Nume şi prenume: ______________________________

Grupa: ________________

ANALIZĂ MATEMATICĂ I
MODEL DE EXAMEN

(10p) 1. Să se calculeze: **a)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^7 + 4n^3 + 3n^4 + 23}{4n^4 + 3n^3 - n^7 + 1}$; **b)** $\lim\limits_{x\nearrow 3} \dfrac{4-x}{3-x}$.

(10p) 2. Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n+3}{4n+5}\right)^{2n}$.

(10p) 3. Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(3x)}{7x^2}$.

(10p) 4. Să se studieze natura seriei: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3n^2+4n+7}{7n^2+3n+4}\right)^{5n}$.

(10p) 5. Să se calculeze derivata de ordinul întâi a funcţiei $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}^4$ definită prin:

$$f(t) = \left(3t^2 + 7t + \sin t,\ \frac{5t+1}{3t+1},\ t^2\cos t,\ \ln\left(t^2 + 2^t\right)\right),\ \forall t > 1.$$

(10p) 6. Să se calculeze: **a)** $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}$; **b)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}$.

7. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y) = x^3 + y^2 - 12x^2 + 9x - 4y + 1,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(10p) a) Calculaţi derivatele parţiale de ordinul întâi şi gradientul funcţiei f.

(10p) b) Calculaţi derivatele parţiale de ordinul al doilea şi Hessiana funcţiei f.

(10p) c) Stabiliţi dacă funcţia f admite puncte de extrem.

ANALIZĂ MATEMATICĂ I
MODEL DE EXAMEN REZOLVAT

(10p) 1. Să se calculeze: **a)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^7+4n^3+3n^4+23}{4n^4+3n^3-n^7+1}$; **b)** $\lim\limits_{x\nearrow 3} \dfrac{4-x}{3-x}$.

Rezolvare:

a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^7+4n^3+3n^4+23}{4n^4+3n^3-n^7+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^7\left(3+\frac{4}{n^4}+\frac{3}{n^3}+\frac{23}{n^7}\right)}{n^7\left(\frac{4}{n^3}+\frac{3}{n^4}-1+\frac{1}{n^7}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{4}{n^4}+\frac{3}{n^3}+\frac{23}{n^7}}{\frac{4}{n^3}+\frac{3}{n^4}-1+\frac{1}{n^7}}$$
$$= \left[\frac{3+0+0+0}{0+0-1+0}\right] = -3.$$

$\square$

b)

$$\lim_{x\nearrow 3} \frac{4-x}{3-x} = \left[\frac{4-3}{0_-}\right] = \left[\frac{1}{0_-}\right] = -\infty.$$

$\square$

(10p) 2. Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n+3}{4n+5}\right)^{2n}$.

Rezolvare:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n+3}{4n+5}\right)^{2n} = \left[\left(\frac{4}{4}\right)^{\infty}\right] = [1^\infty].$$

Vom folosi limita fundamentală $\lim\limits_{x_n\to 0} (1+x_n)^{1/x_n} = e$:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n+3}{4n+5}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{4n+3}{4n+5}-1\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{4n+3}{4n+5}-\frac{4n+5}{4n+5}\right)^{2n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{(4n+3)-(4n+5)}{4n+5}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{4n+3-4n-5}{4n+5}\right)^{2n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-2}{4n+5}\right)^{2n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{-2}{4n+5}\right)^{\frac{4n+5}{-2}}\right]^{\frac{-2}{4n+5}\cdot 2n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{-4n}{4n+5}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$\square$

(10p) 3. Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(3x)}{7x^2}$.

Rezolvare:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(3x)}{7x} = \left[\frac{1-\cos(3\cdot 0)}{7\cdot 0}\right] = \left[\frac{1-\cos(0)}{0}\right] = \left[\frac{1-1}{0}\right] = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Vom aplica regulile lui L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(3x)}{7x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\left(1-\cos(3x)\right)'}{\left(7x\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{3\sin(3x)}{14x}.$$

Vom folosi acum limita fundamentală $\lim\limits_{x_n\to 0} \dfrac{\sin(x_n)}{x_n} = 1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(3x)}{7x^2} = \lim_{x\to 0} 3\cdot \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot \frac{3x}{14x} = 3\cdot 1\cdot \frac{3}{14} = \frac{9}{14}.$$

$\square$

(10p) 4. Să se studieze natura seriei: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+4n+7}{7n^2+3n+4}\right)^{5n}$.

Rezolvare:

Vom aplica criteriul rădăcinii:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n^2+4n+7}{7n^2+3n+4}\right)^{5n}} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2+4n+7}{7n^2+3n+4}\right)^{\frac{5n}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2+4n+7}{7n^2+3n+4}\right)^{5}.\end{aligned}$$

Cum

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+4n+7}{7n^2+3n+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(3+\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}\right)}{n^2\left(7+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}}{3+\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}} = \frac{4}{3},$$

obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n^2+4n+7}{7n^2+3n+4}\right)^{5n}} = \frac{4}{3} > 1.$$

Prin urmare, seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+4n+7}{7n^2+3n+4}\right)^{5n}$ este divergentă.

