O metodă de demonstrare a concurenţei unor drepte

Gabriel POPA, Paul GEORGESCU[1]

Vom exemplifica în cele ce urmează aplicabilitatea unei metode de demonstrare a concurenţei unor drepte, prea puţin utilizată în contextul introducerii noii programe şcolare de geometrie.

Date două puncte A, B având vectorii de poziţie $\vec{r}_A$ şi respectiv $\vec{r}_B$, vectorul de poziţie al unui punct al dreptei AB este de forma

$$\vec{r}_M = \lambda \vec{r}_A + (1-\lambda)\,\vec{r}_B,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

(*ecuaţia vectorială* a dreptei AB). Având o dreaptă ataşată unui triunghi, vectorul de poziţie al unui punct curent M al său poate fi exprimat funcţie de vectorii de poziţie ai vârfurilor şi de un parametru real λ. Considerând încă o dreaptă (cu parametrul notat μ), pentru a afla punctul comun celor două drepte vom avea de rezolvat un sistem liniar în λ şi μ.

Dacă dorim să probăm concurenţa a trei drepte, le vom intersecta două câte două şi vom urmări dacă vectorii de poziţie ai punctelor obţinute coincid. Metoda presupune, în general, un important volum de calcule, însă este "sigură" şi permite, în plus faţă de alte metode, poziţionarea punctului de concurenţă.

Problema 1. *Fie ABC un triunghi şi $M, N \in (BC)$, $P, Q \in (AC)$, $R, S \in (AB)$ puncte astfel încât $BM = CN = CP = AQ = AR = BS = x$, unde $0 < 2x < \min\{AB, BC, CA\}$. Dacă A_1, B_1, C_1 sunt respectiv mijloacele segmentelor (SP), (RN), (MQ), arătaţi că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente.*

Constantin Cocea

Soluţie. Punctul S împarte segmentul orientat $\overline{BA}$ în raportul $\dfrac{\overline{SB}}{\overline{SA}} = -\dfrac{x}{c-x}$; atunci

$$\vec{r}_S = \frac{c-x}{c}\left[\vec{r}_B + \frac{x}{c-x}\vec{r}_A\right] = \frac{c-x}{c}\vec{r}_B + \frac{x}{c}\vec{r}_A\ .$$

Analog, $\vec{r}_P = \dfrac{b-x}{b}\vec{r}_C + \dfrac{x}{b}\vec{r}_A$ şi atunci

$$\vec{r}_{A_1} = \frac{1}{2}\left(\vec{r}_S + \vec{r}_P\right) = \frac{x\,(b+c)}{2bc}\vec{r}_A + \frac{c-x}{2c}\vec{r}_B + \frac{b-x}{2b}\vec{r}_C\ .$$

Vectorul de poziţie al unui punct curent X al dreptei AA_1 va fi

$$\vec{r}_X = \lambda\vec{r}_{A_1} + (1-\lambda)\,\vec{r}_A = \left[\frac{\lambda x\,(b+c)}{2bc} + (1-\lambda)\right]\vec{r}_A + \frac{\lambda\,(c-x)}{2c}\vec{r}_B + \frac{\lambda\,(b-x)}{2b}\vec{r}_C\ ,$$

unde $\lambda \in \mathbb{R}$. Cu totul analog, vectorul de poziţie al unui punct curent Y al dreptei BB_1 va fi

$$\vec{r}_Y = \frac{\mu\,(c-x)}{2c}\vec{r}_A + \left[\frac{\mu x\,(a+c)}{2ac} + (1-\mu)\right]\vec{r}_B + \frac{\mu\,(a-x)}{2a}\vec{r}_C\ .$$

[1] Profesori, Colegiul Naţional şi Liceul de Informatică "Gr. Moisil", Iaşi

Intersecţia celor două drepte se obţine rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda x\,(b+c)}{2bc} + (1-\lambda) = \dfrac{\mu\,(c-x)}{2c} \\ \dfrac{\lambda\,(c-x)}{2c} = \dfrac{\mu x\,(a+c)}{2ac} + (1-\mu) \\ \dfrac{\lambda\,(b-x)}{2b} = \dfrac{\mu\,(a-x)}{2a}\ . \end{cases}$$

