COLOCVIU - ALGAD - DIMA

NUMĂRUL 1

Exercițiul 1. *Se consideră următoarele matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \text{ şi } D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) *Calculaţi* $3B + 2C$, $A \cdot C$, $B \cdot A$ *şi* $B \cdot C$.

b) *Calculaţi* $\det(B)$, $\det(C)$ *şi* $\det(D)$.

c) *Stabiliţi dacă matricele* B, C *şi* D *sunt inversabile şi, în caz afirmativ, determinaţi inversa matricei* B.

Exercițiul 2. *Rezolvaţi următoarele sisteme de ecuaţii:*

a) $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x + y - z = 1 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 19 \\ 2x + 7y + 4z = 41 \\ 3x + 11y + 6z = 64 \end{cases}$

Exercițiul 3. *Se consideră punctele* $A(3, 2, 1)$, $B(5, 4, 2)$ *şi* $C(7, 6, 8)$.

a) *Determinaţi coordonatele vectorilor* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ *şi* $\overrightarrow{AC}$.

b) *Determinaţi* $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{BC}\|$ *şi* $\|\overrightarrow{AC}\|$.

c) *Determinaţi* $< \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} >$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ *şi stabiliţi dacă* $AB \perp BC$ *şi dacă* $AB \parallel AC$.

d) *Determinaţi ecuaţiile dreptei* AB.

Exercițiul 4.

a) *Demonstraţi că mulţimea* $\mathcal{B} = \{(1, 1, 2, 3); (1, 2, 5, 2); (2, 5, 14, 6); (3, 10, 28, 6)\}$ *reprezintă o bază în* $\mathbb{R}^4$.

b) *Determinaţi coordonatele vectorului* $\mathbf{v} = (5, 16, 45, 11)$ *în baza* $\mathcal{B}$.

Exercițiul 5. *Se consideră* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *unde* $T(\boldsymbol{u}) = T((u_1, u_2)) = (3u_1 + 2u_2, 2u_1 - u_2)$, *pentru orice* $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$.

a) *Demonstraţi că* T *este un operator liniar de la* $\mathbb{R}^2$ *la* $\mathbb{R}^2$.

b) *Determinaţi* $\ker(T)$ *şi* $\operatorname{Im}(T)$ *şi stabiliţi dacă* T *este injectiv/surjectiv/bijectiv.*

COLOCVIU - ALGAD - DIMA

NUMĂRUL 2

Exerciţiul 1. *Se consideră următoarele matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} \text{ şi } D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) *Calculaţi* $3B + 2C$, $A \cdot C$, $B \cdot A$ *şi* $B \cdot C$.

b) *Calculaţi* $\det(B)$, $\det(C)$ *şi* $\det(D)$.

c) *Stabiliţi dacă matricele* B, C *şi* D *sunt inversabile şi, în caz afirmativ, determinaţi inversa matricei* B.

Exerciţiul 2. *Rezolvaţi următoarele sisteme de ecuaţii:*

a) $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x + y - z = 5 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 20 \\ 2x + 7y + 4z = 44 \\ 3x + 11y + 6z = 70 \end{cases}$

Exerciţiul 3. *Se consideră punctele* $A(3,1,2)$, $B(5,3,3)$ *şi* $C(7,5,9)$.

a) *Determinaţi coordonatele vectorilor* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ *şi* $\overrightarrow{AC}$.

b) *Determinaţi* $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{BC}\|$ *şi* $\|\overrightarrow{AC}\|$.

c) *Determinaţi* $< \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} >$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ *şi stabiliţi dacă* $AB \perp BC$ *şi dacă* $AB \parallel AC$.

d) *Determinaţi ecuaţiile dreptei* AB.

Exerciţiul 4.

a) *Demonstraţi că mulţimea* $\mathcal{B} = \{(1,1,2,3); (1,2,5,2); (3,6,16,9); (2,9,26,3)\}$ *reprezintă o bază în* $\mathbb{R}^4$.

b) *Determinaţi coordonatele vectorului* $\mathbf{v} = (5,16,45,11)$ *în baza* $\mathcal{B}$.

