumului). Trecerea de la integrala dublă la cea triplă se va face în principal înlocuind, în diverse noţiuni şi procedee, noţiunea de arie cu cea de volum.

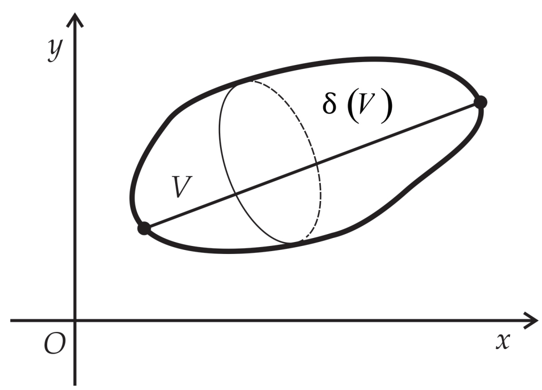
4.1.2 Diviziuni (partiţii) ale unui domeniu de integrare

Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu de integrare. Vom spune că o mulţime ordonată de domenii de integrare $\Delta = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ reprezintă o **diviziune** (sau **partiţie**) a lui V dacă

1. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i = V$.

2. $\overset{\circ}{V_i} \bigcap \overset{\circ}{V_j} = \emptyset$, pentru orice $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$.

Altfel spus, V se poate scrie ca reuniunea tuturor subdomeniilor V_1, V_2, $\ldots$, V_n, iar aceste subdomenii pot avea comune, două câte două, cel mult suprafeţe de pe frontieră, întrucât au două câte două interioarele disjuncte.



4.1.3 Notaţie

Mulţimea diviziunilor unui domeniu de integrare V se notează $\mathcal{D}_V$.

4.1.4 Diametrul unui domeniu de integrare

Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu de integrare. Numim **diametru** al lui V, notat $\delta(V)$, distanţa maximă dintre două puncte ale lui V.

4.1.5 Normă a unei partiţii

Fiind dată o diviziune $\Delta = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$, vom numi **normă** a diviziunii Δ, notată $\|\Delta\|$, valoarea maximă a **diametrelor** $\delta(V_1), \delta(V_2), \ldots, \delta(V_n)$, adică

$$\|\Delta\| = \max_{1 \leq i \leq n} \delta(V_n).$$

4.1.6 Sisteme de puncte intermediare asociate

Fiind dată o diviziune $\Delta = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$, vom numi **sistem de puncte intermediare asociat diviziunii** Δ o mulţime ordonată de puncte

$$C = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\},$$

astfel încât $M_i \in V_i$ pentru $1 \leq i \leq n$ (în fiecare subdomeniu se află câte un punct intermediar).

4.1.7 Sume Riemann

Fiind date un domeniu de integrare V, o funcţie $f : V \to \mathbb{R}$, o diviziune $\Delta = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ a domeniului de integrare V şi $C = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ, $M_i = M_i(\alpha_i, \beta_i . \gamma_i)$, $1 \leq i \leq n$, vom numi **sumă Riemann asociată diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare** C suma

$$\begin{aligned}
\sigma_\Delta(f, C) &= \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \operatorname{vol}(D_i) \\
&= f(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \operatorname{vol}(D_1) + f(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \operatorname{vol}(D_2) + \ldots \\
&\quad + f(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \operatorname{vol}(D_n)
\end{aligned}$$

(valoarea funcţiei în fiecare punct intermediar se înmulţeşte cu volumul subdomeniului din care punctul intermediar face parte, adunându-se rezultatele).

4.1.8 Consideraţii asupra interpretării geometrice a noţiunii de sumă Riemann

Interpretarea geometrică a noţiunii de sumă Riemann nu mai este la fel de intuitivă ca şi cea a noţiunilor similare pentru integrala definită sau cea dublă, în principal datorită faptului că în situaţiile anterioare interpretarea geometrică se făcea cu ajutorul unei noţiuni „cu o dimensiune în plus" faţă de mulţimea pe care urma a se defini integrala. În speţă, o sumă Riemann a unei funcţii definite pe un interval putea fi interpretată cu ajutorul unei arii, iar o sumă Riemann a unei funcţii definite pe un domeniu de integrare din $\mathbb{R}^2$ putea fi interpretată cu ajutorul unui volum. Acum, o sumă Riemann a unei funcţii definite pe un domeniu de integrare din $\mathbb{R}^3$ ar trebui interpretată cu ajutorul unor noţiuni referitoare la spaţiul $\mathbb{R}^4$, adică nu la un spaţiu fizic, ci la un spaţiu abstract.

4.1.9 Funcţii integrabile Riemann

Definiţie. Fie V un domeniu de integrare, $V \subset \mathbb{R}^3$, şi fie $f : V \to \mathbb{R}$. Vom spune că f este **integrabilă Riemann** pe V (pe scurt, f este **integrabilă** pe V) dacă există un număr real I astfel încât oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că

oricare ar fi diviziunea $\Delta \in \mathcal{D}_V$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi oricare ar fi sistemul de puncte intermediare C asociat lui Δ, are loc inegalitatea

$$|\sigma_\Delta(f, C) - I| < \varepsilon.$$

4.1.10 Integrala triplă

Numărul I de mai sus se numeşte **integrala triplă** a funcţiei f pe domeniul spaţial V şi se notează

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz.$$

Să observăm şi că I, dacă există, este unic determinat.

Mulţimea V se numeşte **domeniu de integrare**, funcţia f se numeşte **integrand**, iar variabilele x, y, z se numesc **variabile de integrare**. Expresia $dxdydz$ se numeşte **element de volum**, notat uneori şi cu dV.

4.1.11 Definiţie alternativă

Are loc următoarea echivalenţă, cea de-a doua afirmaţie putând fi utilizată de asemenea ca definiţie a integrabilităţii Riemann.

Teorema 4.1. *Fie V un domeniu de integrare, $V \subset \mathbb{R}^3$, şi fie o funcţie $f : V \to \mathbb{R}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente.*

1. *f este integrabilă pe V.*
2. *Oricare ar fi un şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\geq 0}$ ale lui V cu $\|\Delta_n\| \to 0$, împreună cu un şir de sisteme de puncte intermediare asociate $(C_n)_{n\geq 0}$, şirul sumelor Riemann $(\sigma_{\Delta_n}(f, C_n))_{n\geq 0}$ este convergent.*

Din nou, se poate demonstra că limita unui astfel de şir de sume Riemann nu depinde nici de alegerea şirului de diviziuni $(\Delta_n)_{n\geq 0}$, nici de alegerea şirului de sisteme de puncte intermediare asociate $(C_n)_{n\geq 0}$. Valoarea (comună) a limitelor reprezintă $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$.

4.1.12 Domeniu de integrare cu volum nul. Integrala funcţiei nule

Cu ajutorul definiţiei, ţinând cont de faptul că toate sumele Riemann asociate sunt nule, putem obţine următoarele proprietăţi.

1. Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu de integrare cu volum nul şi fie $f : V \to \mathbb{R}$ integrabilă. Atunci
$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = 0.$$
2. Fie V un domeniu de integrare. Atunci
$$\iiint_V 0dxdydz = 0.$$

4.1.13 Interpretare geometrică: volum

Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu de integrare. Conform definiţiei, se obţine că

$$\iiint_V 1dxdydz = \text{vol}(V).$$

La fel ca şi în cazul integralei definite şi al celei duble, integrându-l pe 1 pe o mulţime obţinem „măsura" acelei mulţimi, în acest caz volumul.

