1 *Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xy + xz + yz$. Calculaţi*

$$\frac{df}{d\vec{v}}(1,2,-1), \quad \vec{v} = \frac{2}{3}\vec{\imath} - \frac{1}{3}\vec{\jmath} + \frac{2}{3}\vec{k}.$$

Creşte f într-o vecinătate a lui $M(1,2,-1)$ după direcţia lui $\vec{v}$, sau scade după această direcţie?

Soluţie

Observăm că $\|\vec{v}\| = 1$. Are loc atunci egalitatea

$$\frac{df}{d\vec{v}}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)v_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)v_3,$$

unde

$$\vec{v} = \frac{2}{3}\vec{\imath} - \frac{1}{3}\vec{\jmath} + \frac{2}{3}\vec{k} = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k}.$$

Deoarece

$$\frac{\partial}{\partial x}(xy + xz + yz) = y + z, \quad \frac{\partial}{\partial y}(xy + xz + yz) = x + z, \quad \frac{\partial}{\partial z}(xy + xz + yz) = x + y,$$

urmează că

$$\frac{df}{d\vec{v}}(x,y,z) = (y+z)\frac{2}{3} - (x+z)\frac{1}{3} + (x+y)\frac{2}{3} = \frac{1}{3}(x + 4y + z),$$

de unde

$$\frac{df}{d\vec{v}}(1,2,-1) = \frac{8}{3}.$$

Deoarece $\frac{df}{d\vec{v}}(1,2,-1) > 0$, f creşte într-o vecinătate a lui $M(1,2,-1)$ după direcţia lui $\vec{v}$.

2 *Rezolvaţi ecuaţia diferenţială liniară neomogenă cu coeficienţi constanţi*

$$x'''(t) + x''(t) - 8x'(t) - 12x(t) = 32e^{2t}.$$

Soluţie

Ecuaţia dată este o ecuaţie neomogenă. Rezolvăm mai întâi ecuaţia omogenă

$$x'''(t) + x''(t) - 8x'(t) - 12x(t) = 0.$$

Ecuaţia caracteristică ataşată este $\lambda^3 + \lambda^2 - 8\lambda - 12 = 0$, cu rădăcinile reale $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$. Soluţia ecuaţiei omogene este atunci

$$x_O(t) = C_1e^{-2t} + C_2te^{-2t} + C_3e^{3t}.$$

Întrucât membrul drept este o exponenţială, căutăm soluţia particulară a ecuaţiei neomogene $x_P(t)$ de forma

$$x_P(t) = Ct^l e^{2t},$$

unde l este ordinul de multiplicitate al lui 2 ca rădăcină a ecuaţiei caracteristice. Cum 2 nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, urmează că $l = 0$, iar $x_P(t) = Ce^{2t}$.

Pentru a determina C, înlocuim $x_P(t)$ în ecuaţia iniţială, obţinând că

$$\begin{aligned}
&(Ce^{2t})''' + (Ce^{2t})'' - 8(Ce^{2t})' - 12Ce^{2t} = 32e^{2t} \\
&\quad \Longrightarrow\ 8Ce^{2t} + 4Ce^{2t} - 16Ce^{2t} - 12Ce^{2t} = 16e^{2t} \ \Longrightarrow\ -16Ce^{2t} = 32e^{2t} \ \Longrightarrow\ C = -2.
\end{aligned}$$

Atunci

$$x(t) = x_N(t) = x_O(t) + x_P(t) = C_1e^{-2t} + C_2te^{-2t} + C_3e^{3t} - 2e^{2t}.$$

3 *Rezolvaţi ecuaţia diferenţială liniară neomogenă cu coeficienţi constanţi*

$$x'''(t) - 4x''(t) + x'(t) + 6x(t) = t^2 + 1.$$

Soluţie

Ecuaţia dată este o ecuaţie neomogenă. Rezolvăm mai întâi ecuaţia omogenă

$$x'''(t) - 4x''(t) + x'(t) + 6x(t) = 0.$$

Ecuaţia caracteristică ataşată este $\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = 0$, cu rădăcinile reale $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Soluţia ecuaţiei omogene este atunci

$$x_O(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} + C_3e^{3t}.$$

Întrucât membrul drept este un polinom, căutăm soluţia particulară a ecuaţiei neomogene $x_P(t)$ de forma

$$x_P(t) = t^l Q(t),$$

unde l este ordinul de multiplicitate al lui 0 ca rădăcină a ecuaţiei caracteristice, iar Q este un polinom de grad 2, la fel ca şi $t^2 + 1$. Cum 0 nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, urmează că $l = 0$, iar $x_P(t) = At^2 + Bt + C$.

