PROBLEME RECAPITULATIVE

Exercițiul 1. *Se consideră următoarele matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ și } D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculați $2B + 3C$, $A \cdot B$, $B \cdot A$ *și* $B \cdot C$.

b) Calculați $\det(B)$, $\det(C)$ *și* $\det(D)$.

c) Stabiliți dacă matricele B, C și D sunt inversabile și, în caz afirmativ, determinați inversa matricei B.

Exercițiul 2. *Rezolvați următoarele sisteme de ecuații:*

a) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 5y + 6z = 13 \\ 3x + 7y + 9z = 20 \end{cases}$

Exercițiul 3. *Se consideră punctele* $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$ *și* $C(4,5,6)$.

a) Determinați coordonatele vectorilor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ *și* $\overrightarrow{AC}$.

b) Determinați $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{BC}\|$ *și* $\|\overrightarrow{AC}\|$.

c) Determinați $< \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} >$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ *și stabiliți dacă* $AB \perp BC$ *și dacă* $AB \parallel AC$.

d) Determinați ecuația dreptei AB.

Exercițiul 4.

a) Demonstrați că mulțimea $\mathcal{B} = \{(2,1,1,1); (1,2,1,1); (1,1,2,1); (1,1,1,2)\}$ *reprezintă o bază în* $\mathbb{R}^4$.

b) Determinați coordonatele vectorului $\mathbf{v} = (7,6,6,6)$ *în baza* $\mathcal{B}$.

Exercițiul 5. *Se consideră* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definit prin* $T(\boldsymbol{u}) = T((u_1, u_2)) = (2u_1 + u_2, u_1 - u_2)$, *pentru orice* $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$.

a) Demonstrați că T este un operator liniar de la $\mathbb{R}^2$ *la* $\mathbb{R}^2$.

b) Determinați $\ker(T)$ *și* $\operatorname{Im}(T)$ *și stabiliți dacă T este injectiv/surjectiv/bijectiv.*

PROBLEME RECAPITULATIVE

Exercițiul 1. *Se consideră următoarele matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ şi } D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculaţi $2B + 3C$, $A \cdot B$, $B \cdot A$ *şi* $B \cdot C$.

b) Calculaţi $\det(B)$, $\det(C)$ *şi* $\det(D)$.

c) Stabiliţi dacă matricele B, C *şi* D *sunt inversabile şi, în caz afirmativ, determinaţi inversa matricei* B.

Rezolvare:

a) Deoarece $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ şi $C \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, putem efectua $(2B + 3C) \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$2B + 3C = 2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3 & 0+6 \\ 2+9 & 4+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 11 & 22 \end{pmatrix}.$$

Deoarece $A \in \mathcal{M}_{1\times 2}(\mathbb{R})$ şi $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, atunci putem efectua $A \cdot B \in \mathcal{M}_{1\times 2}(\mathbb{R})$, însă nu putem efectua $B \cdot A$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 1 & 1\cdot 0 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Deoarece $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ şi $C \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, putem efectua $B \cdot C \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 0\cdot 3 & 2\cdot 2 + 0\cdot 6 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 3 & 1\cdot 2 + 2\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 14 \end{pmatrix}.$$

b) Avem:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 - 1\cdot 0 = 4 - 0 = 4,$$

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot 6 - 2\cdot 3 = 6 - 6 = 0$$

şi

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 2 + 0\cdot 0\cdot 0 - 2\cdot 1\cdot 0 - 1\cdot 0\cdot 2 - 0\cdot 2\cdot 1 = 1 + 8 = 9.$$

c) Deoarece $\det(B) = 4 \neq 0$ şi $\det(D) = 9 \neq 0$, atunci matricele B şi D sunt inversabile. Deoarece $\det(C) = 0$, atunci matricea C nu este inversabilă.