4.1.14 Legătura între integrabilitate şi alte proprietăţi ale funcţiilor

Din nou, funcţiile continue pe un domeniu spaţial $V \subset \mathbb{R}^3$ sunt integrabile. De asemenea, funcţiile integrabile pe un astfel de domeniu sunt mărginite.

Teorema 4.2. *Fie V un domeniu de integrare, $V \subset \mathbb{R}^3$, şi fie $f : V \to \mathbb{R}$, f continuă pe V. Atunci f este integrabilă pe V.*

Teorema 4.3. *Fie V un domeniu de integrare, $V \subset \mathbb{R}^3$, şi fie $f : V \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe V. Atunci f este mărginită pe V.*

5 Operaţii cu funcţii integrabile

Fiind obţinută printr-un acelaşi tip de procedeu, integrala triplă păstrează toate proprietăţile integralei duble, atât pe cele în raport cu intervalul cât şi pe cele în raport cu funcţia.

Teorema 5.1. *Fie V un domeniu de integrare, $V \subset \mathbb{R}^3$, $f, g : V \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe V, şi $c \in \mathbb{R}$. Au loc următoarele proprietăţi.*

1. **Proprietatea de aditivitate**

   Funcţiile $f + g$ şi $f - g$ sunt integrabile pe V, iar

$$\iiint_V (f(x,y,z) + g(x,y,z))dxdydz = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz + \iiint_V g(x,y,z)dxdydz$$

   *(***integrala sumei este egală cu suma integralelor***), respectiv*

$$\iiint_V (f(x,y,z) - g(x,y,z))dxdydz = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz - \iiint_V g(x,y,z)dxdydz$$

   *(***integrala diferenţei este egală cu diferenţa integralelor***).*

2. **Proprietatea de omogenitate**

Funcţia cf este integrabilă pe V, iar

$$\iiint_V cf(x,y,z)dxdydz = c\iiint_V f(x,y,z)dxdydz,$$

(**o constantă cu care se înmulţeşte poate fi trecută de sub integrală înaintea integralei**).

Condensat, formulele de mai sus pot fi scrise sub forma următoare.

Teorema 5.2. *Fie V un domeniu de integrare, $f, g : V \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe V şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Atunci $c_1 f + c_2 g$ este integrabilă pe V şi*

$$\iiint_V (c_1 f(x,y,z) + c_2 g(x,y,z))dxdydz = c_1 \iiint_V f(x,y,z)dxdydz + c_2 \iiint_V g(x,y,z)dxdydz.$$

6 Proprietăţi ale integralei triple

6.1 Proprietăţi în raport cu domeniul

6.1.1 Restrângerea domeniului de integrare

Teorema 6.1. *Fie V un domeniu de integrare, $V \subset \mathbb{R}^3$, şi fie $f : V \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe V. Atunci f este integrabilă pe orice subdomeniu $V_1 \subset V$.*

6.1.2 Extinderea domeniului de integrare. Aditivitatea în raport cu domeniul

Teorema 6.2. *Fie V un domeniu de integrare, $V \subset \mathbb{R}^3$, şi fie $f : V \to \mathbb{R}$. Dacă domeniile de integrare V_1, $V_2, \ldots, V_n$ formează o diviziune a lui V, iar f este integrabilă pe $V_1, V_2, \ldots, V_n$, atunci f este integrabilă pe întreg V, iar*

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint_{V_2} f(x,y,z)dxdydz + \ldots + \iiint_{V_n} f(x,y,z)dxdydz$$

AM2, Curs 13, 21.05.2020

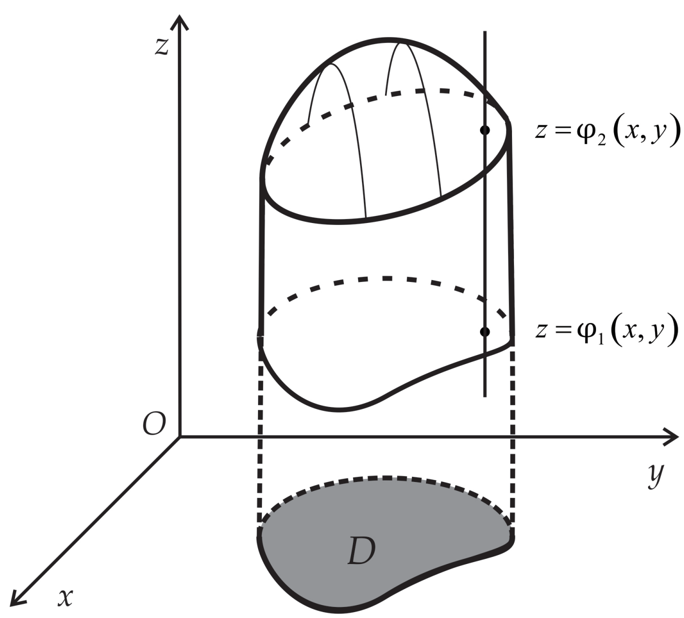
Integrala triplă (continuare)

1 Calculul integralelor triple

Reamintim că, pentru calculul integralelor duble, una dintre posibilele metode de lucru era de a reduce calculul integralei duble la calculul succesiv a două integrale definite, utilizând pe rând cele două variabile ca variabile de integrare. În acest scop, se realizau o **proiecţie** şi o **secţiune**, domeniul numindu-se simplu în raport cu axa paralelă cu domeniul de secţiune în anumite condiţii cu suport geometric.

Ideea de a determina valoarea a unei integrale de ordin superior prin calculul succesiv al unor integrale de ordin mai mic se păstrează şi pentru integrala triplă. Acum, proiecţia se va realiza pe unul dintre planele de coordonate (şi deci integrala „de proiecţie" va fi o integrală dublă), iar secţiunea se va realiza paralel cu una dintre axe (şi deci integrala „de secţiune" va fi o integrală simplă).

1.1 Domenii simple în raport cu axa Oz



Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu de integrare. V se numeşte **simplu în raport cu** Oz dacă

1. Proiecţia lui V pe planul xOy este un domeniu de integrare D în $\mathbb{R}^2$.
2. Există $\varphi_1, \varphi_2 : D \to \mathbb{R}$ continue astfel ca V se poate scrie sub forma

$$V = \{(x, y, z); \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y), (x, y) \in D\}.$$

Cea de-a doua condiţie reprezintă faptul că orice paralelă la axa Oz prin $M(x, y)$ din proiecţia lui V pe planul xOy taie frontiera domeniului V în cel mult două puncte,

$\varphi_1(x,y)$ fiind coordonata z (cota) punctului de intrare, iar $\varphi_2(x,y)$ fiind cota punctului de ieşire. Cele două puncte pot eventual şi coincide.

Analog se definesc noţiunile de **domeniu simplu în raport cu** Ox şi de **domeniu simplu în raport cu** Oy.