Sistemul este compatibil determinat, cu soluţia

$$\lambda = \frac{2bc\,(a-x)}{x^2\,(a+b+c) - 2x\,(ab+bc+ac) + 3abc}\,;$$
$$\mu = \frac{2ac\,(b-x)}{x^2\,(a+b+c) - 2x\,(ab+bc+ac) + 3abc}\,.$$

Punctul comun al dreptelor AA_1 şi BB_1 este T, unde

$$\vec{r}_T = \frac{1}{x^2\,(a+b+c) - 2x\,(ab+bc+ac) + 3abc}[a\,(b-x)\,(c-x)\,\vec{r}_A +$$
$$+ b\,(a-x)\,(c-x)\,\vec{r}_B + c\,(a-x)\,(b-x)\,\vec{r}_C]\ .$$

Scriind acum ecuaţia vectorială a dreptei CC_1 şi aflând intersecţia acesteia cu AA_1, obţinem acelaşi punct T. Urmează că AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente.

Observaţii.

1) Calcule foarte asemănătoare rezolvă problema $L.25.a$) din R. M. T. 2/1990, autor **Constantin Cocea**. Legat de punctul b) al acestei probleme, comparând notele apărute în R. M. T. numerele 2/1991 şi 1/1996, putem observa cum uneori calculul vectorial ajută la simplificarea soluţiilor (a se vedea şi [**4**]).

2) În [**6**] se demonstrează concurenţa înălţimilor şi bisectoarelor unui triunghi folosind această metodă; aceste demonstraţii au constituit punctul de plecare al articolului de faţă.

3) Calculele pot fi simplificate atunci când, din considerente geometrice, intuim anumite simetrii verificate de punctul de concurenţă.

Problema 2. *Fie H ortocentrul $\triangle ABC$, M, N şi P mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$ respectiv $[AB]$, iar $A_1 \in (AH)$, $B_1 \in (BH)$, $C_1 \in (CH)$ astfel încât $\dfrac{AA_1}{A_1H} = \dfrac{BB_1}{B_1H} = \dfrac{CC_1}{C_1H}$. Să se arate că dreptele A_1M, B_1N şi C_1P sunt concurente.*

Gabriel Popa, Paul Georgescu

Soluţie. Raportăm planul la un reper cu originea în centrul cercului circumscris triunghiului şi fie $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{r}_C$ vectorii de poziţie ai vârfurilor. Dacă $\dfrac{A_1H}{AA_1} = k$, atunci

$$\vec{r}_H = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C\,,\quad \vec{r}_M = \frac{1}{2}\,(\vec{r}_B + \vec{r}_C)\,,$$
$$\vec{r}_{A_1} = \frac{1}{1+k}\vec{r}_H + \frac{k}{1+k}\vec{r}_A = \vec{r}_A + \frac{1}{1+k}\vec{r}_B + \frac{1}{1+k}\vec{r}_C\,.$$

Căutăm un punct $Q \in (A_1M)$ astfel încât $\dfrac{A_1Q}{QM} = l$, iar $\vec{r}_Q$ să se exprime simetric funcţie de $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$ şi $\vec{r}_C$:

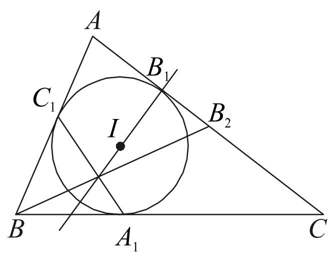
$$\vec{r}_Q = \frac{1}{1+l}\vec{r}_{A_1} + \frac{l}{1+l}\vec{r}_M = \frac{1}{1+l}\left[\vec{r}_A + \left(\frac{l}{2}+\frac{1}{1+k}\right)\vec{r}_B + \left(\frac{l}{2}+\frac{1}{1+k}\right)\vec{r}_C\right];$$

pentru $\frac{l}{2}+\frac{1}{1+k} = 1 \Leftrightarrow l = \frac{2k}{1+k}$, obţinem că $\vec{r}_Q = \frac{1+k}{1+3k}\left(\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C\right)$. Analog, căutăm $Q' \in (B_1N)$ şi $Q'' \in (C_1P)$ care să se exprime simetric funcţie de $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$ şi $\vec{r}_C$; vom găsi că $Q' = Q'' = Q$, deci cele trei drepte sunt concurente.

Problema 3. *Laturile (AB), (BC), (AC) ale triunghiului ABC sunt tangente cercului înscris de centru I în punctele C_1, A_1 respectiv B_1. Dacă B_2 este mijlocul laturii (AC), demonstraţi că dreptele B_1I, A_1C_1 şi BB_2 sunt concurente.*

Olimpiadă Rep. Moldova

Soluţie. Funcţie de vectorii de poziţie ai vârfurilor $\triangle ABC$, vectorii de poziţie ai punctelor care apar în problemă sunt:



$$\vec{r}_{A_1} = \frac{a+b-c}{2a}\vec{r}_B + \frac{a+c-b}{2a}\vec{r}_C\ ;$$
$$\vec{r}_{B_1} = \frac{b+a-c}{2b}\vec{r}_A + \frac{b+c-a}{2b}\vec{r}_C\ ;$$
$$\vec{r}_{C_1} = \frac{c+a-b}{2c}\vec{r}_A + \frac{c+b-a}{2c}\vec{r}_B\ ;$$
$$\vec{r}_{B_2} = \frac{1}{2}\left(\vec{r}_A+\vec{r}_C\right); \quad \vec{r}_I = \frac{a}{a+b+c}\vec{r}_A + \frac{b}{a+b+c}\vec{r}_B + \frac{c}{a+b+c}\vec{r}_C\ .$$

Fie X un punct pe IB_1; atunci

$$\vec{r}_X = \lambda\vec{r}_{B_1} + (1-\lambda)\,\vec{r}_I = \left[\frac{\lambda\,(b+a-c)}{2b} + \frac{(1-\lambda)\,a}{a+b+c}\right]\vec{r}_A +$$
$$+\frac{(1-\lambda)\,b}{a+b+c}\vec{r}_B + \left[\frac{\lambda\,(b+c-a)}{2b} + \frac{(1-\lambda)\,c}{a+b+c}\right]\vec{r}_C, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Căutăm o valoare a lui λ pentru care $\vec{r}_X$ să aibă o exprimare simetrică în $\vec{r}_A$ şi $\vec{r}_C$, deci

$$\frac{\lambda\,(b+a-c)}{2b} + \frac{(1-\lambda)\,a}{a+b+c} = \frac{\lambda\,(b+c-a)}{2b} + \frac{(1-\lambda)\,c}{a+b+c} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{b}{a+c};$$

pentru această valoare a lui λ,

$$\vec{r}_X = \frac{a+c-b}{2\,(a+c)}\vec{r}_A + \frac{b}{a+c}\vec{r}_B + \frac{a+c-b}{2\,(a+c)}\vec{r}_C.$$

Fie acum Y punct pe A_1C_1; atunci

$$\vec{r}_Y = \mu\vec{r}_{A_1} + (1-\mu)\,\vec{r}_{C_1} = (1-\mu)\,\frac{c+a-b}{2c}\vec{r}_A +$$
$$+\left[\frac{\mu\,(a+b-c)}{2a} + \frac{(1-\mu)\,(c+b-a)}{2c}\right]\vec{r}_B + \frac{\mu\,(a+c-b)}{2a}\vec{r}_C\ .$$

Căutând o valoare pentru μ astfel încât $\vec{r}_Y$ să aibă o exprimare simetrică în $\vec{r}_A$ şi $\vec{r}_C$, obţinem $\mu = \frac{a}{a+c}$ şi, pentru această valoare,

$$\vec{r}_Y = \frac{a+c-b}{2\,(a+c)}\vec{r}_A + \frac{b}{a+c}\vec{r}_B + \frac{a+c-b}{2\,(a+c)}\vec{r}_C\ ,$$

adică $Y = X$. Să observăm în final că, datorită simetriei în $\vec{r}_A$ şi $\vec{r}_C$, acest punct se află şi pe mediana BB_2.

