EXAMEN - AM2

Exerciţiul 1. *Să se calculeze:*

$$\int 3x^2 + x \cdot e^x + \frac{4x^3}{x^4+1}\, dx.$$

Rezolvare: Avem: $\int 3x^2 \, \mathrm{d}x = x^3 + \mathcal{C}$. Pentru al doilea membru al integralei, vom aplica metoda integrării prin părţi, folosindu-ne de formula

$$\int f'(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x.$$

În cazul nostru, vom considera $f'(x) = e^x$ şi $g(x) = x$. Obţinem astfel:

$$\int x \cdot e^x \, \mathrm{d}x = x \cdot e^x - \int e^x \, \mathrm{d}x = x \cdot e^x - e^x + \mathcal{C} = e^x \cdot (x-1) + \mathcal{C}.$$

Pentru ultimul termen al integralei nedefinite, vom efectua o schimbare de variabilă: fie $t = x^4 + 1$. Atunci $\mathrm{d}t = 4x^3 \, \mathrm{d}x$, de unde obţinem

$$\int \frac{4x^3}{x^4+1} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t = \ln t + \mathcal{C} = \ln(x^4+1) + \mathcal{C}.$$

Prin urmare, avem:

$$\int 3x^2 + x \cdot e^x + \frac{4x^3}{x^4+1} \, \mathrm{d}x = x^3 + e^x \cdot (x-1) + \ln(x^4+1) + \mathcal{C}.$$

Exerciţiul 2. *Să se studieze convergenţa integralei improprii:*

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^7}}{1+2x^4}\, dx.$$

Rezolvare: Observăm că avem o integrală improprie de primul tip. Vom folosi următorul criteriu de convergenţă:

Teoremă. Fie $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât $f \geq 0$ pe $[a, \infty)$. Atunci:

1. *Dacă $\exists\ \alpha > 1$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x) < \infty$, atunci $\int_a^\infty f(x)\, dx$ este convergentă.*
2. *Dacă $\exists\ \alpha \leq 1$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x) > 0$, atunci $\int_a^\infty f(x)\, dx$ este divergentă.*

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci:

$$L := \lim_{x\to\infty} x^\alpha \cdot \frac{\sqrt{x^7}}{1+2x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha \cdot x^{7/2}}{1+2x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha+7/2}}{1+2x^4}.$$

Dacă:

a) $\alpha + \dfrac{7}{2} < 4$, atunci $\alpha < \dfrac{1}{2}$ şi:

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha+7/2}}{1+2x^4} \overset{\alpha+7/2<4}{=} 0.$$

b) $\alpha + \dfrac{7}{2} = 4$, atunci $\alpha = \dfrac{1}{2}$ şi:

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha+7/2}}{1+2x^4} \overset{\alpha+7/2=4}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{1+2x^4} = \frac{1}{2}.$$

c) $\alpha + \dfrac{7}{2} > 4$, atunci $\alpha > \dfrac{1}{2}$ şi:

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha+7/2}}{1+2x^4} \overset{\alpha+7/2>4}{=} +\infty.$$

Prin urmare, $\exists\ \alpha = \dfrac{1}{2} \leq 1$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha} \cdot \dfrac{\sqrt{x^7}}{1+2x^4} = \dfrac{1}{2} > 0$, de unde ne rezultă că

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^7}}{1+2x^4}\,\mathrm{d}x \text{ este divergentă.}$$

Exerciţiul 3. *Să se calculeze integralele curbilinii:*

$$\int_C \frac{y^2}{x}\,dx + xy\,dy \quad \text{şi} \quad \int_C y\,ds,$$

unde $(C):\ x = 2y^2,\ y \in [0,1]$.

Rezolvare: Cum $(C):\ x = 2y^2,\ y \in [0,1]$, atunci o parametrizare a curbei C este:

$$\begin{cases} x = x(t) = 2t^2, \\ y = y(t) = t, \end{cases} \quad t \in [0,1] \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = 4t, \\ y'(t) = 1. \end{cases}$$

Vom folosi următoarele formule de calcul a integralelor curbilinii de primul şi al doilea tip:

$$\int_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \Big(P(x(t),y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t),y(t)) \cdot y'(t) \Big)\,\mathrm{d}t$$

şi

$$\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x(t),y(t)) \cdot \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t,$$

unde parametrizarea curbei C este $x = x(t)$, $y = y(t)$ şi $t \in [a,b]$.

