# Asupra unor şiruri de integrale

***Iuliana GEORGESCU*** [1] ***şi Paul GEORGESCU*** [2]

Articolul de faţă prezintă un mod de calcul al limitelor unor şiruri $(x_n)_{n\geq 1}$ de termen general $x_n=\int_a^b f^n(x)dx$, cu $f$ satisfăcând anumite ipoteze ce vor fi precizate ulterior. În particular, se pot determina limitele şirurilor $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}, (c_n)_{n\geq 1}, (d_n)_{n\geq 1}$ de termen general $a_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x dx$, $b_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n x dx$, $a_n=\int_0^{\pi/2}\mathrm{tg}^n x dx$, $a_n=\int_1^e \ln^n x dx$ .

Insistăm mai întâi asupra unei soluţii eronate date în [**2**] pentru faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

„**Soluţie.**“ Aplicând teorema de medie, $\exists c\in(0,\pi/2)$ astfel încât $\int_0^{\pi/2}\sin^n x dx=$ $=\pi/2\cdot\sin^n c$ . Deoarece $\sin c\in(0,1)$, avem $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n c=0$ şi, deci, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n x dx=0.$

Totuşi, $c$ nu este constant, ci depinde de $n$, şi nu putem deduce că $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n c=0.$

În cele ce urmează vom indica un mod de calcul al unor limite de acest tip.

**Teorema 1.** *Dacă* $f:[a,b]\to[0,1]$ *este continuă, iar* $U(f)=\{x\in[a,b];\ f(x)=1\}$ *este finită, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f^n(x)dx=0.$

**Demonstraţie.** Presupunem că $U(f)=\{x_1,x_2,\ldots x_k\}$ şi fie $\varepsilon>0$ arbitrar, dar fixat. Considerăm $I_i=(a_i,b_i)$ cu $x_i\in I_i$ şi $l(I_i)<\varepsilon/(k+1)$, $i=\overline{1,k}$ şi $l(I_i)$ = lungimea intervalului $I_i$ (daca $x_1=a$ sau $x_k=b$, atunci $I_1=[a_1,b_1)$, respectiv $I_k=(a_k,b_k]$).

Fie $D_1=\bigcup\limits_{i=1}^k[a_i,b_i]$ şi $D_2=[a,b]\setminus\bigcup\limits_{i=1}^k(a_i,b_i)$. Cum $D_2$ este o reuniune finită de intervale închise şi mărginite, şi $f$ este continuă, există $M=\sup\limits_{x\in D_2}f(x)$, iar $M<1$. De aici, rezultă că $\int_{D_2}f^n(x)dx\leq M^n\cdot(\pi/2)$ . Deoarece $f(x)\leq 1$ , $\forall x\in[a,b]$ , se deduce că $\int_{D_1}f^n(x)dx\leq\sum\limits_{i=1}^k(b_i-a_i)\pi/2$. În consecinţă , $\int_a^b f^n(x)dx\leq k\varepsilon/(k+1)+M^n(\pi/2)$.

---

[1] Profesor, Liceul cu Program Sportiv, Iaşi
[2] Profesor, Liceul Teoretic „Grigore Moisil”, Iaşi

Alegând acum $n_0(\varepsilon)$ astfel încât $M^n \cdot (\pi/2) < \varepsilon/(k+1)$, $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$, se obține că $\int_a^b f^n(x)dx < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$, deci $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f^n(x)dx = 0.$

**Observația 1.** Ipoteza „$U(f)$ este finită" din enunț poate fi înlocuită cu „$U(f)$ este Jordan neglijabilă", teorema rămânând valabilă cu aceeaşi demonstrație.

**Corolar 1.** *Dacă* $f:[a,b]\to[0,1]$ *este continuă şi strict crescătoare (sau strict descrescătoare), iar* $f(b)=1$ *(respectiv* $f(a)=1$ *), atunci* $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f^n(x)dx = 0.$

**Demonstrație.** Suntem în ipotezele teoremei , cu $U(f)=\{b\}$, respectiv $U(f)=\{a\}$.

**Aplicația 1.** *Are loc relația* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} d_n = 0$.

**Soluție.** Se aplică Corolarul 1, ținându-se seama de monotonia funcțiilor de sub semnul de integrală.

În cele ce vor urma vom nota cu $D(f)$ mulțimea punctelor de discontinuitate ale unei funcții $f$ . Observăm că este valabilă deasemenea următoarea îmbunătățire a Teoremei 1.