Teorema 1.1. *Fie V un domeniu simplu în raport cu axa Oz şi fie $f : V \to \mathbb{R}$ integrabilă pe V. Dacă $I : D \to \mathbb{R}$,*

$$I(x,y) = \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz, \quad \text{pentru } (x,y) \in D,$$

este bine definită şi integrabilă pe D, atunci

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy.$$

La fel ca şi în cazul integralei duble, ordinea de scriere a integralelor nu este ordinea de calcul. Astfel, mai întâi se calculează integrala interioară (cea în raport cu z), iar abia apoi cea exterioară (cea în raport cu perechea de variabile (x,y)). În particular, ipotezele asupra lui I sunt satisfăcute dacă f este funcţie continuă.

Corolar 1.1.1. *Fie V un domeniu simplu în raport cu axa Oz şi fie $f : V \to \mathbb{R}$ continuă pe V. Atunci*

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy.$$

Formule de calcul similare celor enunţate mai sus au loc şi pentru domenii simple în raport cu Ox sau Oy. În situaţia în care domeniul de integrare este simplu în raport cu mai multe axe, alegerea uneia dintre formule se poate face pe considerente geometrice asupra formei domeniului sau pe baza formei particulare a funcţiei.

Exemplu. Determinaţi volumul corpului V determinat de paraboloidul de rotaţie $z = x^2 + y^2$ şi planul $z = 4$.

Soluţie. Avem că

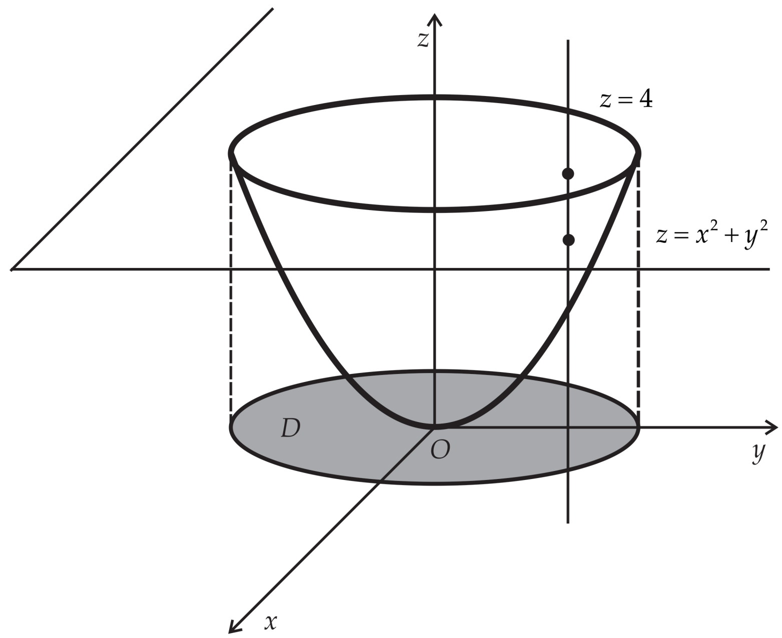
$$\text{vol}(V) = \iiint_V 1dxdydz.$$

Domeniul este simplu în raport cu toate cele trei axe. Deoarece V este un corp de rotaţie în jurul lui Oz, iar proiecţia lui V pe xOy este un disc (convenabil descris cu ajutorul coordonatelor polare), vom folosi faptul că V este simplu în raport cu Oz.

Discul D de proiecţie are raza egală cu cea a cercului de intersecţie între paraboloid şi planul $z = 4$, paralel cu planul xOy. Determinăm acum raza cercului de intersecţie. Urmează că

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 4 \end{cases} \implies x^2 + y^2 = 4 = 2^2,$$

deci raza cercului de intersecţie este $R = 2$, iar două dintre coordonatele centrului C sunt $x_C = 0$ şi $y_C = 0$. Cea de-a treia coordonată este $z_C = 4$, întrucât cercul de



intersecţie este conţinut în planul $z = 4$. Discul de proiecţie D are deci rază 2 şi centru O (proiecţia lui C).

Pentru a determina domeniul de secţiune, ducem o paralelă la axa Oz printr-un punct oarecare (x, y) din domeniul de proiecţie. Observăm că punctul de „intrare" în V al paralelei este situat pe paraboloidul $z = x^2 + y^2$, în timp ce punctul de „ieşire" este situat în planul $z = 4$. Urmează că

$$\mathrm{vol}(V) = \iiint_V 1 dxdydz = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^{4} 1dz \right) dxdy.$$

Calculăm mai întâi integrala interioară, obţinând că

$$\int_{x^2+y^2}^{4} 1dz = z \Big|_{x^2+y^2}^{4} = 4 - (x^2 + y^2).$$

Atunci

$$\mathrm{vol}(V) = \iint_D (4 - (x^2 + y^2))dxdy.$$

Întrucât D este un disc centrat în origine, pentru calculul integralei duble vom folosi coordonatele polare, sub forma

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}, \quad \rho \in [0, 2], \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad dxdy = \rho d\rho d\theta.$$

Urmează că

$$\mathrm{vol}(V) = \iint_{[0,2]\times[0,2\pi]} (4 - (\rho^2 \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\theta))\rho d\rho d\theta$$

$$= \iint_{[0,2]\times[0,2\pi]} (4-\rho^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta))\rho d\rho d\theta$$
$$= \iint_{[0,2]\times[0,2\pi]} (4-\rho^2)\rho d\rho d\theta$$
$$= \left(\int_0^2 (4-\rho^2)\rho d\rho\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} 1 d\theta\right) = I_1\cdot I_2.$$

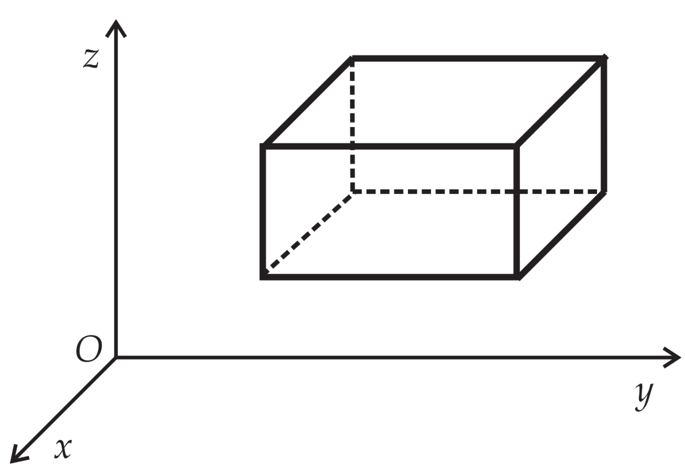
Deoarece
$$I_1 = \int_0^2 (4-\rho^2)\rho d\rho = \int_0^2 (4\rho-\rho^3)d\rho = \int_0^2 4\rho d\rho - \int_0^2 \rho^3 d\rho$$
$$= 4\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^2 - \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^2 = 4\cdot 2 - \frac{16}{4} = 4,$$

iar
$$I_2 = \int_0^{2\pi} 1 d\theta = \theta\Big|_0^{2\pi} = 2\pi,$$

urmează că
$$\mathrm{vol}(V) = 4\cdot 2\pi = 8\pi.$$

1.2 Domenii paralelipipedice

La fel ca şi în cazul integralelor duble, formulele de calcul pentru integralele triple se simplifică în mod considerabil atunci când domeniul de integrare este un paralelipiped cu laturile paralele cu axele de coordonate, nemaifiind necesară determinarea domeniului de secţiune. Un astfel de paralelipiped poate fi scris ca un produs cartezian de intervale sub forma
$$V = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3],$$
unde $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$, $[a_3,b_3]$, reprezintă intervalele de valori pentru abscisele, respectiv ordonatele şi cotele punctelor din V. În această situaţie, V este simplu în raport cu toate cele 3 axe de coordonate.