Pentru a determina A, B, C, înlocuim $x_P(t)$ în ecuaţia iniţială, obţinând că

$$\begin{aligned}
&(At^2 + Bt + C)''' - 4(At^2 + Bt + C)'' + (At^2 + Bt + C)' + 6(At^2 + Bt + C) = t^2 + 1 \\
&\quad \Longrightarrow\ 0 - 4 \cdot 2A + (2At + B) + 6(At^2 + Bt + C) = t^2 + 1 \\
&\quad \Longrightarrow\ 6At^2 + t(2A + 6B) + 6C - 8A = t^2 + 1 \ \Longrightarrow\ A = \frac{1}{6}, \quad B = -\frac{1}{18}, \quad C = \frac{7}{18}.
\end{aligned}$$

Atunci

$$x(t) = x_N(t) = x_O(t) + x_P(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} + C_3e^{3t} + \frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{18}t + \frac{7}{18}.$$

4 *Rezolvaţi ecuaţia diferenţială neomogenă*

$$x''(t) - 5x'(t) + 4x(t) = 2e^{3t}$$

cu datele iniţiale

$$\begin{cases} x(0) = 2 \\ x'(0) = 3 \end{cases}.$$

Soluţie

Ecuaţia dată este o ecuaţie neomogenă. Rezolvăm mai întâi ecuaţia omogenă

$$x''(t) - 5x'(t) + 4x(t) = 0.$$

Ecuaţia caracteristică ataşată este $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$, cu rădăcinile reale distincte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$. Soluţia ecuaţiei omogene este atunci

$$x_O(t) = C_1 e^t + C_2 e^{4t}.$$

Întrucât membrul drept este o exponenţială, căutăm soluţia particulară a ecuaţiei neomogene $x_P(t)$ de forma

$$x_P(t) = Ct^l e^{3t},$$

unde l este ordinul de multiplicitate al lui 3 ca rădăcină a ecuaţiei caracteristice. Cum 3 nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, urmează că $l = 0$, iar $x_P(t) = Ce^{3t}$.

Pentru a determina C, înlocuim $x_P(t)$ în ecuaţia iniţială, obţinând că

$$\begin{aligned} &(Ce^{3t})'' - 5(Ce^{3t})' + 4Ce^{3t} = 6e^{3t} \implies 9Ce^{3t} - 5 \cdot 3e^{3t} + 4Ce^{3t} = 2e^{3t} \\ &\quad \implies -2Ce^{3t} = 2e^{3t} \implies C = -1. \end{aligned}$$

Atunci

$$x(t) = x_N(t) = x_O(t) + x_P(t) = C_1 e^t + C_2 e^{4t} - e^{3t}.$$

Întrucât există condiţii iniţiale, putem determina C_1 şi C_2. Pentru $t = 0$ obţinem că $x(0) = C_1 + C_2 - 1$. Observăm de asemenea că $x'(t) = C_1 e^t + 4C_2 e^{4t} - 3e^{3t}$, de unde pentru $t = 0$ obţinem că $x'(0) = C_1 + 4C_2 - 3$. Din condiţiile iniţiale obţinem sistemul $\begin{cases} C_1 + C_2 - 1 = 2 \\ C_1 + 4C_2 - 3 = 3 \end{cases}$, cu soluţiile $C_1 = 2$, $C_2 = 1$. Atunci soluţia ecuaţiei date este

$$x(t) = 2e^t + e^{4t} - e^{3t}.$$

5 *Rezolvaţi sistemul de ecuaţii diferenţiale* $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases}$.

Soluţie
Deoarece $y(t) = x'(t) - 2x(t)$, înlocuind în cea de-a doua ecuaţie obţinem că

$$(x'(t) - 2x(t))' = x(t) + 2(x'(t) - 2x(t)) \implies x''(t) - 2x'(t) = x(t) + 2x'(t) - 4x(t)$$
$$\implies x''(t) - 4x'(t) + 3x(t) = 0.$$

Ecuaţia caracteristică asociată este $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, cu rădăcinile $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Atunci

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{3t}.$$

Cum $y(t) = x'(t) - 2x(t)$, urmează că

$$y(t) = (C_1 e^t + C_2 e^{3t})' - 2(C_1 e^t + C_2 e^{3t}) = C_1 e^t + 3C_2 e^{3t} - 2C_1 e^t - 2C_2 e^{3t}$$
$$= -C_1 e^t + C_2 e^{3t}.$$

6 *Precizaţi mulţimea de convergenţă a seriei de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+1} x^n$. *Este seria numerică* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+1} \left(\frac{7}{4}\right)^n$ *convergentă, sau divergentă?*

Soluţie
Determinăm mai întâi raza de convergenţă a seriei de puteri. Fie

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2+1}\right|}{\left|\frac{2n+1}{n^2+1}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n^2+2n+2} \cdot \frac{n^2+1}{2n+1}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+3n^2+2n+3}{2n^3+5n^2+6n+2} = 1,$$

de unde

$$R = \frac{1}{\rho} = 1.$$

Urmează că raza de convergenţă a seriei este $R = 1$ iar intervalul de convergenţă este $(-R, R) = (-1, 1)$.

Pentru a determina întreaga mulţime de convergenţă, este necesar să studiem separat capetele acestui interval.