Pentru inversa matricei B, determinăm mai întâi $B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Apoi determinăm matricea adjunctă $B^* = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix}$, unde:

$$\delta_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (+1) \cdot 2 = 2,$$

$$\delta_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 0 = 0,$$

$$\delta_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 = -1,$$

$$\delta_{22} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (+1) \cdot 2 = 2,$$

de unde obţinem

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} B^* = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Exerciţiul 2. *Rezolvaţi următoarele sisteme de ecuaţii:*

a) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 5y + 6z = 13 \\ 3x + 7y + 9z = 20 \end{cases}$

Rezolvare:

a) Vom folosi metoda Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2 \to L_2 - L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1-1 & -1-1 & 1-1 & 2-6 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \to L_3 - L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 1-1 & 1-1 & -1-1 & 0-6 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right).$$

Noul sistem devine:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -2y = -4 \;/ : (-2) \Rightarrow y = 2 \\ -2z = -6 \;/ : (-2) \Rightarrow z = 3. \end{cases}$$

Atunci $x + y + z = 6 \Rightarrow x + 2 + 3 = 6 \Rightarrow x = 1$. Prin urmare, soluţia sistemului este $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

b) Vom folosi metoda Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 13 \\ 3 & 7 & 9 & 20 \end{array}\right) \underset{L_2 \to L_2 - 2\cdot L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2-2\cdot 1 & 5-2\cdot 2 & 6-2\cdot 3 & 13-2\cdot 6 \\ 3 & 7 & 9 & 20 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 9 & 20 \end{array}\right) \underset{L_3 \to L_3 - 3\cdot L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3-3\cdot 1 & 7-3\cdot 2 & 9-3\cdot 3 & 20-3\cdot 6 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \underset{L_3 \to L_3 - L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0-0 & 1-1 & 0-0 & 2-1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Noul sistem devine:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ y = 1 \\ 0 = 1. \end{cases}$$

Din ultima relaţie, obţinem că sistemul este incompatibil.

Exerciţiul 3. *Se consideră punctele* $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$ *şi* $C(4,5,6)$.

a) *Determinaţi coordonatele vectorilor* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ *şi* $\overrightarrow{AC}$.

b) *Determinaţi* $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{BC}\|$ *şi* $\|\overrightarrow{AC}\|$.

c) *Determinaţi* $< \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} >$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ *şi stabiliţi dacă* $AB \perp BC$ *şi dacă* $AB \parallel AC$.

d) *Determinaţi ecuaţiile dreptei* AB.

Rezolvare:

a) Avem:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (2-1, 3-1, 4-1) = (1,2,3), \\ \overrightarrow{BC} &= (x_C - x_B, y_C - y_B, z_C - z_B) = (4-2, 5-3, 6-4) = (2,2,2), \\ \overrightarrow{AC} &= (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A) = (4-1, 5-1, 6-1) = (3,4,5). \end{aligned}$$

b) Apoi:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{AB}\| &= \|(1,2,3)\| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}, \\ \|\overrightarrow{BC}\| &= \|(2,2,2)\| = \sqrt{2^2+2^2+2^2} = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \\ \|\overrightarrow{AC}\| &= \|(3,4,5)\| = \sqrt{3^2+4^2+5^2} = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}. \end{aligned}$$

c)

$$< \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} > = < (1,2,3); (2,2,2) > = 1\cdot 2 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2 = 2+4+6 = 12.$$

Deoarece $<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}>= 12 \neq 0 \Rightarrow \sphericalangle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}) \neq 90^\circ$. Prin urmare, dreptele AB şi BC nu sunt perpendiculare.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}\overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\overrightarrow{k} \\ &= (2\cdot 5 - 4\cdot 3)\overrightarrow{i} - (1\cdot 5 - 3\cdot 3)\overrightarrow{j} + (1\cdot 4 - 3\cdot 2)\overrightarrow{k} \\ &= -2\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k} = (-2,4,-2).\end{aligned}$$