Corolar 1.1.2. *Fie* $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \to \mathbb{R}$, *$f$ continuă. Atunci*

$$\iiint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz \right) dxdy$$
$$= \iint_{[a_1,b_1]\times[a_3,b_3]} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y,z)dy \right) dxdz$$
$$= \iint_{[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)dx \right) dydz.$$

1.3 Domenii paralelipipedice şi funcţii separabile ca produse

Dacă domeniul de integrare V este un paralelipiped cu laturile paralele cu axele de coordonate, iar integrandul f se poate scrie ca produs între o funcţie care depinde doar de variabila x, o funcţie care depinde doar de variabila y şi o funcţie care depinde doar de variabila z, atunci integrala triplă $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$ se poate scrie ca un produs de integrale simple.

Teorema 1.2. *Fie* $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z),$$

unde f_1, f_2, f_3 sunt funcţii continue. Atunci

$$\iiint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f(x,y,z)dxdydz$$
$$= \iiint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z)dxdydz$$
$$= \left(\int_{a_1}^{b_1} f_1(x)dx \right) \cdot \left(\int_{a_2}^{b_2} f_2(y)dy \right) \cdot \left(\int_{a_3}^{b_3} f_3(y)dy \right).$$

Exemplu. Determinaţi

$$\iiint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\pi]\times[0,1]} \sin x \cos y dxdydz.$$

Soluţie. Domeniul de integrare este un paralelipiped cu laturile paralele cu axele de coordonate, iar integrandul se separă ca un produs între o funcţie doar de variabila x, o funcţie doar de variabila y şi o funcţie constantă, sub forma

$$\sin x \cos y = \sin x \cdot \cos y \cdot 1.$$

Urmează că

$$\iiint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\pi]\times[0,1]} \sin x \cos y dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \cdot \int_0^{\pi} \cos y dy \cdot \int_0^1 1 dz$$

$$= (-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \sin y\Big|_0^{\pi} \cdot z\Big|_0^{1} = 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0.$$

1.4 Formula de schimbare de variabilă în integrala triplă

În unele situaţii, fie funcţia de integrat, fie forma geometrică a domeniului se simplifică după schimbări de variabile.

1.4.1 Schimbări de variabilă (transformări regulate)

Fie V_1 un domeniu de integrare mărginit de suprafaţa închisă netedă pe porţiuni S_1 şi V_2 un domeniu de integrare mărginit de suprafaţa închisă netedă pe porţiuni S_2. Spunem că V_2 se transformă în V_1 prin **schimbarea de variabilă** (sau **transformarea regulată**)

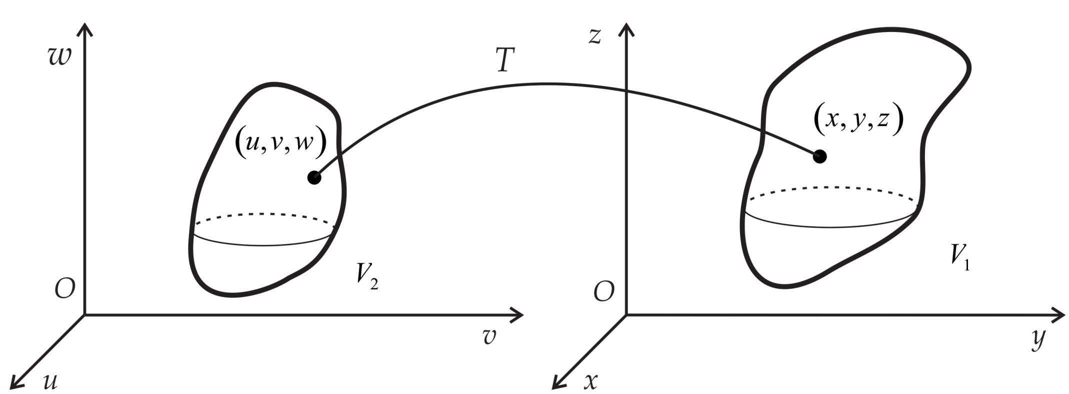
$$T : \begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}, \ (u,v,w) \in V_2,$$

dacă

1. T este bijectivă ca funcţie de la V_2 la V_1.
2. Funcţiile $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$ şi $z = y(u,v,w)$ au derivatele parţiale de ordinul 1 şi derivatele parţiale mixte de ordinul al doilea continue.
3. Determinantul funcţional (numit **determinant jacobian**)

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

este nenul pentru $(u,v,w) \in V_2$.



1.4.2 Formula de schimbare de variabilă

Teorema 1.3. *Fie V_1 un domeniu de integrare mărginit de suprafaţa închisă netedă pe porţiuni S_1 şi V_2 un domeniu de integrare mărginit de suprafaţa închisă netedă pe porţiuni S_2, astfel încât V_2 se transformă în V_1 prin* **schimbarea de variabilă** *(sau* **transformarea regulată***)*

$$T : \begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}, \ (u, v, w) \in V_2.$$

Fie de asemenea $f : V_1 \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci

$$\iiint_{V_1} f(x, y, z) dxdydz$$
$$= \iiint_{V_2} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| dudvdw.$$

În prima parte a membrului drept, **variabilele vechi** x, y şi z se înlocuiesc în funcţie de **variabilele noi** u, v şi w. Cea de-a doua parte a membrului drept reprezintă **formula de transformare a elementului de volum**, care poate fi scrisă sub forma

$$dxdydz = \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| dudvdw.$$

1.5 Coordonate sferice şi sferice generalizate

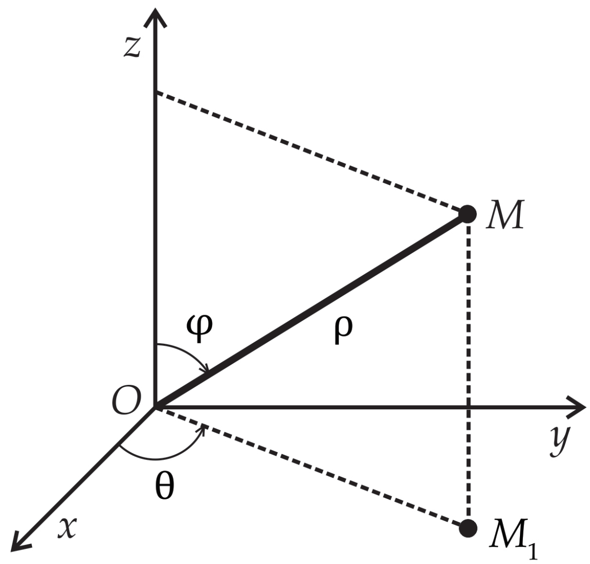
1.5.1 Coordonate sferice

Fiind dat un reper cartezian $Oxyz$ în spaţiu, putem preciza poziţia unui punct $M \notin Oz$ atât prin coordonatele sale carteziene (x, y, z), cât şi prin **coordonatele sale sferice** (ρ, φ, θ), unde

1. ρ reprezintă distanţa între M şi O;
2. φ reprezintă unghiul neorientat între raza vectoare OM şi semiaxa Oz;
3. θ reprezintă unghiul orientat între Ox şi OM_1, M_1 fiind proiecţia lui M pe planul xOy, măsurat în sens trigonometric.