Pentru $x = 1$, seria iniţială devine $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+1}$, care este divergentă, întrucât are aceeaşi natură cu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n}$, care este divergentă.

Pentru $x = -1$, seria iniţială devine $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+1}(-1)^n$, care este convergentă, conform criteriului lui Leibniz.

De aici, mulţimea de convergenţă a seriei este $M = [-1,1)$. Întrucât $\frac{7}{4} \notin M$, urmează că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+1}\left(\frac{7}{4}\right)^n$ este divergentă.

7 *Precizaţi punctele de extrem ale funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ şi natura acestora.*

Soluţie

Determinăm mai întâi punctele critice ale lui f egalând derivatele parţiale ale lui f cu 0.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(x^3+y^3-3xy) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}(x^3+y^3-3xy) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x^2-3y=0 \\ 3y^2-3x=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2. \end{cases}$$

De aici,

$$x = (x^2)^2 \implies x = x^4 \implies x \in \{0,1\},$$

iar punctele critice sunt $O(0,0)$ şi $A(1,1)$.

Verificăm dacă acestea sunt (sau nu) puncte de extrem. În acest scop, determinăm natura diferenţialei de ordinul al doilea, privită ca formă pătratică, în aceste puncte. Avem că

$$d^2f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)(dy)^2,$$

iar

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2-3y) = 6x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial x}(3y^2-3x) = -3 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y}(3y^2-3x) = 6y, \end{aligned}$$

de unde

$$d^2f(x,y) = 6x(dx)^2 - 6dxdy + 6y(dy)^2.$$

Urmează că

$$d^2f(0,0) = -6dxdy, \quad d^2f(1,1) = 6(dx)^2 - 6dxdy + 6(dy)^2.$$

Să notăm $dx = u$, $dy = v$. În aceste condiţii,

$$d^2f(0,0) = -6uv,$$

putând lua atât valori negative (de exemplu, pentru $u = v = 1$), cât şi valori pozitive (de exemplu, pentru $u = 1, v = -1$). Urmează că $d^2 f(0,0)$ este nedefinită, iar $O(0,0)$ nu este punct de extrem. De asemenea,

$$d^2 f(1,1) = 6u^2 - 6uv + 6v^2 = 6(u^2 - uv + v^2) = 6\left[(u - \frac{1}{2}v)^2 + \frac{3}{4}v^2\right],$$

deci $d^2 f(1,1)$ este pozitiv definită, iar $A(1,1)$ este punct de minim local.

8 *Determinaţi*

$$\int \ln x dx, x \in (0, \infty).$$

Soluţie

Întrucât $\ln x$ este o funcţie inversă, mai greu de scris direct ca o derivată, încercăm să scriem *cealaltă* funcţie de sub integrală (adică funcţia constantă 1) ca o derivată. Cum 1 se poate scrie ca o derivată sub forma $1 = x'$, urmează că

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= \int x' \ln x dx = x \ln x - \int x (\ln x)' dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + \mathcal{C} = x(\ln x - 1) + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

9 *Determinaţi*

$$I_1 = \int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx.$$

Soluţie

Cum $\cos x$ se scrie ca o derivată sub forma $\cos x = (\sin x)'$, urmează că

$$\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \int \frac{(\sin x)'}{1 + \sin^2 x} dx,$$

observându-se că $\sin x$ se repetă sub integrală. Notăm $u = \sin x$. Atunci

$$du = (\sin x)' dx = \cos x dx.$$

Asociem integralei iniţiale integrala

$$J_1 = \int \frac{1}{1 + u^2} du,$$

obţinută prin înlocuirea lui u şi du. Cum $J_1 = \operatorname{arctg} u + \mathcal{C}$, revenind la variabila iniţială prin înlocuire urmează că

$$I_1 = \operatorname{arctg}(\sin x) + \mathcal{C}.$$

10 *Determinaţi*
$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx.$$

Soluţie

Are loc egalitatea
$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx = \int_0^1 \operatorname{arctg} x \cdot \frac{1}{1+x^2}dx.$$
Notând $u = \operatorname{arctg} x$, obţinem că
$$du = (\operatorname{arctg} x)'dx = \frac{1}{1+x^2}dx.$$
Calculăm noile limite de integrare, înlocuindu-le pe cele vechi în schimbarea de variabilă. Astfel,
$$\begin{aligned} x = 0 &\implies u = \operatorname{arctg} 0 = 0 \\ x = 1 &\implies u = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$
Înlocuind du şi u (în această ordine), urmează că
$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} u du = \frac{u^2}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}0^2 = \frac{\pi^2}{32}.$$

11 *Studiaţi convergenţa integralei* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}dx.$

Soluţie

Deoarece integrandul are comportarea aproximativă a lui $\frac{1}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{x^2}$ pentru $x \to \infty$, alegem $p = 2$. Atunci
$$\lim_{x\to\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} = \lim_{x\to\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{x^4\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}} = 1 \in (0,\infty).$$
Cum $p = 2 > 1$, urmează că $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}dx$ este convergentă.