Deoarece $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = (-2,4,-2) \neq (0,0,0)$, atunci dreptele AB şi AC nu sunt paralele. Puteam observa că dreptele AB şi AC nu sunt paralele şi din faptul că nu există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AC}$ (cu alte cuvinte, coordonatele vectorilor $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ nu sunt proporţionale).

d) Avem:

$$(AB): \ \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}.$$

Cum $A(1,1,1)$ şi $B(2,3,4)$, avem:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{3-1} = \frac{z-1}{4-1} = t \Rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3} = t$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x - 1 = t \\ y - 1 = 2t \\ z - 1 = 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t+1 \\ z = 3t+1, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exerciţiul 4.

a) *Demonstraţi că mulţimea* $\mathcal{B} = \{(2,1,1,1);(1,2,1,1);(1,1,2,1);(1,1,1,2)\}$ *reprezintă o bază în* $\mathbb{R}^4$.

b) *Determinaţi coordonatele vectorului* $\mathbf{v} = (7,6,6,6)$ *în baza* $\mathcal{B}$.

Rezolvare:

a) Pentru a demonstra că $\mathcal{B}$ este o bază în $\mathbb{R}^4$, vom folosi următoarea caracterizare:

$$\mathcal{B} \text{ bază în } \mathbb{R}^4 \Leftrightarrow \begin{cases} (1)\ \operatorname{card}(\mathcal{B}) = \dim\left(\mathbb{R}^4\right) = 4, \\ (2)\ \mathcal{B} \text{ este sistem liniar independent.} \end{cases}$$

Condiţia (1) este verificată, deoarece $\mathcal{B}$ are 4 vectori, iar $\mathbb{R}^4$ are dimensiunea egală cu 4.

Pentru a verifica condiţia (2), rămâne să demonstrăm că vectorii:

$$\mathbf{u}_1 = (2,1,1,1),\ \mathbf{u}_2 = (1,2,1,1),\ \mathbf{u}_3 = (1,1,2,1) \text{ şi } \mathbf{u}_4 = (1,1,1,2)$$

sunt liniar independenţi. Cu alte cuvinte, dorim să demonstrăm că dacă $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4 \in \mathbb{R}$ sunt scalari astfel încât

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 + \lambda_4\mathbf{u}_4 = \mathbf{o} = (0,0,0,0) \tag{1}$$

atunci $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

Fie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ astfel încât are loc (1). Atunci:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(2,1,1,1) + \lambda_2(1,2,1,1) + \lambda_3(1,1,2,1) + \lambda_4(1,1,1,2) = (0,0,0,0)\\
&(2\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_1) + (\lambda_2, 2\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2) + (\lambda_3, \lambda_3, 2\lambda_3, \lambda_3) + (\lambda_4, \lambda_4, \lambda_4, 2\lambda_4) = (0,0,0,0)\\
&(2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4, \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4, \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4) = (0,0,0,0).
\end{aligned}$$

Obţinem astfel sistemul

$$\begin{cases}
2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0\\
\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0\\
\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0\\
\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0.
\end{cases}$$

Vom folosi metoda Gauss. Matricea extinsă asociată sistemului devine:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2 \to 2\cdot L_2 - L_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 2\cdot 1 - 2 & 2\cdot 2 - 1 & 2\cdot 1 - 1 & 2\cdot 1 - 1 & 2\cdot 0 - 0\\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \to 2\cdot L_3 - L_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0\\ 2\cdot 1 - 2 & 2\cdot 1 - 1 & 2\cdot 2 - 1 & 2\cdot 1 - 1 & 2\cdot 0 - 0\\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{L_4 \to 2\cdot L_4 - L_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0\\ 2\cdot 1 - 2 & 2\cdot 1 - 1 & 2\cdot 1 - 1 & 2\cdot 2 - 1 & 2\cdot 0 - 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \to 3\cdot L_3 - L_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0\\ 3\cdot 0 - 0 & 3\cdot 1 - 3 & 3\cdot 3 - 1 & 3\cdot 1 - 1 & 3\cdot 0 - 0\\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 8 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{L_4 \to 3\cdot L_4 - L_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 8 & 2 & 0\\ 3\cdot 0 - 0 & 3\cdot 1 - 3 & 3\cdot 1 - 1 & 3\cdot 3 - 1 & 3\cdot 0 - 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 8 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 8 & 0 \end{array}\right) \underset{L_4 \to 4\cdot L_4 - L_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 8 & 2 & 0\\ 4\cdot 0 - 0 & 4\cdot 0 - 0 & 4\cdot 2 - 8 & 4\cdot 8 - 2 & 4\cdot 0 - 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 8 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 30 & 0 \end{array}\right).$$