În aceste condiţii, legătura între coordonatele carteziene (x, y, z) şi coordonatele sferice (ρ, φ, θ) este dată de formulele

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}, \quad \rho > 0, \quad \varphi \in [0, \pi], \quad \theta \in [0, 2\pi).$$



De asemenea,

$$
\begin{aligned}
\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \sin\varphi \cos\theta) & \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho \sin\varphi \cos\theta) & \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \sin\varphi \cos\theta) \\ \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \sin\varphi \sin\theta) & \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho \sin\varphi \sin\theta) & \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \sin\varphi \sin\theta) \\ \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \cos\varphi) & \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho \cos\varphi) & \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \cos\varphi) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} \\
&= \rho^2 \sin\varphi \cos^2\varphi \cos^2\theta + \rho^2 \sin^3\varphi \sin^2\theta + \rho^2 \sin\varphi \cos^2\varphi \sin^2\theta \\
&\quad + \rho^2 \sin^3\varphi \cos^2\theta.
\end{aligned}
$$

Grupând termenii doi câte doi, obţinem

$$
\begin{aligned}
\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)} &= \rho^2 \sin\varphi \cos^2\varphi(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \rho^2 \sin^3\varphi(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\
&= \rho^2 \sin\varphi \cos^2\varphi + \rho^2 \sin^3\varphi = \rho^2 \sin\varphi(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \\
&= \rho^2 \sin\varphi.
\end{aligned}
$$

1.5.2 Formula de transformare a elementului de volum

De aici, obţinem următoarea formulă de transformare a elementului de volum pentru trecerea de la coordonate carteziene la coordonate sferice

$$dxdydz = \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

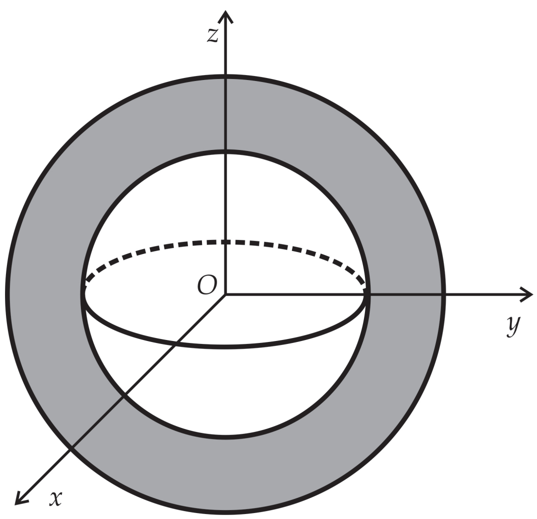
1.5.3 Utilitatea coordonatelor sferice

Coordonatele sferice sunt utilizate în special pentru integrarea pe domenii sferice (bile sferice), sau porţiuni din aceste domenii, mai ales când aceste domenii sunt centrate în origine. Din nou, în practică, atât pentru ρ cât şi pentru θ vor fi folosite intervalele corespunzătoare închise, întrucât închiderea intervalelor adaugă la domeniu mulţimi de volum nul, ceea ce nu modifică valorile integralelor.

Exemplu. Determinaţi

$$\iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

unde V este domeniul spaţial mărginit de sferele $(S1):\ x^2+y^2+z^2=1$ şi $(S2):$ $x^2+y^2+z^2=4$.



Soluţie. Sfera $(S1)$ are centrul în origine şi rază $R_1 = 1$, în vreme ce sfera $(S2)$ are centrul tot în origine şi rază $R_2 = 2$. Vom folosi coordonate sferice, sub forma

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}, \quad \rho\in[1,2], \quad \varphi\in[0,\pi], \quad \theta\in[0,2\pi),$$

$$dxdydz = \rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta,$$

valorile maximă şi respectiv minimă ale lui ρ fiind deduse din faptul că, întrucât domeniul V este mărginit de cele două sfere, distanţa dintre un punct al său şi origine este minimă şi egală cu 1 când punctul se află pe $(S1)$, respectiv maximă şi egală cu 2 când punctul se află pe $(S2)$. Atunci

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+y^2+z^2} &= \sqrt{\rho^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+\rho^2\cos^2\varphi}\\ &= \sqrt{\rho^2\sin^2\varphi(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+\rho^2\cos^2\varphi} = \sqrt{\rho^2\sin^2\varphi+\rho^2\cos^2\varphi}\\ &= \sqrt{\rho^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)} = \sqrt{\rho^2} = \rho.\end{aligned}$$

Altfel, se putea observa direct că $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ reprezintă distanţa între punctul curent $M(x,y,z)$ şi originea $O(0,0,0)$, prin definiţie egală cu ρ. Urmează că

$$\begin{aligned}&\iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \iiint_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz\\ &= \iiint_{[1,2]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} \frac{1}{\rho}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta = \iiint_{[1,2]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} \rho\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta\\ &= \int_1^2 \rho d\rho\cdot\int_0^\pi \sin\varphi d\varphi\cdot\int_0^{2\pi} 1 d\theta = \frac{\rho^2}{2}\Big|_1^2\cdot(-\cos\varphi)\Big|_0^\pi\cdot\theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\cdot 2\cdot 2\pi\\ &= 6\pi.\end{aligned}$$

1.5.4 Coordonate sferice generalizate

Pentru domenii mărginite de elipsoizi centraţi în origine, sau porţiuni ale acestora, se pot folosi **coordonatele sferice generalizate**. Astfel, pentru un domeniu mărginit de elipsoidul de ecuaţie carteziană $(E) : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$, vor fi folosite coordonatele (ρ,φ,θ) legate de cele carteziene prin relaţiile

$$\begin{cases} x = a\rho\sin\varphi\cos\theta\\ y = b\rho\sin\varphi\sin\theta\\ z = c\rho\cos\varphi\end{cases}, \quad \rho\in[0,1],\quad \varphi\in[0,\pi],\quad \theta\in[0,2\pi).$$

Printr-un calcul asemănător celui de mai sus se poate deduce că, în acest caz,

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)} = abc\rho^2\sin\varphi \implies dxdydz = abc\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

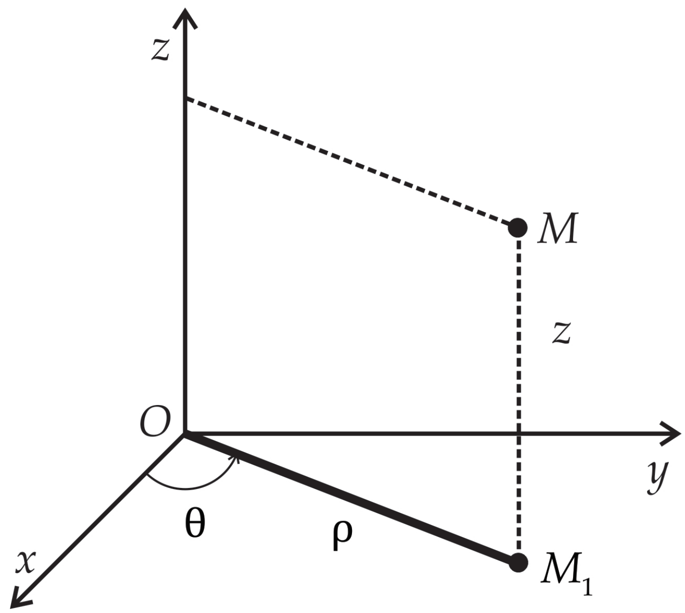
1.6 Coordonate cilindrice

Fiind dat un reper cartezian $Oxyz$ în spaţiu, putem preciza poziţia unui punct $M\notin Oz$ şi prin **coordonatele sale cilindrice** (ρ,θ,z), unde

1. ρ reprezintă distanţa între proiecţia M_1 a lui M pe planul xOy şi O;

2. θ reprezintă unghiul orientat între Ox şi OM_1, măsurat în sens trigonometric.