**Teorema 2.** *Dacă* $f:[a,b]\to[-1,1]$, *iar* $D(|f|)$ *şi* $U(|f|)$ *sunt Jordan-neglijabile, atunci* $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f^n(x)dx = 0$ .

**Demonstrație.** Deoarece $f$ este integrabilă Riemann, $|f|, f^n$ şi $|f|^n$ sunt de asemenea integrabile Riemann. Fie acum $\varepsilon>0$ arbitrar, dar fixat. Deoarece $D(|f|)$ este Jordan-neglijabilă , $\exists k\in\mathbf{N}^*$ şi $(I_i)_{1\leq i\leq k}$ astfel încât $I_i=(a_i,b_i)$, $D(|f|)\subset\bigcup_{i=1}^{k} I_k$ şi $\sum_{i=1}^{k}(b_i-a_i)<\varepsilon/2$ .

Notăm $D_1=\bigcup_{i=1}^{k}[a_i,b_i]$, $D_2=[a,b]\setminus\bigcup_{i=1}^{k}(a_i,b_i)$. Mai departe, $\int_{D_1}|f|^n(x)dx \leq \varepsilon/2$, şi cum $|f|^n$ este continuă pe $D_2$, $\int_{D_2} f^n(x)dx$ se poate majora cu ajutorul Teoremei 1. Rezultă de aici că $\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f|^n(x)dx = 0$, deci $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f^n(x)dx = 0.$

**Aplicația 2.** *Fie* $b>0$ , *iar* $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\in(0,b]\\ 0 & , x=0\end{cases}$. *Atunci* $f$ *este integrabilă Riemann, iar* $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f^n(x)dx = 0$ .

**Soluție.** Se observă că $-1 \le f \le 1$, $\forall x \in [0, b]$ şi $D(|f|) = \{0\}$. Atunci $f$ este integrabilă Riemann, conform criteriului Lebesgue de integrabilitate Riemann. Mai departe, $U(|f|) = \{2/(2k+1)\pi;\ k \in \mathbf{N}\}$ este de măsură Jordan nulă şi se poate aplica Teorema 2.

**Observația 2.** Folosind noțiuni de teoria măsurii şi integralei Lebesgue, mai precis teorema lui Egorov, se poate demonstra următorul rezultat:

**Teorema 3.** *Fie* $f : [a, b] \to I$ *continuă,* $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ *integrabilă Riemann şi* $(g_n)_{n \ge 1}$ *un şir de funcții continue,* $g_n : I \to \mathbf{R}$*, astfel încât* $(g_n \circ f)(x) \to g(x)$ $\forall x \in [a, b]$, *şi* $|(g_n \circ f)(x)| \le M$, $\forall x \in [a, b]$. *Atunci* $\int_a^b (g_n \circ f)(x)dx \to \int_a^b g(x)dx$.

**Aplicația 3.** Pentru $a = 0$, $b = \pi/2$, $g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \pi/2) \\ 1, & x = \pi/2 \end{cases}$, $g_n(x) = x^n$, $f(x) = \sin x$, remarcând că sunt îndeplinite condițiile Teoremei 3, iar $\int_0^{\pi/2} g(x)dx = 0$, obținem că $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Analog deducem că $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} d_n = 0$.

**Aplicația 4** (**V. Drulă** şi **I. Paralescu**, *Problema 24154,* G.M. *7-8/1999* ). *Calculați:*

a) $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x + \sin^{2n} x} dx$ b) $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \sin x + \sin^{2n} x} dx$ .

**Soluție.** Aplicăm Teorema 3. Luăm

a) $a = 0$, $b = \pi/2$, $g_n(x) = \frac{2x\sqrt{1 - x^2}}{1 + x^2 + x^n}$, $f(x) = \sin x$ , $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x}, & x \in [0, \pi/2) \\ 1/3, & x = \pi/2 \end{cases}$,

b) $a = 0$, $b = \pi/2$, $g_n(x) = \frac{1}{1 + x^2 + x^{2n}}$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \begin{cases} 1/1 + x^2, & x \in [0, \pi/2) \\ 1/3, & x = \pi/2 \end{cases}$.

**Bibliografie**

1. **D. M. Bătinețu** ***et al.*** – *Primitive şi integrale ,* Ed. Bârchi, Timişoara, 1998.
2. **V. Schneider** – *Culegere de probleme de analiză matematică,* Ed. Hyperion, Craiova, 1993.