Noul sistem devine:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 8\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ 30\lambda_4 = 0. \end{cases}$$

Din ultima relaţie obţinem $\lambda_4 = 0$, apoi înlocuind, treptat, în celelalte relaţii, găsim:

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 + \lambda_4\mathbf{u}_4 = (0,0,0,0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0,$$

de unde obţinem că vectorii $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ şi $\mathbf{u}_4$ sunt liniar independenţi.

b) Pentru a determina coordonatele vectorului $\mathbf{v}$ în baza $\mathcal{B}$, trebuie să determinăm $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3 + \alpha_4\mathbf{u}_4.$$

Înlocuind valorile pentru vectorii $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ şi $\mathbf{u}_4$, obţinem sistemul:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 7 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 6 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = 6 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 6. \end{cases}$$

Vom folosi metoda Gauss. Matricea extinsă asociată sistemului devine:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \underset{L_2 \to 2\cdot L_2 - L_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 2\cdot 1 - 2 & 2\cdot 2 - 1 & 2\cdot 1 - 1 & 2\cdot 1 - 1 & 2\cdot 6 - 7 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \underset{L_3 \to 2\cdot L_3 - L_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 2\cdot 1 - 2 & 2\cdot 1 - 1 & 2\cdot 2 - 1 & 2\cdot 1 - 1 & 2\cdot 6 - 7 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \underset{L_4 \to 2\cdot L_4 - L_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2\cdot 1 - 2 & 2\cdot 1 - 1 & 2\cdot 1 - 1 & 2\cdot 2 - 1 & 2\cdot 6 - 7 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \underset{L_3 \to 3\cdot L_3 - L_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 3\cdot 0 - 0 & 3\cdot 1 - 3 & 3\cdot 3 - 1 & 3\cdot 1 - 1 & 3\cdot 5 - 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \underset{L_4 \to 3 \cdot L_4 - L_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & 10 \\ 3 \cdot 0 - 0 & 3 \cdot 1 - 3 & 3 \cdot 1 - 1 & 3 \cdot 3 - 1 & 3 \cdot 5 - 5 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 10 \end{array}\right) \underset{L_4 \to 4 \cdot L_4 - L_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & 10 \\ 4 \cdot 0 - 0 & 4 \cdot 0 - 0 & 4 \cdot 2 - 8 & 4 \cdot 8 - 2 & 4 \cdot 10 - 10 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 30 \end{array}\right).$$

Noul sistem devine:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 7 \\ 3\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 5 \\ 8\alpha_3 + 2\alpha_4 = 10 \\ 30\alpha_4 = 30. \end{cases}$$

Din ultima relaţie obţinem $\lambda_4 = 1$, apoi $8\alpha_3 + 2\alpha_4 = 10 \Rightarrow 8\alpha_3 = 8 \Rightarrow \alpha_3 = 1$. Din a doua relaţie, obţinem $3\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 5 \Rightarrow 3\alpha_2 = 3 \Rightarrow \alpha_2 = 1$. Atunci din prima relaţie obţinem $2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 7 \Rightarrow 2\alpha_1 + 3 = 7 \Rightarrow 2\alpha_1 = 4 \Rightarrow \alpha_1$. Prin urmare, avem:

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4.$$

Exerciţiul 5. *Se consideră $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definit prin $T(\boldsymbol{u}) = T((u_1, u_2)) = (2u_1 + u_2, u_1 - u_2)$, pentru orice $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$.*

a) Demonstraţi că T este un operator liniar de la $\mathbb{R}^2$ la $\mathbb{R}^2$.

b) Determinaţi $\ker(T)$ şi $\operatorname{Im}(T)$ şi stabiliţi dacă T este injectiv/surjectiv/bijectiv.