3. z îşi păstrează semnificaţia.



Altfel spus, coordonatele cilindrice ale unui punct sunt coordonatele polare ale proiecţiei acelui punct pe planul xOy, la care se adaugă coordonata z iniţială. De remarcat faptul că, pentru coordonatele cilindrice, ρ are o semnificaţie diferită faţă de cea avută pentru coordonatele sferice.

În aceste condiţii, legătura între coordonatele carteziene (x, y, z) şi coordonatele cilindrice (ρ, θ, z) este dată de formulele

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}, \quad \rho > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad z \in \mathbb{R}.$$

De asemenea,

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\cos\theta) & \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho\cos\theta) & \frac{\partial}{\partial z}(\rho\cos\theta) \\ \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\sin\theta) & \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho\sin\theta) & \frac{\partial}{\partial z}(\rho\sin\theta) \\ \frac{\partial}{\partial \rho}(z) & \frac{\partial}{\partial \theta}(z) & \frac{\partial}{\partial z}(z) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho,$$

deci

$$dxdydz = \rho d\rho d\theta dz.$$

1.6.1 Utilitatea coordonatelor cilindrice

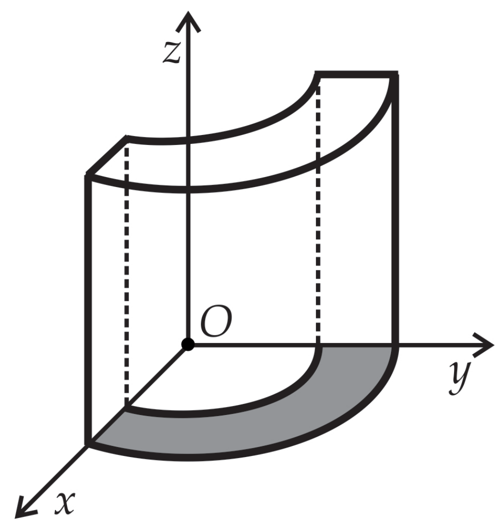
Coordonatele cilindrice sunt utilizate în special pentru integrarea pe domenii cilindrice sau pe domenii de rotaţie în jurul lui Oz (de exemplu, interioarele unor conuri sau paraboloizi de rotaţie). Din acelaşi motiv ca şi în cazul coordonatelor sferice, în practică, atât pentru ρ cât şi pentru θ vor fi folosite intervalele corespunzătoare închise.

Exemplu. Determinaţi

$$\iiint_V xzdxdydz,$$

unde V este domeniul tridimensional definit de

$$V = \left\{(x, y, z); 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 2\right\}.$$



Domeniul V poate fi privit ca un cilindru cu rază a bazei 3, generatoarea paralelă cu Oz şi înălţime 2, din care se extrage un cilindru de acelaşi tip, dar cu rază a bazei 2, iar din rezultat se păstrează doar partea din primul octant. Vom folosi coordonate cilindrice, date de

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}, \quad \rho \in [2, 3], \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad z \in [0, 2], \quad dxdydz = \rho d\rho d\theta dz.$$

Atunci

$$\begin{aligned} \iiint_V xzdxdydz &= \iiint_{[2,3]\times[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,2]} \rho \cos \theta z \cdot \rho d\rho d\theta dz \\ &= \int_2^3 \rho^2 d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \cdot \int_0^2 zdz = \frac{\rho^3}{3} \bigg|_2^3 \cdot \sin \theta \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{z^2}{2} \bigg|_0^2 = \frac{19}{3} \cdot 1 \cdot 2 \\ &= \frac{38}{3}. \end{aligned}$$

AM2, Curs 14, 28.05.2020

Integrala triplă (continuare)

1 Calculul integralelor triple (continuare)

1.1 Schimbări de variabilă

1.1.1 Coordonate sferice generalizate

Pentru domenii mărginite de elipsoizi centraţi în origine, sau porţiuni ale acestora, se pot folosi **coordonatele sferice generalizate**. Astfel, pentru un domeniu mărginit de elipsoidul de ecuaţie carteziană $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, vor fi folosite coordonatele (ρ, φ, θ) legate de cele carteziene prin relaţiile

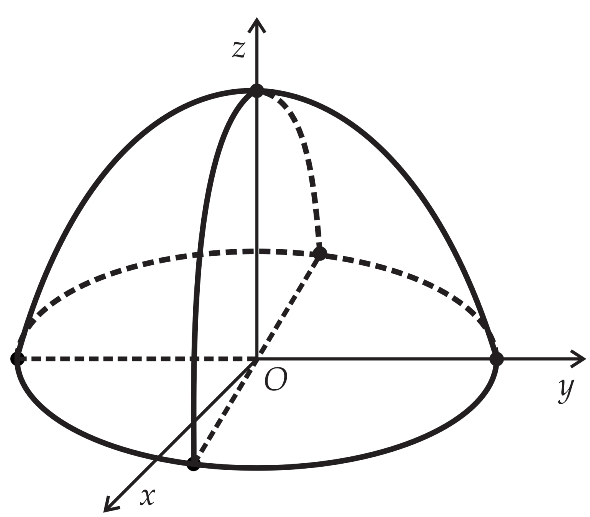
$$\begin{cases} x = a\rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = b\rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = c\rho \cos\varphi \end{cases}, \quad \rho \in [0,1], \quad \varphi \in [0,\pi], \quad \theta \in [0,2\pi).$$

Printr-un calcul asemănător celui făcut pentru coordonatele sferice, se poate deduce că, în acest caz,

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)} = abc\rho^2 \sin\varphi \implies dxdydz = abc\rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

Exemplu. Determinaţi volumul domeniului V definit prin

$$V = \left\{(x,y,z); \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} \leq 1;\ z \geq 0\right\}.$$



Soluţie. Domeniul V este jumătatea superioară a corpului eliptic mărginit de elipsoidul

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1,$$

de semiaxe 3, 4, 5. Avem că

$$\text{vol}(V) = \iiint_V 1dxdydz.$$

Vom folosi coordonatele sferice generalizate, date de

$$\begin{cases} x = 3\rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = 4\rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = 5\rho \cos\varphi \end{cases}, \quad \rho \in [0,1], \quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

intervalul de valori pentru φ fiind dat de faptul că V este jumătatea **superioară** (pentru cea **inferioară** ar fi trebuit $\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$). În acest caz,

$$dxdydz = 3 \cdot 4 \cdot 5\rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta = 60\rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

