Un mod de calcul al numărului lexicografic de ordine asociat unei permutări

***Iuliana GEORGESCU*[1], *Paul GEORGESCU*[2]**

În cele ce urmează vom studia câteva proprietăţi ale relaţiei de ordine lexicografică pe mulţimea S_n a permutărilor de ordinul n şi vom preciza un mod de calcul al numărului lexicografic de ordine asociat.

După cum este cunoscut, relaţia de ordine lexicografică pe mulţimea S_n se defineşte în modul următor.

Definiţie. *Date σ şi $\sigma' \in S_n$, vom spune că σ precede lexicografic σ' şi vom nota $\sigma \prec \sigma'$ dacă $\exists\, i_0 \in \overline{1,n}$ astfel încât $\sigma(i) = \sigma'(i)$, $\forall i \in \overline{1, i_0 - 1}$, iar $\sigma(i_0) < \sigma'(i_0)$.*

În raport cu această relaţie de ordine, fiecărei permutări din S_n i se va putea asocia un număr de ordine cuprins între 1 şi $n!$, care va fi numit în cele ce urmează numărul lexicografic de ordine al acelei permutări. De asemenea, dacă $\sigma \in S_n$, notăm cu $m_\sigma(i)$ numărul de inversiuni corespunzătoare poziţiei i în permutarea σ şi cu $s_\sigma(i) = \{\sigma(i+1), \sigma(i+2), \ldots \sigma(n)\}$ mulţimea elementelor care-l succed pe $\sigma(i)$ în permutarea σ.

Lema 1. *Dacă σ, $\sigma' \in S_n$, atunci are loc echivalenţa $\sigma \prec \sigma' \Leftrightarrow \exists i_0 \in \overline{1,n}$ în aşa fel încât $m_\sigma(i) = m_{\sigma'}(i)$, $\forall i \in \overline{1, i_0 - 1}$, iar $m_\sigma(i_0) < m_{\sigma'}(i_0)$.*

Demonstraţie. „$\Rightarrow$" Fie $i_0 \in \overline{1,n}$ în aşa fel încât $\sigma(i) = \sigma'(i)$, $\forall i \in \overline{1, i_0 - 1}$, iar $\sigma(i_0) < \sigma'(i_0)$. În mod evident, $m_\sigma(i) = m_{\sigma'}(i)$, $\forall i \in \overline{1, i_0 - 1}$, pentru că $s_\sigma(i) = s_{\sigma'}(i)$, $\forall i \in \overline{1, i_0 - 1}$, iar $m_\sigma(i_0) < m_{\sigma'}(i_0)$ (prin trecerea pe poziţia i la un element mai mare se „câştigă" inversiuni).

„$\Leftarrow$" Fie $i_0 \in \overline{1,n}$ în aşa fel încât $m_\sigma(i) = m_{\sigma'}(i)$, $\forall i \in \overline{1, i_0 - 1}$, iar $m_\sigma(i_0) < m_{\sigma'}(i_0)$. Deoarece $m_\sigma(1) = m_{\sigma'}(1)$, se obţine că $\sigma(1) = \sigma'(1)$, ştiind că $m_\sigma(1) = n - \sigma(1)$, $m_{\sigma'}(1) = n - \sigma'(1)$. Cu un raţionament asemănător se obţine că $\sigma(i) = \sigma'(i)$, $\forall i \in \overline{1, i_0 - 1}$, şi deci $s_\sigma(i_0 - 1) = s_{\sigma'}(i_0 - 1)$. Deoarece $m_\sigma(i_0) < m_{\sigma'}(i_0)$, rezultă evident că $\sigma(i_0) < \sigma'(i_0)$.

Observaţia 1. Evident, $m_\sigma(i) \le n - i$. De asemenea, are loc inegalitatea
$\sum\limits_{i=k}^{n} m_\sigma(i)(n-i)! \le \sum\limits_{i=k}^{n} (n-i)(n-i)!$ şi de aici
$\sum\limits_{i=k}^{n} m_\sigma(i)(n-i)! \le \sum\limits_{i=k}^{n} [(n-i+1)! - (n-i)!] = (n-k+1)! - 1, \forall k \in \overline{1,n}.$

Notăm $N(\sigma) = 1 + \sum\limits_{i=1}^{n} m_\sigma(i)(n-i)!$. Conform observaţiei anterioare, $1 \le N(\sigma) \le n!$.

Lema 2. *Are loc echivalenţa $\sigma \prec \sigma' \Leftrightarrow N(\sigma) < N(\sigma')$.*

Demonstraţie. „$\Rightarrow$" Fie $i_0 \in \overline{1,n}$ în aşa fel încât $\sigma(i) = \sigma'(i)$, $\forall i \in \overline{1, i_0 - 1}$, iar $\sigma(i_0) < \sigma'(i_0)$. Atunci $N(\sigma') - N(\sigma) = [m_{\sigma'}(i_0) - m_\sigma(i_0)](n - i_0)! +$
$+ \sum\limits_{i=i_0+1}^{n} [m_{\sigma'}(i) - m_\sigma(i)](n-i)! \ge (n-i_0)! - \sum\limits_{i=i_0+1}^{n} m_{\sigma'}(i)(n-i)!.$

Conform *Observaţiei 1*, $N(\sigma') - N(\sigma) \ge 1$.

