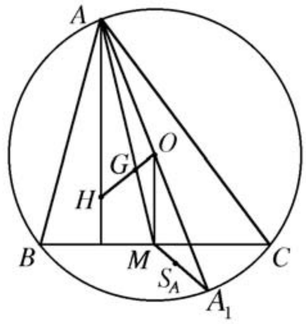
Dreapta lui Euler privită ca loc geometric

***Gabriel POPA*[1], *Paul GEORGESCU*[2]**

Vom arăta în cele ce urmează că dreapta lui Euler a unui triunghi poate fi gândită ca locul geometric al punctelor de concurenţă a trei ceviene variabile asociate triunghiului.



Fie O, G, H punctele remarcabile (în notaţii uzuale) ale triunghiului ABC, A_1, B_1, C_1 punctele de pe cercul circumscris diametral opuse vârfurilor notate corespunzător, iar S_A, S_B, S_C puncte pe dreptele A_1M, B_1N respectiv C_1P (unde M, N, P sunt mijloacele laturilor) care împart segmentele orientate $\overline{A_1M}$, $\overline{B_1N}$, $\overline{C_1P}$ într-un acelaşi raport $k \in \mathbb{R} \setminus \left\{1, \frac{4}{3}\right\}$.

Teoremă. *Dreptele AS_A, BS_B şi CS_C sunt concurente într-un punct situat pe dreapta lui Euler a triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Raportăm planul la un reper cu originea în centrul cercului circumscris O; vom nota cu $\vec{r}_X$ vectorul de poziţie al punctului X. Atunci

$$\vec{r}_{S_A} = \frac{1}{1-k}\left(\vec{r}_{A_1} - k\vec{r}_M\right) = \frac{1}{k-1}\left[\vec{r}_A + \frac{k}{2}\left(\vec{r}_B + \vec{r}_C\right)\right].$$

Fie Q un punct pe dreapta AS_A care împarte segmentul orientat $\overline{AS_A}$ în raportul $\frac{\overline{QA}}{\overline{QS_A}} = l$; avem

$$\vec{r}_Q = \frac{1}{1-l}\left(\vec{r}_A - l\vec{r}_{S_A}\right) = \frac{1}{1-l}\vec{r}_A - \frac{l}{(1-l)(k-1)}\left[\vec{r}_A + \frac{k}{2}\left(\vec{r}_B + \vec{r}_C\right)\right] =$$
$$= \frac{1+l-k}{(1-l)(1-k)}\vec{r}_A + \frac{lk}{2(1-l)(1-k)}\vec{r}_B + \frac{lk}{2(1-l)(1-k)}\vec{r}_C.$$

Vom încerca să determinăm $l \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ astfel încât $\vec{r}_Q$ să aibă o scriere simetrică în raport cu $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{r}_C$. Pentru aceasta,

$$2(1+l-k) = lk \Leftrightarrow l(k-2) = 2-2k \Leftrightarrow l = \frac{2-2k}{k-2} \quad (1)$$

unde $l = 1$ dacă şi numai dacă $k = \frac{4}{3}$. Pentru valoarea lui l dată de (1), obţinem

$$\vec{r}_Q = \frac{k}{3k-4}\left(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C\right) \quad (2)$$

Considerând acum punctele Q' pe BS_B şi Q'' pe CS_C care împart segmentele orientate corespunzătoare în acelaşi raport l dat de (1), va rezulta că $\vec{r}_{Q'} = \vec{r}_{Q''} = \vec{r}_Q$, deci cele trei puncte coincid. Prin urmare, există un punct comun dreptelor AS_A, BS_B şi CS_C.

[1] Profesor, Liceul Teoretic "Garabet Ibrăileanu", Iaşi
[2] Profesor, Liceul de Informatică "Grigore C. Moisil", Iaşi

Deoarece $\vec{r}_O = \vec{0}$ şi $\vec{r}_G = \dfrac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C)$, obţinem că $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C)$. Atunci punctul Q dat de (2) se află pe dreapta OG, care este dreapta lui Euler a truinghiului ABC.

Observaţia 1. Pentru $k = \dfrac{4}{3}$, dreptele AS_A, BS_B şi CS_C nu sunt concurente, întrucât sunt toate paralele cu dreapta lui Euler. Într-adevăr, în acest caz S_A ar fi simetricul lui A_1 faţă de H, deoarece punctele H, M şi A_1 sunt coliniare şi M este mijlocul segmentului $[HA_1]$. Rezultă de aici că HO este linie mijlocie în triunghiul A_1S_AA, deci $HO \| AS_A$.

Cazul $k = 1$ trebuie evident exclus, întrucât el corespunde punctelor ”de la infinit” de pe dreptele A_1M, B_1N, respectiv C_1P.

Observaţia 2. Câteva cazuri particulare remarcabile:

• $k = 0$ conduce la obţinerea punctului O drept punct de concurenţă a diametrilor AA_1, BB_1, CC_1;

• $k = 2$ corespunde situaţiei în care $S_A = S_B = S_C = H$; evident atunci că punctul de concurenţă Q dat de (2) este chiar H-ortocentrul triunghiului;

• $k = -2$ corespunde situaţiei în care $S_A = G_A$ este centrul de greutate al triunghiului A_1BC etc. În acest caz, punctul de concurenţă Q are vectorul de poziţie $\vec{r}_Q = \dfrac{1}{5}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C)$ deci $\dfrac{QG}{QO} = \dfrac{2}{3}$. Dealtfel, articolul de faţă a pornit tocmai de la acest caz, autorii demonstrând că $OG_A \| A\Omega$, unde Ω este centrul cercului celor nouă puncte;

• $k = 4$ corespunde situaţiei în care S_A este simetricul lui G_A în raport cu M şi analoagele; în acest caz, punctul de concurenţă Q este Ω, centrul cercului celor nouă puncte.

Observaţia 3. Orice punct de pe dreapta lui Euler, cu excepţia centrului de greutate G, poate fi gândit ca un punct de concurenţă Q obţinut pentru un anumit raport k. Mai precis, pe dreapta cu orientarea $\overline{OH}$ avem:

• $k \in (0, 1)$, deci S_A se află pe semidreapta opusă lui $(A_1M$ şi analoagele; atunci $\dfrac{k}{3k-4} \in (-1, 0)$ şi se obţin astfel punctele de pe dreapta lui Euler dintre O şi simetricul lui H faţă de O;

• $k \in (-\infty, 0]$, deci S_A aparţine segmentului $(MA_1]$ şi analoagele; atunci $\dfrac{k}{3k-4} \in$ $\in \left[0, \dfrac{1}{3}\right)$ şi se obţin astfel punctele de pe segmentul $(GO]$;

• $k \in \left(1, \dfrac{4}{3}\right) \cup \left(\dfrac{4}{3}, \infty\right)$, deci S_A se află pe semidreapta opusă lui $(MA_1$ şi analoagele; atunci $\dfrac{k}{3k-4} \in (-\infty, -1) \cup \left(\dfrac{1}{3}, \infty\right)$ şi se obţin punctele semidreptei $(GH$ pentru $k \in \left(\dfrac{4}{3}, \infty\right)$ şi cele ale semidreptei rămase pentru $k \in \left(1, \dfrac{4}{3}\right)$.