Atunci

$$\begin{aligned}
\text{vol}(V) &= \iiint_{[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,2\pi]} 1 \cdot 60\rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta \\
&= 60 \cdot \int_0^1 \rho^2 d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 60 \cdot \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^1 \cdot (-\cos\varphi)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \theta \Bigg|_0^{2\pi} \\
&= 60 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2\pi = 40\pi.
\end{aligned}$$

2 Aplicaţii ale integralei triple

2.1 Centrul de masă al unui corp

2.1.1 Corpuri neomogene

Teorema 2.1. *Fie un corp* **neomogen** *V, asimilabil unui domeniu de integrare, cu densitate variabilă $\rho(x, y, z)$. Atunci masa corpului este*

$$m = \iiint_V \rho(x, y, z)dxdydz$$

iar coordonatele centrului de masă al corpului sunt

$$x_{CM} = \frac{1}{m}\iiint_V x\rho(x, y, z)dxdydz, \quad y_{CM} = \frac{1}{m}\iiint_V y\rho(x, y, z)dxdydz,$$
$$z_{CM} = \frac{1}{m}\iiint_V z\rho(x, y, z)dxdydz.$$

2.1.2 Corpuri omogene

Pentru corpuri omogene, cu $\rho(x,y,z) = \rho = \text{constant}$, urmează că

$$m = \iiint_V \rho dxdydz = \rho \iiint_D 1 dxdydz = \rho \operatorname{vol}(V),$$

şi similar

$$x_{CM} = \frac{\iiint_V xdxdydz}{\iiint_V 1dxdydz} = \frac{\iiint_V xdxdydz}{\operatorname{vol}(V)}, \quad y_{CM} = \frac{\iiint_V ydxdydz}{\iiint_V 1dxdydz} = \frac{\iiint_V ydxdydz}{\operatorname{vol}(V)}$$
$$z_{CM} = \frac{\iiint_V zdxdydz}{\iiint_V 1dxdydz} = \frac{\iiint_V zdxdydz}{\operatorname{vol}(V)}.$$

Exemplu. Determinaţi coordonatele centrului de masă al corpului omogen V definit prin

$$V = \left\{(x,y,z);\ x^2 + y^2 + z^2 \le R^2; z \ge 0\right\}, \quad \text{unde } R > 0.$$

Soluţie. Corpul respectiv este jumătatea superioară a bilei sferice cu rază R centrată în origine. Atunci

$$x_{CM} = \frac{\iiint_V xdxdydz}{\iiint_V 1dxdydz}, \qquad y_{CM} = \frac{\iiint_V ydxdydz}{\iiint_V 1dxdydz}, \qquad z_{CM} = \frac{\iiint_V zdxdydz}{\iiint_V 1dxdydz},$$

pentru calculul acestor integrale putând fi folosite coordonate sferice, date de

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}, \quad \rho \in [0,R], \quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \theta \in [0, 2\pi),$$
$$dxdydz = \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

Cum volumul lui V este jumătate din volumul unei bile sferice de rază R, adică $\frac{1}{2}\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{6}$, urmează că

$$x_{CM} = \frac{\iiint_{[0,R]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} \rho \sin\varphi \sin\theta \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta}{\frac{4\pi R^3}{6}}$$
$$= \frac{6}{4\pi R^3} \cdot \int_0^R \rho^3 d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta.$$

Deoarece

$$\int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = (-\cos\theta)\Big|_0^{2\pi} = 0,$$

urmează că $x_{CM} = 0$. Cu un raţionament similar, putem obţine că $y_{CM} = 0$. De fapt, la aceste concluzii se puteau obţine şi observând că axa Oz este axă de simetrie pentru V. Atunci şi centrul de masă se află pe această axa, deci $x_{CM} = 0$, $y_{CM} = 0$, întrucât toate punctele de pe Oz au abscisa şi ordonata nulă.

De asemenea,

$$\begin{aligned}
z_{CM} &= \frac{\iiint_{[0,R]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} \rho\cos\varphi \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta}{\frac{4\pi R^3}{6}} \\
&= \frac{6}{4\pi R^3} \cdot \int_0^R \rho^3 d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} 1 d\theta \\
&= \frac{3}{2\pi R^3} \cdot \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^R \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2\varphi d\varphi \cdot \theta\Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{3}{2\pi R^3} \cdot \frac{R^4}{4} \cdot \frac{1}{2}\frac{(-\cos 2\varphi)}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot 2\pi \\
&= \frac{6\pi R^4}{16\pi R^3} \cdot \frac{(-\cos 2\varphi)}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3R}{8} \cdot 1 = \frac{3R}{8}.
\end{aligned}$$

3 Definiţii şi proprietăţi

3.1 Câmpuri scalare. Câmpuri vectoriale

Fie $D \subset \mathbb{R}^3$. Numim **câmp scalar** pe D o funcţie (cu valori scalare) $u : D \to \mathbb{R}$. Numim **câmp vectorial** pe D o funcţie (cu valori vectoriale) $\vec{F} : D \to \mathbf{V_3}$. Astfel, oricărui punct $M \in D$ i se poate asocia un scalar (în cazul câmpurilor scalare), respectiv un vector (în cazul câmpurilor vectoriale). Atunci când un astfel de câmp nu depinde decât de poziţia punctului M, el se numeşte **staţionar**, în cazul în care el depinde şi de alte variabile (de obicei de timp) numind-se **nestaţionar**.

3.2 Aspecte fizice

De exemplu, oricărui punct de pe suprafaţa Pământului i se poate asocia temperatura în acel punct, obţinându-se un câmp scalar (evident, nestaţionar). Acelaşi lucru se poate realiza asociindu-i umiditatea relativă, presiunea atmosferică, ş.a.m.d.

Similar, oricărui punct de pe suprafaţa Pământului i se poate asocia intensitatea câmpului gravitaţional în acel punct (direcţionată către centrul de masă al Pământului, necesitând utilizarea unui vector pentru caracterizare completă), obţinându-se un câmp vectorial (staţionar). Acelaşi lucru se poate realiza asociind viteza şi direcţia vântului în acel punct (care, din nou, necesită utilizarea unui vector pentru caracterizare completă), obţinându-se însă în acest caz un câmp vectorial nestaţionar.

Vom nota uneori $u(M)$, în loc de $u(x, y, z)$, (respectiv $\vec{F}(M)$, în loc de $\vec{F}(x, y, z)$) pentru a sublinia dependenţa câmpului de punctul M, mai degrabă decât de coordonatele x, y, z ale acestuia, în special în cazul în care câmpul respectiv corespunde unei realităţi fizice.

3.2.1 Câmpuri de componente

Fie un câmp vectorial $\vec{F} : D \to \mathbf{V_3}$,

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{\imath} + Q(x, y, z)\vec{\jmath} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Pentru determinarea acestui câmp vectorial este deci necesară determinarea a trei câmpuri scalare P, Q, R, numite **câmpuri de componente**.