12 *Studiaţi convergenţa integralei* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3+2x+3}dx.$

Soluţie

Deoarece integrandul are comportarea aproximativă a lui $\frac{\sqrt{x}}{x^3} = \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$ pentru $x \to \infty$, alegem $p = \frac{5}{2}$. Atunci
$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{5}{2}} \frac{\sqrt{x}}{x^3+2x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3+2x+3} = 1 \in (0,\infty).$$
Deoarece $p = \frac{5}{2} > 1$, urmează că integrala $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3+2x+3}dx$ este convergentă.

13 *Studiaţi convergenţa integralei* $\int_0^1 \frac{1}{5x^2 - x^3} dx$.

Soluţie

Deoarece

$$\int_0^1 \frac{1}{5x^2 - x^3} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2(5-x)} dx,$$

urmează că $x = 0$ este punct singular pentru integrand (cealaltă rădăcină a numitorului, $x = 5$, nu aparţine intervalului de integrare). Deoarece termenul care anulează numitorul în punctul singular, x^2, are puterea 2, alegem $p = 2$. Atunci

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (x - 0)^2 \frac{1}{x^2(5-x)} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{5 - x} = \frac{1}{5} \in (0, \infty).$$

Cum $p = 2 > 1$, urmează că integrala $\int_0^1 \frac{1}{5x^2 - x^3} dx$ este divergentă, cu valoarea $+\infty$.

14 *Fie câmpul scalar*

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad F(x, y, z) = x^4 - 3x^2yz + 2xy.$$

Determinaţi grad $F(x, y, z)$ *şi grad* $F(2, 1, -1)$.

Soluţie

Au loc egalităţile

$$\begin{aligned}
\text{grad } F(x,y,z) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)\vec{\imath} + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)\vec{\jmath} + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)\vec{k} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(x^4 - 3x^2yz + 2xy)\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}(x^4 - 3x^2yz + 2xy)\vec{\jmath} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}(x^4 - 3x^2yz + 2xy)\vec{k} \\
&= (4x^3 - 6xyz + 2y)\vec{\imath} + (-3x^2z + 2x)\vec{\jmath} - 3x^2y\vec{k}.
\end{aligned}$$

De aici,

$$\text{grad } F(2, 1, -1) = 46\vec{\imath} + 16\vec{\jmath} - 12\vec{k}.$$

15 *Fie câmpul vectorial* $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to V_3$,

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + 2yz)\vec{\imath} + (y^2 + 2zx)\vec{\jmath} + (z^2 + 2xy)\vec{k}.$$

Determinaţi div $\vec{F}(x, y, z)$, *rot* $\vec{F}(x, y, z)$, *div* $\vec{F}(1, 0, -1)$, *rot* $\vec{F}(1, 0, -1)$.

Soluţie

Au loc egalităţile

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2+2yz)+\frac{\partial}{\partial y}(y^2+2zx)+\frac{\partial}{\partial z}(z^2+2xy) = 2x+2y+2z \\ &= 2(x+y+z).\end{aligned}$$

Rezultă de aici că $\operatorname{div}\vec{F}(1,0,-1)=0$. De asemenea,

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z) &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2+2yz & y^2+2zx & z^2+2xy \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(z^2+2xy)\vec{\imath}+\frac{\partial}{\partial z}(x^2+2yz)\vec{\jmath}+\frac{\partial}{\partial x}(y^2+2zx)\vec{k} \\ &\quad -\frac{\partial}{\partial y}(x^2+2yz)\vec{k}-\frac{\partial}{\partial z}(y^2+2zx)\vec{\imath}-\frac{\partial}{\partial x}(z^2+2xy)\vec{\jmath} \\ &= 2x\vec{\imath}+2y\vec{\jmath}+2z\vec{k}-2z\vec{k}-2x\vec{\imath}-2y\vec{\jmath}=\vec{0}.\end{aligned}$$

16 *Fie câmpul vectorial* $\vec{F}:\mathbb{R}^3\to V_3$,

$$\vec{F}(x,y,z)=(yz+4z)\vec{\imath}+(xz+4y)\vec{\jmath}+(xy+4x)\vec{k}.$$

Calculaţi $\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z)$ *şi arătaţi că* $\vec{F}$ *este irotaţional.*

Soluţie

Au loc egalităţile

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z) &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz+4z & xz+4y & xy+4x \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(xy+4x)\vec{\imath}+\frac{\partial}{\partial z}(yz+4z)\vec{\jmath}+\frac{\partial}{\partial x}(xz+4y)\vec{k} \\ &\quad -\frac{\partial}{\partial y}(yz+4z)\vec{k}-\frac{\partial}{\partial z}(xz+4y)\vec{\imath}-\frac{\partial}{\partial x}(xy+4x)\vec{\jmath} \\ &= x\vec{\imath}+(y+4)\vec{\jmath}+z\vec{k}-z\vec{k}-x\vec{\imath}-(y+4)\vec{\jmath}=\vec{0}.\end{aligned}$$

Rezultă de aici că $\vec{F}$ este un câmp vectorial irotaţional.