În cazul nostru, avem:

$$\int_C \frac{y^2}{x}\, dx + xy\, dy = \int_0^1 \left(\frac{y^2(t)}{x(t)} \cdot x'(t) + x(t) \cdot y(t) \cdot y'(t) \right) dt$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{t^2}{2t^2} \cdot 4t + 2t^2 \cdot t \cdot 1 \right) dt = \int_0^1 \left(2t + 2t^3\right) dt$$
$$= 2 \cdot \frac{t^2}{2}\bigg|_{t=0}^{t=1} + 2 \cdot \frac{t^4}{4}\bigg|_{t=0}^{t=1}$$
$$= \left(2 \cdot \frac{1^2}{2} - 2 \cdot \frac{0^2}{2}\right) + \left(2 \cdot \frac{1^4}{4} - 2 \cdot \frac{0^4}{4}\right)$$
$$= (1-0) + \left(\frac{1}{2} - 0\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

şi

$$\int_C y\, ds = \int_0^1 y(t) \cdot \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt$$
$$= \int_0^1 t \cdot \sqrt{(4t)^2 + 1^2}\, dt$$
$$= \int_0^1 t\sqrt{16t^2 + 1}\, dt.$$

Vom efectua următoarea schimbare de variabilă: $u = 16t^2 + 1$. Atunci $du = 32t\, dt$,

t	0	1
$u = 16t^2 + 1$	$16 \cdot 0^2 + 1 = 1$	$16 \cdot 1^2 + 1 = 17$

şi

$$\int_C y\, ds = \frac{1}{32} \int_0^1 \sqrt{16t^2 + 1} \cdot 32t\, dt = \frac{1}{32} \int_1^{17} \sqrt{u}\, du = \frac{1}{32} \int_1^{17} u^{1/2}\, du$$
$$= \frac{1}{32} \cdot \frac{u^{1/2+1}}{1/2+1}\bigg|_{u=1}^{u=17} = \frac{1}{32} \cdot \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\bigg|_{u=1}^{u=17} = \frac{1}{32} \cdot \frac{2\sqrt{u^3}}{3}\bigg|_{u=1}^{u=17}$$
$$= \frac{\sqrt{u^3}}{48}\bigg|_{u=1}^{u=17} = \frac{\sqrt{17^3}}{48} - \frac{\sqrt{1^3}}{48} = \frac{\sqrt{17^3} - 1}{48} = \frac{17\sqrt{17} - 1}{48}.$$

Exerciţiul 4. *Să se calculeze integrala dublă:*

$$\iint_D x^2 \cdot y\, dxdy,$$

unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2x\}$.

Rezolvare: Vom folosi următoarea formulă de integrare:

Teoremă. Fie f o funcţie integrabilă pe domeniul D simplu în raport cu Oy astfel încât pentru orice $x \in [a,b]$ există integrala $F(x) = \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy$. Atunci există şi integrala $\int\limits_a^b F(x)\,dx$ şi avem:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x.$$

În cazul nostru, avem $a = 1$, $b = 2$, $g_1(x) = 0$ şi $g_2(x) = 2x$, pentru orice $x \in [1,2]$. Atunci:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D x^2 \cdot y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int\limits_1^2 \left[\int\limits_0^{2x} x^2 \cdot y\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left[x^2 \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=2x}\right] \mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left[x^2 \cdot \frac{(2x)^2}{2} - x^2 \cdot \frac{0^2}{2}\right] \mathrm{d}x \\
&= \int\limits_1^2 x^2 \cdot \frac{4x^2}{2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 x^2 \cdot 2x^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 2x^4\,\mathrm{d}x \\
&= 2 \cdot \frac{x^5}{5}\Big|_{x=1}^{x=2} = 2 \cdot \frac{2^5}{5} - 2 \cdot \frac{1^5}{5} = \frac{64}{5} - \frac{2}{5} = \frac{62}{5}.
\end{aligned}$$

Exerciţiul 5. *Să se calculeze integrala de suprafaţă:*

$$\iint\limits_S z\,dS,$$

unde $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$.

Rezolvare: Deoarece S este dată de $x^2 + y^2 + z^2 = 4 = 2^2$, obţinem că S este o submulţime a sferei de rază 2, centrată în origine. Deoarece x, y şi z sunt pozitive, obţinem parametrizarea:

$$\begin{cases} x = x(u,v) = 2\cos u \cos v, \\ y = y(u,v) = 2\cos u \sin v, \\ z = z(u,v) = 2\sin u, \end{cases} \quad \text{unde } u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ v \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Prin urmare, avem:

$$\overrightarrow{r}(u,v) = \big(2\cos u \cos v, 2\cos u \sin v, 2\sin u\big),$$

de unde obţinem:

$$\begin{cases} \overrightarrow{r_u}(u,v) = \dfrac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u}(u,v) = \big(-2\sin u \cos v, -2\sin u \sin v, 2\cos u\big) \\ \text{şi} \\ \overrightarrow{r_v}(u,v) = \dfrac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}(u,v) = \big(-2\cos u \sin v, 2\cos u \cos v, 0\big). \end{cases}$$