Probleme propuse

1. Fie G_A, G_B, G_C, G_D centrele de greutete ale feţelor tetraedrului $ABCD$, iar M un punct interior tetraedrului. Dacă A', B', C', D' sunt situate respectiv pe semidreptele $(MG_A$, $(MG_B$, $(MG_C$, $(MG_D$, în exteriorul tetraedrului, astfel încât $\dfrac{MG_A}{G_AA'} = \dfrac{MG_B}{G_BB'} = \dfrac{MG_C}{G_CC'} = \dfrac{MG_D}{G_DD'}$, să se arate că dreptele AA', BB', CC', DD' sunt concurente.

Gabriel Popa, Paul Georgescu

2. Fie ABC un triunghi înscris în cercul $\mathcal{C}$, A_1, B_1, C_1 punctele de pe $\mathcal{C}$ diametral opuse vârfurilor, iar G_A, G_B, G_C centrele de greutate ale triunghiurilor A_1BC, B_1CA, respectiv C_1AB. Arătaţi că dreptele AG_A, BG_B, CG_C sunt concurente într-un punct situat pe dreapta lui Euler a $\triangle ABC$.

Gabriel Popa, Paul Georgescu

3. Fie M în interiorul $\triangle ABC$. Bisectoarele interioare ale unghiurilor $\widehat{BMC}$, $\widehat{CMA}$, $\widehat{AMB}$ taie laturile $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$ în A_1, B_1, respectiv C_1. Să se arate că AA_1, BB_1 şi CC_1 sunt concurente.

Gheorghe Neagu

4. Fie D, E, F punctele de tangenţă ale cercului înscris în $\triangle ABC$ cu laturile $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$. Paralela prin E la AB taie FD în Q, iar paralela prin D la AB taie EF în T. Să se arate că dreptele CF, DE şi TQ sunt concurente.

Marcel Chiriţă

5. Fie tetraedrul $ABCD$ şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (CD)$, $P \in (BC)$, $Q \in (AD)$ astfel încât $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{DN}{NC}$, $\dfrac{BP}{PC} = \dfrac{AQ}{QD}$. Notăm $\{A_1\} = BN \cap DP$, $\{B_1\} = AN \cap CQ$, $\{C_1\} = BQ \cap DM$, $\{D_1\} = AP \cap CM$. Să se arate că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 şi DD_1 sunt concurente.

Bibliografie

1. **C. Cocea** - *Problema L.25*, R. M. T. - 2/1990.
2. **C. Cocea** - *Problema X.8*, R. M. T. - 1/1996.
3. **P. Georgescu, G. Popa** - *Structuri fundamentale în algebra liniară, geometria vectorială şi geometria analitică*, Ed. MatrixRom, Bucureşti, 2003.
4. **G. Popa** - *Aplicaţii ale dimensiunii dreptei vectoriale, planului vectorial şi a spaţiului vectorial*, Matematica pentru elevi, Galaţi, 17-18/2001.
5. **G. Popa, P. Georgescu** - *Dreapta lui Euler privită ca loc geometric*, Recreaţii Matematice - 2/2002.
6. **E. Murgulescu, N. Donciu** - *Culegere de probleme de geometrie analitică şi diferenţială* (vol. I), E. D. P., 1971.
7. ******* - *A 46-a Olimpiadă de Matematică a Rep. Moldova*, R. M. T - 3/2002.