17 *Fie câmpul vectorial* $\vec{F}:\mathbb{R}^3\to V_3$,

$$\vec{F}(x,y,z)=(xy-2z^2)\vec{\imath}+(4xz-y^2)\vec{\jmath}+(yz-2x^2)\vec{k}.$$

Calculaţi $\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z)$ *şi arătaţi că* $\vec{F}$ *este solenoidal.*

Soluţie

Au loc egalităţile

$$\operatorname{div} \vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(xy - 2z^2) + \frac{\partial}{\partial y}(4xz - y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(yz - 2x^2) = y - 2y + y = 0.$$

Rezultă de aici că $\vec{F}$ este un câmp vectorial solenoidal.

18 *Determinaţi lungimea curbei*

$$\Gamma : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases},\ t \in [0, 2\pi],\ a, b > 0.$$

Soluţie

Lungimea curbei Γ este dată de formula

$$l(\Gamma) = \int_\Gamma 1 ds.$$

Calculăm acum elementul de lungime ds al curbei. Deoarece

$$dx = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}dt = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2}dt = \sqrt{a^2 + b^2}dt,$$

urmează că

$$l(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}dt = \sqrt{a^2 + b^2}\int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$

19 *Demonstraţi că valoarea integralei*

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} (x^2 - yz)dx + (y^3 - zx)dy + (z^4 - xy)dz$$

nu depinde de arcul care uneşte $A(1,2,3)$ şi $B(4,5,1)$ şi calculaţi această valoare.

Soluţie

Demonstrăm mai întâi independenţa de drum. Observăm că

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - yz & y^3 - zx & z^4 - xy \end{vmatrix} &= \frac{\partial}{\partial y}(z^4 - xy)\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial z}(x^2 - yz)\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial x}(y^3 - zx)\vec{k} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - yz)\vec{k} - \frac{\partial}{\partial z}(y^3 - zx)\vec{\imath} - \frac{\partial}{\partial x}(z^4 - xy)\vec{\jmath} \\ &= -x\vec{\imath} - y\vec{\jmath} - z\vec{k} + z\vec{k} + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = \vec{0},\end{aligned}$$

valoarea integralei respective fiind independentă de drum. Pentru a calcula această valoare, alegem un drum format dintr-o succesiune de segmente paralele cu axele de coordonate, anume

$$A(1,2,3) \xrightarrow[\substack{x=t\\ t\in[1,4]\\ y=2\\ z=3\\ dx=dt\\ dy=0\\ dz=0}]{} A_1(4,2,3) \xrightarrow[\substack{x=4\\ y=t\\ t\in[2,5]\\ z=3\\ dx=0\\ dy=dt\\ dz=0}]{} A_2(4,5,3) \xrightarrow[\substack{x=4\\ y=5\\ z=t\\ t\in[3,1]\\ dx=0\\ dy=0\\ dz=dt}]{} B(4,5,1).$$

Urmează că

$$\begin{aligned}
&\int_{\widehat{AB}} (x^2-yz)dx + (y^3-zx)dy + (z^4-xy)dz\\
&\quad = \int_{\overline{AA_1}} (x^2-yz)dx + (y^3-zx)dy + (z^4-xy)dz\\
&\qquad + \int_{\overline{A_1A_2}} (x^2-yz)dx + (y^3-zx)dy + (z^4-xy)dz\\
&\qquad + \int_{\overline{A_2B}} (x^2-yz)dx + (y^3-zx)dy + (z^4-xy)dz\\
&\quad = \int_1^4 (t^2-6)dt + \int_2^5 (t^3-12)dt + \int_3^1 (t^4-20)dt\\
&\quad = \frac{2217}{20}.
\end{aligned}$$

20 *Calculaţi* $\int_{\widehat{AB}} xdy + ydx$*, de-a lungul parabolei* $(P): y = x^2$*, între* $A(1,1)$ *şi* $B(2,4)$*.*

Soluţie

Curba este dată sub formă explicită. Pentru $x = t$, obţinem forma parametrică

$$\widehat{AB}: \quad \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}, \ t \in [1,2] \implies dx = dt, \ dy = 2tdt.$$

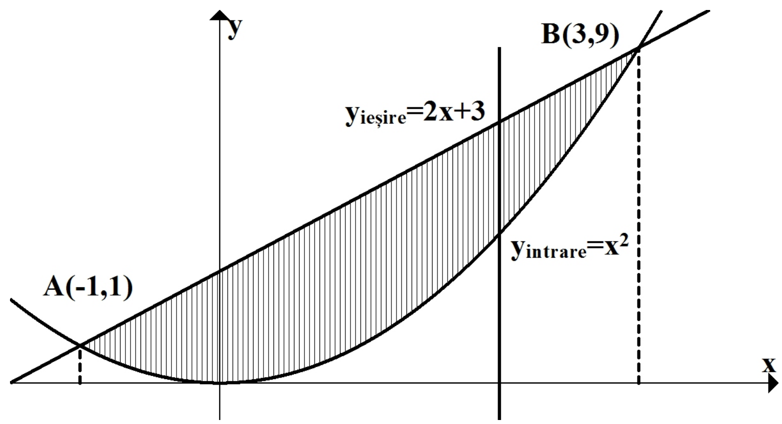
Atunci

$$\int_{\widehat{AB}} xdy + ydx = \int_1^2 (t\cdot 2t + t^2)dt = \int_1^2 3t^2 dt = t^3 \Big|_1^2 = 7.$$

