PRODUSE A DOI ŞI TREI VECTORI. BREVIAR TEORETIC

Fie $\mathbf{V}_3$ mulţimea tuturor vectorilor liberi asociaţi segmentelor orientate din spaţiul euclidian tridimensional $\mathbf{E}_3$. Doi vectori nenuli $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{V}_3$ se numesc *paraleli* dacă au aceeaşi direcţie, respectiv *ortogonali* dacă direcţiile lor sunt perpendiculare. Prin definiţie, vectorul nul este coliniar cu oricare alt vector, respectiv ortogonal pe oricare alt vector. Prin $\mathrm{pr}_{\vec{u}}\vec{v}$ se notează proiecţia vectorului $\vec{v}$ pe direcţia vectorului $\vec{u}$, iar prin $\mathrm{pr}_{\alpha}\vec{v}$ se notează proiecţia vectorului $\vec{v}$ pe planul α.

Produsul scalar

Produsul scalar al vectorilor $\vec{u}$, $\vec{v}$, notat $\vec{u}\cdot\vec{v}$, este *scalarul* definit prin

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) & \text{dacă } \vec{u}\neq\vec{0}, \vec{v}\neq\vec{0} \\ 0 & \text{dacă } \vec{u}=\vec{0} \text{ sau } \vec{v}=\vec{0}. \end{cases} \tag{1}$$

Consecinţe

1. $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|, \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{V}_3$.
2. $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2, \forall \vec{u} \in \mathbf{V}_3$.

Exprimare alternativă

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\mathrm{pr}_{\vec{u}}\vec{v} = \|\vec{v}\|\mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{u}.$$

Utilizare

Produsul scalar a doi vectori $\vec{u}$, $\vec{v}$ este 0 dacă şi numai dacă vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$ sunt ortogonali.

Proprietăţi de calcul

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{V}_3$ (*comutativitate*).
2. $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(k\vec{v}) = k\vec{u}\cdot\vec{v}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{V}_3, \forall k \in \mathbb{R}$ (*omogenitate*).
3. $\vec{u}\cdot(\vec{v}_1+\vec{v}_2) = \vec{u}\cdot\vec{v}_1 + \vec{u}\cdot\vec{v}_2, \forall \vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbf{V}_3$ (*distributivitate faţă de adunarea vectorilor*).

Produse scalare ale vectorilor bazei canonice

$$\vec{\imath}\cdot\vec{\imath} = \vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1, \quad \vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} = \vec{\jmath}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{\imath} = 0.$$

Exprimare în coordonate

Dacă $\vec{u} = u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath} + u_3\vec{k}$, $\vec{v} = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k}$, atunci

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3. \tag{2}$$

Produsul vectorial

Produsul vectorial al vectorilor $\vec{u}$, $\vec{v}$, notat $\vec{u} \times \vec{v}$, este *vectorul* definit prin

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \vec{b} & \text{dacă } \vec{u}, \vec{v} \text{ sunt necoliniari} \\ \vec{0} & \text{dacă } \vec{u}, \vec{v} \text{ sunt coliniari,} \end{cases} \tag{3}$$

unde $\vec{b}$ este un vector de lungime 1, perpendicular pe u şi v, cu sensul dat de regula burghiului drept.

Consecinţă
1. $\|\vec{u} \times \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{V}_3$.

Exprimare alternativă

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \mathrm{pr}_{\alpha} \vec{v},$$

unde α este un plan perpendicular pe $\vec{u}$.

Utilizare
Produsul vectorial a doi vectori $\vec{u}$, $\vec{v}$ este $\vec{0}$ dacă şi numai dacă vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$ sunt coliniari.

Proprietăţi de calcul
1. $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{V}_3$ (*antisimetrie*).
2. $(k\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (k\vec{v}) = k\vec{u} \times \vec{v}$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{V}_3$, $\forall k \in \mathbb{R}$ (*omogenitate*).
3. $\vec{u} \times (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{u} \times \vec{v}_1 + \vec{u} \times \vec{v}_2$, $\forall \vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbf{V}_3$ (*distributivitate faţă de adunarea vectorilor*).

