PLANE ÎN SPAŢIU. BREVIAR TEORETIC

Fie (P) un plan dat. Doi vectori nenuli necoliniari $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ se numesc vectori directori ai planului (P) dacă dreptele suport a doi reprezentanţi ai acestora sunt paralele cu (P). Un vector nenul $\vec{n}$ se numeşte vector normal la planul (P) dacă dreapta suport a unui reprezentant al său este perpendiculară pe planul (P). Se numeşte fascicul de plane determinat de o dreaptă dată mulţimea tuturor planelor care conţin acea dreaptă.

Planul determinat de un punct dat şi de un vector normal dat

Ecuația vectorială a planului determinat de $M_0(\vec{r_0})$ şi vectorul normal $\vec{n}$ este

$$(P) : (\vec{r} - \vec{r_0}) \cdot \vec{n} = 0,$$

unde $\vec{r_0}$ este vectorul de poziţie al punctului M_0, iar $\vec{r}$ este vectorul de poziţie al unui punct curent din plan. Dacă $\vec{n} = A\vec{\imath} + B\vec{\jmath} + C\vec{k}$, $M_0 = M_0(x_0, y_0, z_0)$, ecuaţia vectorială se poate scrie sub forma

$$(P) : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Ecuaţii parametrice ale planului

O ecuaţie echivalentă cu ecuaţia vectorială este ecuația parametrică vectorială, sub forma

$$(P) : \vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{u} + s\vec{v},\ t, s \in \mathbb{R},$$

unde $\vec{u}, \vec{v}$ sunt vectori directori ai planului (P) (sau, echivalent, vectori nenuli necoliniari şi perpendiculari pe $\vec{n}$). Dacă $\vec{u} = u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath} + u_3\vec{k}$, $\vec{v} = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k}$, ecuaţia parametrică vectorială se poate proiecta pe coordonate sub forma ecuațiilor parametrice scalare

$$(P) : \begin{cases} x = x_0 + tu_1 + sv_1 \\ y = y_0 + tu_2 + sv_2 \\ z = z_0 + tu_3 + sv_3 \end{cases},\ t, s \in \mathbb{R}.$$

Ecuaţia carteziană generală a planului

$$(P) : Ax + By + Cz + D = 0, \qquad \text{unde } A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

$(A, B, C$ pot fi determinate cunoscând un vector normal).

Ecuaţia unui plan determinat de trei puncte necoliniare

Ecuaţia planului care trece prin punctele necoliniare $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ este

$$(P): \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ecuaţia planului prin tăieturi

In situaţia particulară în care $M_1(a, 0, 0)$, $M_2(0, b, 0)$, $M_3(0, 0, c)$ sunt intersecţiile planului cu axele, ecuaţia de mai sus se reduce la

$$(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Ecuaţia normală (hessiană) a planului

Din ecuaţia precedentă se poate deduce ecuaţia normală a unui plan (P) care nu trece prin origine. Dacă $\overrightarrow{OM}$ este un vector normal la plan, unde O este originea reperului iar $M \in (P)$, atunci ecuaţia respectivă este

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - d = 0,$$

unde α, β, γ sunt cosinusurile directoare ale vectorului $\overrightarrow{OM}$, iar $d = \|\overrightarrow{OM}\|$ (adică d este distanţa de la origine la plan). Dacă planul (P) trece prin origine, atunci ecuaţia sa normală este

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = 0,$$

unde α, β, γ sunt cosinusurile directoare ale unui vector normal al său.

Ecuaţia planului determinat de un punct şi doi vectori directori

Ecuaţia planului determinat de $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi vectorii directori $\vec{u} = u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath} + u_3\vec{k}$, $\vec{v} = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k}$ este

$$(P): \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Poziţii relative a două plane

Fie planele

$$(P_1) : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$(P_2) : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Atunci un vector normal la (P_1) este $\vec{n}_1 = A_1\vec{\imath} + B_1\vec{\jmath} + C_1\vec{k}$, în timp ce un vector normal la (P_2) este $\vec{n}_2 = A_2\vec{\imath} + B_2\vec{\jmath} + C_2\vec{k}$.

Paralelism sau coincidență

Dreptele (P_1), (P_2) sunt paralele sau coincid dacă şi numai dacă vectorii lor normali $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ sunt paraleli, adică

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Distincţia între paralelism şi coincidenţă se face cu ajutorul lui D_1 şi D_2. Dacă

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2},$$

planele (P_1), (P_2) coincid, iar dacă

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2},$$

planele (P_1), (P_2) sunt paralele. Dacă egalitatea

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

nu are loc, planele (P_1), (P_2) se intersectează după o dreaptă.

Perpendicularitate

Planele (P_1), (P_2) sunt perpendiculare dacă şi numai dacă $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ sunt perpendiculari, adică

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Unghiul a două plane

Fie planele

$$(P_1) : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$(P_2) : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Atunci unghiul α dintre plane este egal cu unghiul β format de către vectorii normali $\vec{n}_1 = A_1\vec{\imath} + B_1\vec{\jmath} + C_1\vec{k}$ şi $\vec{n}_2 = A_2\vec{\imath} + B_2\vec{\jmath} + C_2\vec{k}$, sau cu suplementul acestuia, în situaţia în care unghiul vectorilor este obtuz, iar valoarea lui β se determină cu ajutorul formulei

$$\cos\beta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\|\|\vec{n}_2\|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Distanţa de la un punct la un plan

Fie planul $(P) : Ax + By + Cz + D = 0$ şi punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Atunci

$$d(M_0, (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Fascicul de plane

Fie dreapta (d) dată ca intersecţie a planelor $(P_1) : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $(P_2) : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ sub forma

$$(d) : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Atunci ecuaţia unui plan oarecare al fasciculului determinat de (d) este

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \qquad \text{cu } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 \neq 0.$$

Ecuaţia

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + t(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \qquad \text{cu } t \in \mathbb{R},$$

reprezintă ecuaţia unui plan din fascicul distinct de (P_2), în timp ce ecuaţia

$$t(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \qquad \text{cu } t \in \mathbb{R},$$

reprezintă ecuaţia unui plan din fascicul distinct de (P_1).

Separarea spaţiului în regiuni

Planul $(P) : Ax + By + Cz + D = 0$ separă spaţiul în regiunile (semispaţiile) $(S_1) : Ax + By + Cy + Dz > 0$ şi $(S_2) : Ax + By + Cy + Dz < 0$. Stabilirea sensului potrivit unui semispaţiu dat se face prin testarea unui punct din semispaţiul în cauză.