21 *Determinaţi*

$$\iint_D xydxdy,$$

unde D *este domeniul limitat de parabola* $(P): y = x^2$ *şi dreapta* $(D): y = 2x+3$*.*



Soluţie

Domeniul de integrare D este cel haşurat în figură, observându-se că el este simplu în raport cu Oy. Pentru calculul integralei, aplicăm metoda de proiecţie şi secţiune. În acest scop, determinăm mai întâi punctele de intersecţie (de fapt, sunt necesare doar abscisele acestora).

Determinarea punctelor de intersecţie se face rezolvând un sistem constituit din ecuaţiile parabolei şi dreptei.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x+3 \end{cases} \implies x^2 = 2x+3 \implies x^2-2x-3=0 \implies x_1=-1, x_2=3.$$

Urmează că domeniul de proiecţie (pe Ox) este $[-1,3]$.

Pentru a determina domeniul de secţiune, ducem o paralelă la axa Oy printr-un punct oarecare x din domeniul de secţiune. Observăm că punctul de "intrare" în D al paralelei este situat pe parabola $y = x^2$, în timp ce punctul de "ieşire" este situat pe dreapta $y = 2x+3$. Urmează că

$$\iint_D xydxdy = \int_{-1}^{3} \left(\int_{x^2}^{2x+3} xydy \right) dx.$$

Calculăm mai întâi integrala interioară, anume

$$I_1 = \int_{x^2}^{2x+3} xydy.$$

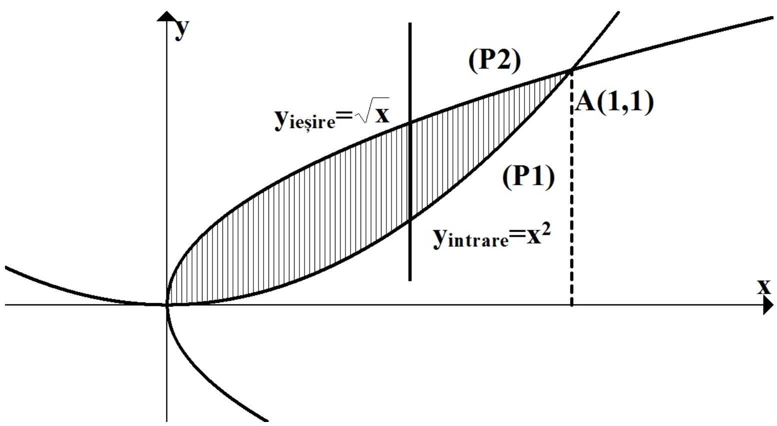
Deoarece variabila de integrare este y, urmează că

$$I_1 = x\int_{x^2}^{2x+3} ydy = x \cdot \frac{y^2}{2}\Bigg|_{x^2}^{2x+3} = \frac{x}{2}\left(4x^2+6x+9-x^4\right) = 2x^3+3x^2+\frac{9}{2}x-\frac{1}{2}x^5.$$

De aici

$$I = \int_{-1}^{3} \left(2x^3 + 3x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{x^5}{2}\right) dx = \left(2\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} + \frac{9}{2}\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_{-1}^{3}$$
$$= \left(\frac{1}{2}x^4 + x^3 + \frac{9}{4}x^2 - \frac{1}{12}x^6\right)\Bigg|_{-1}^{3} = \frac{76}{3}.$$

22 *Determinaţi* $\iint_D (x^2 + y)dxdy$*, unde* D *este domeniul limitat de parabolele* $(P1) : y = x^2$ *şi* $(P2) : y^2 = x$.



Soluţie

Domeniul de integrare este cel haşurat în figură. Vom folosi metoda de proiecţie şi secţiune. În acest scop, trebuie să determinăm mai întâi punctele de intersecţie. Observăm că

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = x \end{cases} \implies (x^2)^2 = x \implies x^4 = x \implies x(x^3 - 1) = 0 \implies x \in \{0, 1\}.$$

Punctele de intersecţie sunt atunci $O(0, 0)$ şi $A(1, 1)$. Urmează că domeniul de proiecţie (pe Ox) este $[0, 1]$.