Interpretare geometrică
Norma $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ reprezintă aria paralelogramului construit pe doi reprezentanţi ai vectorilor $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ aplicaţi în acelaşi punct.

Produse vectoriale ale vectorilor bazei canonice

$$\vec{\imath} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = \vec{k} \times \vec{k} = 0, \quad \vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k},\ \vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{i},\ \vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{j}.$$

Exprimare în coordonate
Dacă $\vec{u} = u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath} + u_3\vec{k}$, $\vec{v} = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k}$, atunci

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \tag{4}$$

determinantul de mai sus fiind un determinant simbolic dezvoltabil după aceleaşi reguli ca şi determinanţii numerici.
Identitatea lui Lagrange

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|^2, \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{V}_3.$$

Produsul mixt

Produsul mixt al vectorilor $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, notat $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, este *scalarul* definit prin

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}). \tag{5}$$

Consecinţă
1. $|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$, $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{V}_3$.

Utilizare
Produsul mixt a trei vectori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ este 0 dacă şi numai dacă vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sunt coplanari.

Proprietăţi de calcul
1. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$, $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{V}_3$ (*invarianţă la permutări circulare*).
2. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$, $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{V}_3$ (*schimbarea semnului după permutarea a doi vectori*).
3. $(k\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = k(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{V}_3$(*omogenitate*).
4. $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w})$, $\forall \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{V}_3$(*aditivitate*).

Exprimare în coordonate
Dacă $\vec{u} = u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath} + u_3\vec{k}$, $\vec{v} = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k}$, $\vec{w} = w_1\vec{\imath} + w_2\vec{\jmath} + w_3\vec{k}$, atunci

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Interpretare geometrică
Modulul $|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$ reprezintă volumul paralelipipedului construit pe trei reprezentanţi ai vectorilor $\vec{u}$, $\vec{v}$ şi $\vec{w}$ aplicaţi în acelaşi punct.

Dublul produs vectorial

Dublul produs vectorial $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ al vectorilor $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ este *vectorul*

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{v} & \vec{w} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} & \vec{u} \cdot \vec{w} \end{vmatrix} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}. \tag{7}$$

Consecinţă
În general, $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ (*dublul produs vectorial nu este asociativ; poziţia parantezelor este importantă*). Are loc şi relaţia

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{u} \cdot \vec{w} & \vec{v} \cdot \vec{w} \\ \vec{u} & \vec{v} \end{vmatrix} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}.$$

Alte aplicaţii în geometrie

Aria unui triunghi în spaţiu
Fie $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ puncte în spaţiu. Atunci aria $S_{\triangle M_1M_2M_3}$ a triunghiului $M_1M_2M_3$ este $\frac{1}{2}$ din aria paralelogramului construit pe $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$. Se obţine

$$S_{\triangle M_1M_2M_3} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}\| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2}. \tag{8}$$

Aria unui triunghi în plan

Fie $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ puncte în plan. Cu ajutorul formulei de mai sus se poate deduce că aria $S_{\triangle M_1M_2M_3}$ a triunghiului $M_1M_2M_3$ este

$$S_{\triangle M_1M_2M_3} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}\| = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|. \tag{9}$$

Volumul unui tetraedru

Fie $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, $M_4(x_4, y_4, z_4)$ puncte în spaţiu. Atunci volumul $V_{M_1M_2M_3M_4}$ al tetraedrului $M_1M_2M_3M_4$ este $\frac{1}{6}$ din volumul paralelipipedului construit pe $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_1M_4}$. Se obţine

$$V_{M_1M_2M_3M_4} = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M_4})| = \frac{1}{6}\left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \right|. \tag{10}$$