Exerciţiul 5. *Se consideră* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *unde* $T(\boldsymbol{u}) = T((u_1, u_2)) = (u_1 + 3u_2, 3u_1 - 2u_2)$, *pentru orice* $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$.

a) *Demonstraţi că* T *este un operator liniar de la* $\mathbb{R}^2$ *la* $\mathbb{R}^2$.

b) *Determinaţi* $\ker(T)$ *şi* $\mathrm{Im}(T)$ *şi stabiliţi dacă* T *este injectiv/surjectiv/bijectiv.*

COLOCVIU - ALGAD - DIMA

NUMĂRUL 3

Exercițiul 1. *Se consideră următoarele matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ și } D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) *Calculați* $3B + 2C$, $A \cdot C$, $B \cdot A$ *și* $B \cdot C$.

b) *Calculați* $\det(B)$, $\det(C)$ *și* $\det(D)$.

c) *Stabiliți dacă matricele* B, C *și* D *sunt inversabile și, în caz afirmativ, determinați inversa matricei* B.

Exercițiul 2. *Rezolvați următoarele sisteme de ecuații:*

a) $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x + y - z = 5 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 17 \\ 2x + 7y + 4z = 36 \\ 3x + 11y + 6z = 58 \end{cases}$

Exercițiul 3. *Se consideră punctele* $A(2, 3, 1)$, $B(4, 5, 2)$ *și* $C(6, 7, 8)$.

a) *Determinați coordonatele vectorilor* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ *și* $\overrightarrow{AC}$.

b) *Determinați* $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{BC}\|$ *și* $\|\overrightarrow{AC}\|$.

c) *Determinați* $< \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} >$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ *și stabiliți dacă* $AB \perp BC$ *și dacă* $AB \parallel AC$.

d) *Determinați ecuațiile dreptei* AB.

Exercițiul 4.

a) *Demonstrați că mulțimea* $\mathcal{B} = \{(1, 1, 2, 3); (2, 3, 7, 5); (1, 4, 12, 3); (3, 10, 28, 6)\}$ *reprezintă o bază în* $\mathbb{R}^4$.

b) *Determinați coordonatele vectorului* $\mathbf{v} = (5, 16, 45, 11)$ *în baza* $\mathcal{B}$.

Exercițiul 5. *Se consideră* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *unde* $T(\boldsymbol{u}) = T((u_1, u_2)) = (2u_1 + u_2, u_1 - 3u_2)$, *pentru orice* $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$.

a) *Demonstrați că* T *este un operator liniar de la* $\mathbb{R}^2$ *la* $\mathbb{R}^2$.

b) *Determinați* $\ker(T)$ *și* $\operatorname{Im}(T)$ *și stabiliți dacă* T *este injectiv/surjectiv/bijectiv.*

COLOCVIU - ALGAD - DIMA

NUMĂRUL 4

Exerciţiul 1. *Se consideră următoarele matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} \text{ şi } D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) *Calculaţi* $3B + 2C$, $A \cdot C$, $B \cdot A$ *şi* $B \cdot C$.

b) *Calculaţi* $\det(B)$, $\det(C)$ *şi* $\det(D)$.

c) *Stabiliţi dacă matricele* B, C *şi* D *sunt inversabile şi, în caz afirmativ, determinaţi inversa matricei* B.

Exerciţiul 2. *Rezolvaţi următoarele sisteme de ecuaţii:*

a) $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x + y - z = 1 \\ x - y + z = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 19 \\ 2x + 7y + 4z = 42 \\ 3x + 11y + 6z = 67 \end{cases}$

Exerciţiul 3. *Se consideră punctele* $A(2, 1, 3)$, $B(4, 3, 4)$ *şi* $C(6, 5, 10)$.

a) *Determinaţi coordonatele vectorilor* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ *şi* $\overrightarrow{AC}$.

b) *Determinaţi* $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{BC}\|$ *şi* $\|\overrightarrow{AC}\|$.

c) *Determinaţi* $< \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} >$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ *şi stabiliţi dacă* $AB \perp BC$ *şi dacă* $AB \parallel AC$.

d) *Determinaţi ecuaţiile dreptei* AB.

Exerciţiul 4.

a) *Demonstraţi că mulţimea* $\mathcal{B} = \{(1, 1, 2, 3); (2, 3, 7, 5); (3, 6, 16, 9); (1, 8, 24, 0)\}$ *reprezintă o bază în* $\mathbb{R}^4$.

b) *Determinaţi coordonatele vectorului* $\mathbf{v} = (5, 16, 45, 11)$ *în baza* $\mathcal{B}$.