Pentru a determina domeniul de secţiune, ducem o paralelă la axa Oy printr-un punct oarecare x din domeniul de secţiune. Observăm că punctul de "intrare" în D al paralelei este situat pe parabola $(P1) : y = x^2$, în timp ce punctul de "ieşire" este situat pe parabola $(P2) : y^2 = x$ (deci $y = \sqrt{x}$, ţinând seama de faptul că acel y este pozitiv). Urmează că

$$\iint_D (x^2 + y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y)dy\right) dx.$$

Calculăm mai întâi integrala interioară, anume

$$I_1 = \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+y)dy = \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2 dy + \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y dy = x^2 y \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} + \frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}$$
$$= x^2\sqrt{x} - x^4 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^4 = x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x^4.$$

Atunci

$$\iint_D (x^2+y)dxdy = \int_0^1 \left(x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x^4\right) dx = \left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{33}{140}.$$

23 *Determinaţi aria domeniului*

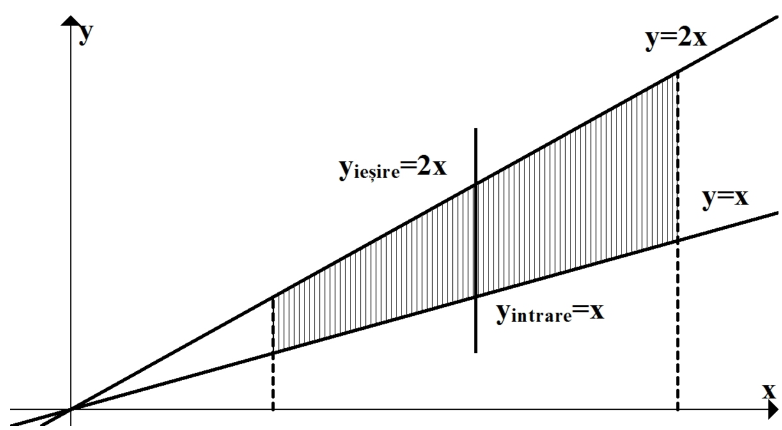
$$D = \{(x,y); x \le y \le 2x,\ 1 \le x \le 3\}.$$

Soluţie

Avem că

$$\text{aria } (D) = \iint_D 1dxdy,$$

domeniul D fiind cel haşurat în figură. Vom folosi metoda de proiecţie şi secţiune. În



acest scop, să observăm că domeniul de proiecţie (pe Ox) este $[1,3]$, conform enunţului problemei.

Pentru a determina domeniul de secţiune, ducem o paralelă la axa Oy printr-un punct oarecare x din domeniul de secţiune. Observăm că punctul de "intrare" în D al paralelei este situat pe dreapta $(D1) : y = x$, în timp ce punctul de "ieşire" este situat pe dreapta $(D2) : y = 2x$. Urmează că

$$\iint_D 1dxdy = \int_1^3 \left(\int_x^{2x} 1dy\right) dx.$$

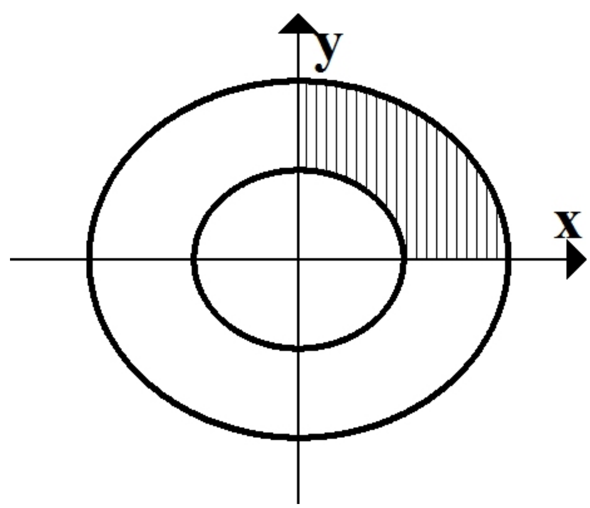
Calculăm mai întâi integrala interioară, anume

$$I_1 = \int_x^{2x} 1dy = y\Big|_x^{2x} = 2x - x = x.$$

Atunci

$$\iint_D 1dxdy = \int_1^3 xdx = \frac{1}{2}x^2\Big|_1^3 = 4.$$

24 *Determinaţi* $\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$, *unde* $D = \{(x,y); 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x, y \geq 0\}$.



Soluţie

Domeniul de integrare este cel haşurat în figură. Cercul interior, de ecuaţie $x^2 + y^2 = 1$, are centrul în $O(0,0)$ şi rază 1, iar cercul exterior, de ecuaţie $x^2 + y^2 = 4$, are centrul în $O(0,0)$ şi rază 2. Vom folosi coordonate polare.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \quad \rho \in [1,2], \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad dxdy = \rho d\rho d\theta.$$

Atunci

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \iint_{[1,2]\times[0,\frac{\pi}{2}]} e^{-(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta)}\rho d\rho d\theta = \iint_{[1,2]\times[0,\frac{\pi}{2}]} e^{-\rho^2}\rho d\rho d\theta$$
$$= \left(\int_1^2 \rho e^{-\rho^2}d\rho\right)\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1d\theta\right) = I_1 \cdot I_2.$$