[1] Profesoară, Liceul cu Program Sportiv, Iaşi
[2] Profesor, Liceul de Informatică "Grigore Moisil", Iaşi

„$\Leftarrow$" Presupunem prin reducere la absurd că $\sigma' \preceq \sigma$. Dacă $\sigma' = \sigma$, atunci $N(\sigma) = N(\sigma')$, absurd. Dacă $\sigma' \prec \sigma$, atunci $N(\sigma) < N(\sigma')$, conform celor demonstrate anterior, ceea ce este absurd.

Fie acum $F_1 : S_n \to \overline{1, n!}$, $F_1(\sigma) = N(\sigma)$. Conform *Lemei 2*, F_1 este injectivă. Deoarece card $S_n = n!$ =card $\overline{1, n!}$, F_1 este bijectivă, şi deoarece F_1 păstrează ordinea lexicografică (*Lema 2*), $N(\sigma)$ este chiar numărul lexicografic de ordine asociat permutării σ. Se obţine deci următoarea

Teoremă. *Numărul lexicografic de ordine asociat unei permutări σ este*

$$N(\sigma) = 1 + \sum_{i=1}^{n} m_\sigma(i)(n-i)!\,.$$

Vom propune în continuare câteva aplicaţii ale acestui rezultat.

Problema 1. *Fie σ, $\sigma' \in S_n$ în aşa fel încât $m_\sigma(i) = m_{\sigma'}(i)$, $\forall i \in \overline{1, n}$. Demonstraţi că $\sigma = \sigma'$.*

Soluţie. Se observă că $N(\sigma) = N(\sigma')$, deci $\sigma = \sigma'$.

Fie $M_n = \overline{0, n-1} \times \overline{0, n-2} \times \ldots \times \{0\}$.

Corolar. *Funcţia $F_2 : S_n \to M_n$, $F_2(\sigma) = (m_\sigma(1), m_\sigma(2), \ldots, m_\sigma(n))$ este injectivă.*

Demonstraţie. Evident, $\operatorname{card} S_n = \operatorname{card} M_n = n!$, iar F_2 este injectivă conform *Lemei 2*, deci în fapt este bijectivă.

Problema 2. *Demonstraţi că pentru orice n-uplă $(k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ astfel încât $0 \le k_i \le n-i$, $\exists \sigma \in S_n$ satisfăcând $m_\sigma(i) = k_i$, $\forall i \in \overline{1, n}$.*

Soluţie. Rezultă imediat din surjectivitatea lui F_2.

Fie acum $n \in \mathbb{N}^*$, $n \ge 2$, şi $k \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le n$. Notăm cu A_n^k mulţimea tuturor aranjamentelor de câte n elemente luate câte k. Cu această notaţie, fiecărui aranjament $A \in A_n^k$, privit ca o funcţie de la mulţimea $\overline{1, k}$ la mulţimea $\overline{1, n}$, i se poate asocia în mod natural mulţimea $M(A)$ ce conţine toate permutările $\sigma \in S_n$ cu proprietatea că $\sigma(i) = A(i)$, $\forall i \in \overline{1, k}$, iar $\sigma(i) \in \overline{1, n} \backslash \{A(1), A(2), \ldots, A(k)\}$, $\forall i \in \overline{k+1, n}$. Evident, $M(A)$ conţine $(n-k)!$ elemente cu numere lexicografice de ordine asociate consecutive.

Pentru $i \in \overline{1, k}$, notăm cu $n_A(i)$ numărul elementelor din mulţimea $\overline{1, n} \backslash \{A(1), A(2), \ldots, A(i)\}$ care sunt mai mari decât i. Evident, pentru $n = k$, $n_A(i) = m_A(i)$.

Relaţia de ordine lexicografică definită pe mulţimea S_n se poate extinde în mod evident şi la mulţimea A_n^k. Aplicând raţionamentul descris anterior, obţinem că numărul lexicografic de ordine asociat unui aranjament A este

$$N_A = 1 + \sum_{i=1}^{k} m_\sigma(i)(n-i)!/(n-k)!\,.$$

Observaţia 2. Împreună cu schiţa unei alte demonstratii, Teorema este menţionată în [**1**] şi preluată în [**2**], fără demonstraţie şi fără indicarea sursei originale.

Bibliografie.

1. **P. Georgescu -** *Asupra relaţiei de ordine lexicografică pe mulţimea permutărilor de ordinul n*, Revista „Joc Secund", Liceul de Informatică „G. Moisil", Iaşi, ianuarie 2001.
2. **D. Hrinciuc-Logofătu** - *C++. Algoritmi şi probleme rezolvate,* Editura Polirom, Iaşi, 2001.