Exerciţiul 5. *Se consideră* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *unde* $T(\boldsymbol{u}) = T((u_1, u_2)) = (u_1 + 2u_2, 3u_1 - u_2)$, *pentru orice* $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$.

a) *Demonstraţi că* T *este un operator liniar de la* $\mathbb{R}^2$ *la* $\mathbb{R}^2$.

b) *Determinaţi* $\ker(T)$ *şi* $\mathrm{Im}(T)$ *şi stabiliţi dacă* T *este injectiv/surjectiv/bijectiv.*

COLOCVIU - ALGAD - DIMA

NUMĂRUL 5

Exercițiul 1. *Se consideră următoarele matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \text{ și } D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) *Calculați* $3B + 2C$, $A \cdot C$, $B \cdot A$ *și* $B \cdot C$.

b) *Calculați* $\det(B)$, $\det(C)$ *și* $\det(D)$.

c) *Stabiliți dacă matricele* B, C *și* D *sunt inversabile și, în caz afirmativ, determinați inversa matricei* B.

Exercițiul 2. *Rezolvați următoarele sisteme de ecuații:*

a) $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x + y - z = 3 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 16 \\ 2x + 7y + 4z = 34 \\ 3x + 11y + 6z = 55 \end{cases}$

Exercițiul 3. *Se consideră punctele* $A(1,3,2)$, $B(3,5,3)$ *și* $C(5,7,9)$.

a) *Determinați coordonatele vectorilor* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ *și* $\overrightarrow{AC}$.

b) *Determinați* $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{BC}\|$ *și* $\|\overrightarrow{AC}\|$.

c) *Determinați* $< \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} >$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ *și stabiliți dacă* $AB \perp BC$ *și dacă* $AB \parallel AC$.

d) *Determinați ecuațiile dreptei* AB.

Exercițiul 4.

a) *Demonstrați că mulțimea* $\mathcal{B} = \{(1,1,2,3); (3,4,9,8); (1,4,12,3); (2,9,26,3)\}$ *reprezintă o bază în* $\mathbb{R}^4$.

b) *Determinați coordonatele vectorului* $\mathbf{v} = (5,16,45,11)$ *în baza* $\mathcal{B}$.

Exercițiul 5. *Se consideră* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *unde* $T(\boldsymbol{u}) = T((u_1, u_2)) = (3u_1 + u_2, 2u_1 - 3u_2)$, *pentru orice* $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$.

a) *Demonstrați că* T *este un operator liniar de la* $\mathbb{R}^2$ *la* $\mathbb{R}^2$.

b) *Determinați* $\ker(T)$ *și* $\mathrm{Im}(T)$ *și stabiliți dacă* T *este injectiv/surjectiv/bijectiv.*

COLOCVIU - ALGAD - DIMA

NUMĂRUL 6

Exercițiul 1. *Se consideră următoarele matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ şi } D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) *Calculaţi* $3B + 2C$, $A \cdot C$, $B \cdot A$ *şi* $B \cdot C$.

b) *Calculaţi* $\det(B)$, $\det(C)$ *şi* $\det(D)$.

c) *Stabiliţi dacă matricele* B, C *şi* D *sunt inversabile şi, în caz afirmativ, determinaţi inversa matricei* B.

Exercițiul 2. *Rezolvaţi următoarele sisteme de ecuaţii:*

a) $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x + y - z = 3 \\ x - y + z = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 17 \\ 2x + 7y + 4z = 37 \\ 3x + 11y + 6z = 59 \end{cases}$

Exercițiul 3. *Se consideră punctele* $A(1, 2, 3)$, $B(3, 4, 4)$ *şi* $C(5, 6, 10)$.

a) *Determinaţi coordonatele vectorilor* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ *şi* $\overrightarrow{AC}$.

b) *Determinaţi* $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{BC}\|$ *şi* $\|\overrightarrow{AC}\|$.

c) *Determinaţi* $< \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} >$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ *şi stabiliţi dacă* $AB \perp BC$ *şi dacă* $AB \parallel AC$.

d) *Determinaţi ecuaţiile dreptei* AB.

Exercițiul 4.

a) *Demonstraţi că mulţimea* $\mathcal{B} = \{(1, 1, 2, 3); (3, 4, 9, 8); (2, 5, 14, 6); (1, 8, 24, 0)\}$ *reprezintă o bază în* $\mathbb{R}^4$.

b) *Determinaţi coordonatele vectorului* $\mathbf{v} = (5, 16, 45, 11)$ *în baza* $\mathcal{B}$.

Exercițiul 5. *Se consideră* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *unde* $T(\boldsymbol{u}) = T((u_1, u_2)) = (2u_1 + 3u_2, u_1 - 2u_2)$, *pentru orice* $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$.

a) *Demonstraţi că* T *este un operator liniar de la* $\mathbb{R}^2$ *la* $\mathbb{R}^2$.

b) *Determinaţi* $\ker(T)$ *şi* $\operatorname{Im}(T)$ *şi stabiliţi dacă* T *este injectiv/surjectiv/bijectiv.*