Rezolvare:

a) T este operator liniar dacă $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ şi $T(\alpha\mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$, pentru orice $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}$ şi orice $\alpha \in \mathbb{R}$.

Fie $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ şi $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ din $\mathbb{R}^2$. Avem:

$$\begin{cases} T(\mathbf{u}) = T((u_1, u_2)) = (2u_1 + u_2, u_1 - u_2) \\ T(\mathbf{v}) = T((v_1, v_2)) = (2v_1 + v_2, v_1 - v_2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = (2u_1 + u_2, u_1 - u_2) + (2v_1 + v_2, v_1 - v_2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = (2u_1 + u_2 + 2v_1 + v_2, u_1 - u_2 + v_1 - v_2) \ (1).$$

În acelaşi timp, avem:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= T((u_1, u_2) + (v_1, v_2)) = T((u_1 + v_1, u_2 + v_2)) \\ &= (2(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2), (u_1 + v_1) - (u_2 + v_2)) \\ T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= (2u_1 + 2v_1 + u_2 + v_2, u_1 + v_1 - u_2 - v_2) \ (2). \end{aligned}$$

Comparând relaţiile (1) şi (2), obţinem că $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$, pentru orice $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$.

Fie acum $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci:

$$\begin{aligned} T(\alpha\mathbf{u}) &= T\big(\alpha(u_1, u_2)\big) = T((\alpha u_1, \alpha u_2)) \\ &= (2 \cdot \alpha u_1 + \alpha u_2, \alpha u_1 - \alpha u_2) \\ &= \big(\alpha(2u_1 + u_2), \alpha(u_1 - u_2)\big) \\ T(\alpha\mathbf{u}) &= \alpha(2u_1 + u_2, u_1 - u_2) = \alpha T(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Obţinem astfel că $T(\alpha\mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$.

Prin urmare, T este un operator liniar de la $\mathbb{R}^2$ la $\mathbb{R}^2$.

b) Avem $\ker(T) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \mid T(\mathbf{u}) = (0,0)\}$.

Fie $\mathbf{u} \in \ker(T) \Rightarrow T(\mathbf{u}) = (0,0) \Rightarrow T((u_1, u_2)) = (0,0) \Rightarrow (2u_1 + u_2, u_1 - u_2) = (0,0)$. Egalitatea de vectori implică sistemul:

$$\begin{cases} 2u_1 + u_2 = 0 \\ u_1 - u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 \end{cases} \Rightarrow 2u_1 + u_1 = 0 \Rightarrow 3u_1 = 0 \Rightarrow u_1 = 0 \Rightarrow u_2 = 0.$$

Prin urmare, $\mathbf{u} \in \ker(T) \Rightarrow \mathbf{u} = (0,0)$. Obţinem astfel că $\ker(T) = \{(0,0)\}$. Acest lucru implică faptul că operatorul T este injectiv.

Deoarece $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, atunci $\mathrm{Im}(T)$ este un subspaţiu liniar al lui $\mathbb{R}^2$. Cum $\ker(T) = \{(0,0)\}$, atunci $\dim(\ker(T)) = 0$, de unde obţinem că $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$.

Însă cum $\mathrm{Im}(T)$ este un subspaţiu liniar de dimensiune 2 a spaţiului liniar $\mathbb{R}^2$, obţinem că $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$, de unde obţinem că T este surjectiv. Cum am demonstrat că T este şi injectiv, atunci T este bijectiv (cu alte cuvinte, un izomorfism).