Atunci, folosindu-ne de formulele

$$\begin{cases} E(u,v) = \left\| \overrightarrow{r_u}(u,v) \right\|^2 \\ F(u,v) = \overrightarrow{r_u}(u,v) \cdot \overrightarrow{r_v}(u,v) = < \overrightarrow{r_u}(u,v), \overrightarrow{r_v}(u,v) > \\ G(u,v) = \left\| \overrightarrow{r_v}(u,v) \right\|^2 \end{cases}$$

obţinem:

$$\begin{aligned} E(u,v) &= \left\| (-2\sin u \cos v, -2\sin u \sin v, 2\cos u) \right\|^2 = (-2\sin u \cos v)^2 + (-2\sin u \sin v)^2 + (2\cos u)^2 \\ &= 4\sin^2 u \cos^2 v + 4\sin^2 u \sin^2 v + 4\cos^2 u = 4\sin^2 u \big(\cos^2 v + \sin^2 v\big) + 4\cos^2 u \\ &= 4\sin^2 u \cdot 1 + 4\cos^2 u = 4\sin^2 u + 4\cos^2 u = 4 \cdot \big(\sin^2 u + \cos^2 u\big) = 4, \end{aligned}$$

apoi

$$\begin{aligned} F(u,v) &= (-2\sin u \cos v, -2\sin u \sin v, 2\cos u) \cdot (-2\cos u \sin v, 2\cos u \cos v, 0) \\ &= (-2\sin u \cos v) \cdot (-2\cos u \sin v) + (-2\sin u \sin v) \cdot (2\cos u \cos v) + 2\cos u \cdot 0 \\ &= 4\sin u \cos u \sin v \cos v - 4\sin u \cos u \sin v \cos v + 0 = 0 \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned} G(u,v) &= \left\| (-2\cos u \sin v, 2\cos u \cos v, 0) \right\|^2 = (-2\cos u \sin v)^2 + (2\cos u \cos v)^2 + 0^2 \\ &= 4\cos^2 u \sin^2 v + 4\cos^2 u \cos^2 v = 4\cos^2 u \cdot \big(\sin^2 v + \cos^2 v\big) = 4\cos^2 u \cdot 1 = 4\cos^2 u. \end{aligned}$$

Ne vom folosi apoi de următoarea formulă: *dacă suprafaţa S este descrisă de parametrizarea $\overrightarrow{r}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$, cu $u \in [a,b]$ şi $v \in [c,d]$, atunci*

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \sqrt{E(u,v) \cdot G(u,v) - F^2(u,v)}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u.$$

În cazul nostru, obţinem:

$$\begin{aligned} \iint\limits_S z\,\mathrm{d}S &= \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{\pi/2} z(u,v) \cdot \sqrt{E(u,v) \cdot G(u,v) - F^2(u,v)}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \\ &= \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{\pi/2} 2\sin u \cdot \sqrt{4 \cdot 4\cos^2 u - 0^2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{\pi/2} 2\sin u \cdot \sqrt{16\cos^2 u}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \\ &= \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{\pi/2} 2\sin u \cdot 4 \cdot |\cos u|\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Deoarece $u \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, atunci avem $\cos u > 0$, de unde obţinem $|\cos u| = \cos u$. Obţinem astfel:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_S z \, \mathrm{d}S &= \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{\pi/2} 8 \sin u \cos u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u \\
&= \int\limits_0^{\pi/2} \left(8 \sin u \cos u \cdot v\right)\Big|_{v=0}^{v=\pi/2} \mathrm{d}u \\
&= \int\limits_0^{\pi/2} \left(8 \sin u \cos u \cdot \frac{\pi}{2} - 8 \sin u \cos u \cdot 0\right) \mathrm{d}u \\
&= \int\limits_0^{\pi/2} 4\pi \cdot \sin u \cos u \, \mathrm{d}u = 4\pi \int\limits_0^{\pi/2} \sin u \cos u \, \mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Vom efectua schimbarea de variabilă $t = \sin u$, de unde obţinem $\mathrm{d}t = \cos u \, \mathrm{d}u$,

u	0	$\pi/2$
$t = \sin u$	$\sin 0 = 0$	$\sin\left(\pi/2\right) = 1$

şi

$$\int\limits_S z \, \mathrm{d}S = 4\pi \int\limits_0^1 t \, \mathrm{d}t = 4\pi \cdot \frac{t^2}{2}\Big|_{t=0}^{t=1} = 4\pi \cdot \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = 4\pi \cdot \frac{1}{2} = 2\pi.$$