$\square$

(10p) 5. Să se calculeze derivata de ordinul întâi a funcţiei $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}^4$ definită prin:

$$f(t)=\left(3t^2+7t+\sin t,\ \frac{5t+1}{3t+1},\ t^2\cos t,\ \ln\left(t^2+2^t\right)\right),\ \forall t>1.$$

Rezolvare: Vom scrie $f(t)=\big(f_1(t),f_2(t),f_3(t),f_4(t)\big)$, pentru orice $t\in(1,+\infty)$, unde funcţiile $f_1,f_2,f_3,f_4:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ sunt definite astfel:

- $f_1(t)=3t^2+7t+\sin t;$
- $f_2(t)=\dfrac{5t+1}{3t+1};$
- $f_3(t)=t^2\cos t;$
- $f_4(t)=\ln\left(t^2+2^t\right).$

Observăm că funcţiile f_1, f_2, f_3 şi f_4 sunt derivabile şi:

- $f_1'(t)=\left(3t^2+7t+\sin t\right)'=3\cdot 2t+7\cdot 1+\cos t=6t+7+\cos(t),$
- $$f_2'(t)=\left(\frac{5t+1}{3t+1}\right)'=\frac{(5t+1)'\cdot(3t+1)-(5t+1)\cdot(3t+1)'}{(3t+1)^2}=\frac{5(3t+1)-3(5t+1)}{(3t+1)^2}$$
  $$=\frac{15t+5-15t-3}{(3t+1)^2}=\frac{2}{(3t+1)^2},$$
- $$f_3'(t)=\left(t^2\cdot\cos(t)\right)'=\left(t^2\right)'\cdot\cos(t)+t^2\cdot\big(\cos(t)\big)'$$
  $$=2t\cdot\cos(t)+t^2\cdot\big(-\sin(t)\big)=2t\cos(t)-t^2\sin(t)$$

şi

- $$f_4(t)=\left(\ln(t^2+2^t)\right)'=\frac{1}{t^2+2^t}\cdot\left(t^2+2^t\right)'=\frac{1}{t^2+2^t}\cdot(2t+2^t\cdot\ln(2))=\frac{2t+2^t\cdot\ln(2)}{t^2+2^t}.$$

Prin urmare, avem:

$$f'(t)=\left(6t+7+\cos(t),\frac{2}{(3t+1)^2},2t\cos(t)-t^2\sin(t),\frac{2t+2^t\cdot\ln(2)}{t^2+2^t}\right),\ \forall t\in(1,+\infty).$$

(10p) 6. Să se calculeze: **a)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{2x^2y}{x^2+y^2}$; **b)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2y}{x^2+y^2}$.

Rezolvare:

a)

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{2x^2y}{x^2+y^2}=\left[\frac{2\cdot 1^2\cdot 2}{1^2+2^2}\right]=\frac{4}{5}.$$

b)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2y}{x^2+y^2}=\left[\frac{2\cdot 0^2\cdot 0}{0^2+0^2}\right]=\left[\frac{0}{0}\right]$$

Observăm însă că

$$\frac{2x^2y}{x^2+y^2}=x\cdot\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

şi

$$-1 \leq \frac{2xy}{x^2+y^2} \leq 1,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Prin urmare, avem:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \frac{2xy}{x^2+y^2} = \big[0 \cdot (\text{mărginit})\big] = 0.$$

$\square$

7. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y) = x^3 + y^2 - 12x^2 + 45x - 4y + 1,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(10p) a) Calculaţi derivatele parţiale de ordinul întâi şi gradientul funcţiei f.

(10p) b) Calculaţi derivatele parţiale de ordinul al doilea şi Hessiana funcţiei f.

(10p) c) Stabiliţi dacă funcţia f admite puncte de extrem.

Rezolvare:

a) Vom calcula derivatele parţiale de ordinul I:

- $$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\big(x^3 + y^2 - 12x^2 + 45x - 4y + 1\big)\\ &= 3x^2 + 0 - 12 \cdot 2x + 45 - 0 + 0\\ &= 3x^2 - 24x + 45,\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\big(x^3 + y^2 - 12x^2 + 45x - 4y + 1\big)\\ &= 0 + 2y - 0 + 0 - 4 + 0\\ &= 2y - 4.\end{aligned}$$

Atunci:

$$\nabla f(x,y) = \big(3x^2 - 24x + 45, 2y - 4\big).$$

$\square$

b) Vom determina derivatele parţiale de ordinul al II-lea:

- $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\big(3x^2 - 24x + 45\big) = 3 \cdot 2x - 24 + 0 = 6x - 24,$$
- $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\big(2y - 4\big) = 0 - 0 = 0,$$
- $$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\big(3x^2 - 24x + 45\big) = 0 - 0 + 0 = 0,$$
- $$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\big(2y - 4\big) = 2 - 0 = 2.$$

Prin urmare, Hessiana funcţiei f este:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x - 24 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

$\square$

c) Pentru a determina punctele critice, vom studia ecuaţia

$$\nabla f(x_0, y_0) = (0,0,0),$$

adică

$$\begin{cases} 3x_0^2 - 24x_0 + 45 = 0 \\ \\ 2y_0 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0^2 - 8x_0 + 15 = 0 \\ \\ y_0 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 \in \{3,5\} \\ \\ y_0 = 2. \end{cases}$$

Prin urmare, avem două puncte critice: $(3,2)$ şi $(5,2)$. Vom determina matricea Hessiană în fiecare dintre aceste puncte şi vom aplica metoda Jacobi (în cazul în care acest lucru este posibil):

• Pentru punctul critic $(3,2)$: $H_f(3,2) = \begin{pmatrix} 6 \cdot 3 - 24 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, de unde: $\Delta_1 = -6 < 0$ şi $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 < 0$. Prin urmare, punctul $(3,2) \neq$ punct de extrem (este punct şa).

• Pentru punctul critic $(5,2)$: $H_f(5,2) = \begin{pmatrix} 6 \cdot 5 - 24 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, de unde: $\Delta_1 = 6 > 0$ şi $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0$. Prin urmare, punctul $(5,2)$ este punct de extrem (este punct de minim).

$\square$