3.2.2 Câmp vectorial de clasă C^k

Se spune că $\vec{F}$ este **câmp vectorial de clasă** C^k, $k \geq 0$, în situaţia în care câmpurile scalare (funcţiile) componente P, Q, R au această proprietate.

4 Câmpuri scalare. Gradientul unui câmp scalar

4.1 Gradientul unui câmp scalar

Fie $u : D \to \mathbb{R}$ un câmp scalar de clasă C^1. Numim **gradient** al lui u câmpul vectorial definit prin

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

> **Exemplu.** Determinaţi $\operatorname{grad} u$, unde $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este câmpul scalar definit prin
>
> $$u(x, y, z) = x^2 + yz.$$

Soluţie. Se obţine că

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + yz)\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + yz)\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + yz)\vec{k} = 2x\vec{\imath} + z\vec{\jmath} + y\vec{k}.$$

5 Câmpuri vectoriale. Divergenţa şi rotorul unui câmp vectorial

În cele ce urmează, vom încerca să caracterizăm atât „intensitatea", cât şi rotaţia unui câmp vectorial $\vec{F}$. Ambele concepte vor fi mai uşor de urmărit dacă ne imaginăm câmpul vectorial respectiv ca descriind mişcarea unui fluid. Pentru a studia fenomenele de „emisie" şi „absorbţie" pe de o parte, respectiv rotaţie pe de altă parte, vom introduce în cele ce urmează doi operatori diferenţiali, numiţi **divergenţă** şi **rotor**.

5.1 Divergenţa unui câmp vectorial

Fie $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$ un câmp vectorial de clasă C^1,

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

Numim **divergenţă** a câmpului vectorial $\vec{F}$ câmpul scalar definit prin

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Intuitiv, divergenţa pozitivă este asociată unor fenomene de „emisie", iar divergenţa negativă unora de „absorbţie".

Să observăm că putem defini similar şi divergenţa unui câmp vectorial $\vec{G} : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbf{V_2}$. Astfel, dacă $\vec{G} : E \to \mathbf{V_2}$ este un câmp vectorial de clasă C^1,

$$\vec{G}(x,y) = P(x,y)\vec{\imath} + Q(x,y)\vec{\jmath},$$

vom numi divergenţă a câmpului vectorial $\vec{G}$ câmpul scalar definit prin

$$\operatorname{div} \vec{G} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

5.1.1 Câmpuri vectoriale solenoidale

Fie $\vec{F} : D \to \mathbf{V_3}$ un câmp vectorial de clasă C^1. Spunem că $\vec{F}$ este **solenoidal** în D dacă $\operatorname{div} \vec{F}$ este identic nul în D.

Conform cu observaţiile anterioare, un câmp solenoidal este un câmp **fără surse** (pozitive sau negative, adică atât fără „emisie" cât şi fără „absorbţie").

Exemplu. Determinaţi $\operatorname{div} \vec{F}$, unde $\vec{F} : D \to \mathbf{V_3}$ este câmpul vectorial definit prin

$$F(x,y,z) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

($\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ reprezintă vectorul de poziţie ataşat lui $M(x,y,z)$)

Soluţie. Se obţine că

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 + 1 + 1 = 3.$$

5.1.2 Notaţie alternativă

În loc de $\operatorname{rot} \vec{F}$ se mai foloseşte şi notaţia $\operatorname{curl} \vec{F}$ („to curl", din limba engleză, înseamnă „a se răsuci", „a se ondula").

5.1.3 Câmpuri vectoriale irotaţionale

Fie $\vec{F} : D \to \mathbf{V_3}$ un câmp vectorial de clasă C^1. Spunem că $\vec{F}$ este **irotaţional** în D dacă $\operatorname{rot} \vec{F}$ este identic nul în D.

Exemplu. Fie câmpul vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$,

$$\vec{F}(x,y,z) = (y+z)\vec{\imath} + (z+x)\vec{\jmath} + (x+y)\vec{k}.$$

Demonstraţi că $\vec{F}$ este atât irotaţional, cât şi solenoidal.

Soluţie. Se obţine că

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}(x+y) - \frac{\partial}{\partial z}(z+x) \right) \vec{\imath} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(y+z) - \frac{\partial}{\partial x}(x+y) \right) \vec{\jmath} \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(z+x) - \frac{\partial}{\partial y}(y+z) \right) \vec{k} \\
&= (1-1)\vec{\imath} + (1-1)\vec{\jmath} + (1-1)\vec{k} = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Are deci loc relaţia

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{0},$$

câmpul vectorial $\vec{F}$ fiind irotaţional. De asemenea

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(y+z) + \frac{\partial}{\partial y}(z+x) + \frac{\partial}{\partial z}(x+y) = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Are deci loc relaţia

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 0,$$

câmpul vectorial $\vec{F}$ fiind şi solenoidal.

Exemplu. Determinaţi rot $\vec{F}$, unde $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$ este câmpul vectorial definit prin

$$F(x,y,z) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

($\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ reprezintă vectorul de poziţie ataşat lui $M(x,y,z)$).

Soluţie. Se obţine că

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}(z) - \frac{\partial}{\partial z}(y) \right) \vec{\imath} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(x) - \frac{\partial}{\partial x}(z) \right) \vec{\jmath} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(y) - \frac{\partial}{\partial y}(x) \right) \vec{k} \\
&= 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k} = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Exemplu. Fiind dat un câmp scalar u, precizaţi dacă următoarele operaţii au ca rezultat scalari, vectori, sau nu sunt bine definite

1. $\operatorname{div}(\operatorname{rot} u)$, 2. $\operatorname{grad}(\operatorname{div} u)$, 3. $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$, 4. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u)$.

Soluţie. Operaţia 1 nu este bine definită, întrucât $\operatorname{rot} u$ nu este bine definit (rotorul se poate aplica unui câmp vectorial, nu unuia scalar).

Operaţia 2 nu este bine definită, întrucât $\operatorname{div} u$ nu este bine definit (divergenţa se poate aplica unui câmp vectorial, nu unuia scalar).

Operaţia 3 este bine definită, cu rezultat un scalar (divergenţa vectorului $\operatorname{grad} u$ este un scalar).

Operaţia 4 este bine definită, cu rezultat un vector (rotorul vectorului $\operatorname{grad} u$ este un vector).

Exemplu. Fiind dat un câmp vectorial $\vec{F}$, precizaţi dacă următoarele operaţii au ca rezultat scalari, vectori, sau nu sunt bine definite

1. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \vec{F})$, 2. $\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F})$, 3. $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F})$, 4. $\operatorname{rot}(\operatorname{div} \vec{F})$.

Soluţie. Operaţia 1 nu este bine definită, întrucât $\operatorname{grad} \vec{F}$ nu este bine definit (gradientul se poate aplica unui câmp scalar, nu unuia vectorial).

Operaţia 2 este bine definită, cu rezultat un vector (gradientul scalarului $\operatorname{div} \vec{F}$ este un vector).

Operaţia 3 este bine definită, cu rezultat un scalar (divergenţa vectorului $\operatorname{rot} \vec{F}$ este un scalar).

Operaţia 4 nu este bine definită, întrucât $\operatorname{rot}(\operatorname{div} \vec{F})$ nu este bine definit (rotorul se poate aplica unui câmp vectorial, în timp ce $\operatorname{div} \vec{F}$ este unul scalar.