Observăm că

$$I_1 = \int_1^2 \rho e^{-\rho^2}d\rho = \frac{1}{2}\int_1^2 2\rho e^{-\rho^2}d\rho = \frac{1}{2}\int_1^2 (\rho^2)' e^{-\rho^2}d\rho.$$

Cu schimbarea de variabilă $u = \rho^2$ şi notând că

$$\rho = 1 \implies u = 1, \quad \rho = 2 \implies u = 4,$$

obţinem

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_1^4 e^{-u}du = \frac{1}{2}\frac{e^{-u}}{-1}\Big|_1^4 = \frac{1}{2}\left(e^{-1} - e^{-4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^4}\right).$$

De asemenea

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1d\theta = \frac{\pi}{2},$$

iar

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy = I_1 \cdot I_2 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^4}\right).$$

25 *Cu ajutorul formulei Riemann-Green, calculaţi* $\int_\Gamma (y^2 - y)dx + (2xy + x)dy$, *unde* Γ *este cercul cu centrul în origine şi de rază* 2, *parcurs în sens pozitiv.*

Soluţie

Observăm că sunt îndeplinite ipotezele formulei Riemann-Green. Urmează că

$$\int_\Gamma (y^2 - y)dx + (2xy + x)dy = \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} \\ y^2 - y & 2xy + x \end{vmatrix} dxdy,$$

unde D este discul determinat de Γ. Atunci

$$\begin{aligned} \int_\Gamma (y^2 - y)dx + (2xy + x)dy &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(2xy + x) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2 - y)\right) dxdy \\ &= \iint_D \left((2y+1) - (2y-1)\right) dxdy = \iint_D 2dxdy \\ &= 2\iint_D dxdy = 2\text{aria}(D) = 2 \cdot \pi 2^2 = 8\pi. \end{aligned}$$

26 *Determinaţi* $\iiint_V zdxdydz$, *unde* $V = \left\{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$.

Soluţie

Domeniul de integrare este definit utilizând inegalităţi. Cazul de egalitate

$$S = \left\{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$

reprezintă o sferă cu centrul în originea $O(0,0,0)$ şi cu rază 1. Domeniul de integrare V este atunci bila sferică determinată de S (interiorul sferei S, la care se adaugă S). Vom folosi coordonate sferice

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}, \quad dxdydz = \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta,$$

cu

$$\rho \in [0,1], \quad \varphi \in [0,\pi], \quad \theta \in [0,2\pi).$$

Urmează că

$$\begin{aligned} \iiint_V z dxdydz &= \iiint_{[0,1]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} \rho\cos\varphi \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \iiint_{[0,1]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} \rho^3 \sin\varphi\cos\varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \left(\int_0^1 \rho^3 d\rho\right)\cdot\left(\int_0^\pi \sin\varphi\cos\varphi d\varphi\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} 1 d\theta\right) \\ &= I_1 \cdot I_2 \cdot I_3. \end{aligned}$$

Deoarece

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\pi \sin\varphi\cos\varphi d\varphi = \int_0^\pi \frac{1}{2}\sin 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\cdot \frac{-\cos 2\varphi}{2}\Bigg|_0^\pi \\ &= \frac{1}{4}(\cos 2\pi - \cos 0) = 0, \end{aligned}$$

urmează că $\iiint_V z dxdydz = 0$.

27 *Determinaţi* $\iiint_V (x+y) dxdydz$, *unde*

$$V = \left\{(x,y,z); 1 \le x^2+y^2 \le 9,\ x,y \le 0,\ 0 \le z \le 1\right\}.$$

Soluţie

Domeniul este definit cu ajutorul unor inegalităţi. Întrucât cazurile de egalitate,

$$(\mathrm{C1}): \left\{(x,y,z); 1 = x^2+y^2\right\}, \quad (\mathrm{C2}): \left\{(x,y,z); x^2+y^2 = 9\right\},$$

reprezintă cilindri de rotaţie cu generatoarea paralelă cu axa Oz, pentru calculul integralei vom folosi coordonate cilindrice,

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}, \quad dxdydz = \rho d\rho d\theta dz,$$

cu

$$\rho \in [1,3], \quad \theta \in [\pi, \frac{3\pi}{2}], \quad z \in [0,1].$$

Urmează că

$$\begin{aligned}
\iiint_V (x+y)dxdydz &= \iiint_{[1,3]\times[\pi,\frac{3\pi}{2}]\times[0,1]} (\rho\cos\theta + \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta dz \\
&= \iiint_{[1,3]\times[\pi,\frac{3\pi}{2}]\times[0,1]} \rho^2(\cos\theta + \sin\theta) d\rho d\theta dz \\
&= \left(\int_1^3 \rho^2 d\rho\right) \cdot \left(\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} (\cos\theta + \sin\theta) d\theta\right) \cdot \left(\int_0^1 dz\right) \\
&= \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^1 \cdot (\sin\theta - \cos\theta)\Big|_\pi^{\frac{3\pi}{2}} \cdot z\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$