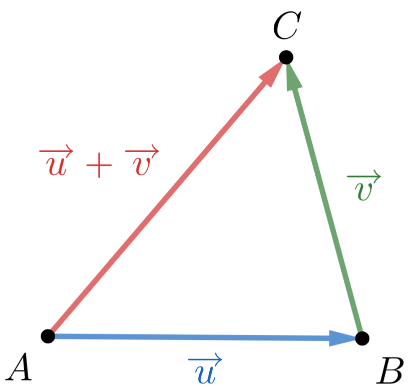
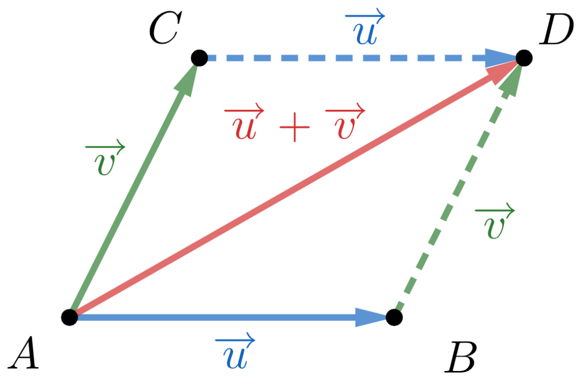
Vectori liberi

1. Spaţiul vectorilor liberi se notează cu V_3. Un vector liber $\overrightarrow{u}$ are o direcţie, un sens şi o lungime.
2. Adunarea vectorilor liberi:



$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.



$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.

3. Prin $\alpha\cdot\overrightarrow{u}$, unde $\alpha\in\mathbb{R}^*$ şi $\overrightarrow{u}\in V_3$, notat simplu $\alpha\overrightarrow{u}$, înţelegem un nou vector:
   - de aceeaşi direcţie cu $\overrightarrow{u}$;
   - de acelaşi sens cu $\overrightarrow{u}$ dacă $\alpha>0$ şi de sens contrar dacă $\alpha<0$;
   - de lungime $|\alpha|\cdot\|\overrightarrow{u}\|$.

   Dacă $\alpha=0$, atunci $0\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$.
4. Teoremă. Doi vectori liberi sunt coliniari dacă şi numai dacă sunt liniar dependenţi.
5. Teoremă. Trei vectori sunt coplanari dacă şi numai dacă sunt liniar dependenţi.
6. Corolar. Oricare trei vectori necoplanari sunt liniar independenţi.
7. Teoremă. Oricare patru vectori liberi sunt liniar dependenţi.
8. Dacă $\mathcal{R}=\{O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\}$ este un reper ortonormat, prin vectorul de poziţie al punctului P, notat prin $\overrightarrow{r_P}$, înţelegem:

   $$\overrightarrow{r_P}=\overrightarrow{OP}=x_P\overrightarrow{i}+y_P\overrightarrow{j}+z_P\overrightarrow{k},$$

   iar prin x_P, y_P şi z_P înţelegem coordonatele punctului P în raport cu reperul $\mathcal{R}$.
9. Un punct $M\in X$ este mijlocul segmentului AB dacă şi numai dacă $\overrightarrow{r_M}=\frac{1}{2}\overrightarrow{r_A}+\frac{1}{2}\overrightarrow{r_B}$.
10. Dacă M este un punct interior segmentului AB astfel încât $\frac{AM}{MB}=k$, atunci:

    $$\overrightarrow{r_M}=\frac{1}{k+1}\overrightarrow{r_A}+\frac{k}{k+1}\overrightarrow{r_B}.$$
11. Un punct $G\in X$ este centrul de greutate al triunghiului ΔABC dacă şi numai dacă $\overrightarrow{r_G}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}\right)$.

Produse cu vectori liberi

1. Definiţie. Se numeşte produsul scalar a doi vectori liberi numărul real notat cu $<\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}>$ sau $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ sau $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ dat de relaţia:

   $$<\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}>=\|\overrightarrow{u}\|\cdot\|\overrightarrow{v}\|\cdot\cos\left(\sphericalangle(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\right),$$

   pentru $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$ şi $\overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0}$, iar pentru $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$ sau $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$ avem $<\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}>=0$.
2. Teoremă. Doi vectori nenuli sunt ortogonali (perpendiculari) dacă şi numai dacă produsul lor scalar este nul.

3. Propoziţie. Au loc următoarele proprietăţi:

   i) $<\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}> = <\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}>$, pentru orice $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V_3$;

   ii) $<\lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}> = <\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v}> = \lambda <\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}>$, pentru orice $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V_3$ şi orice $\lambda \in \mathbb{R}$;

   iii) $<\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}> = <\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}> + <\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}>$, pentru orice $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V_3$.

4. Propoziţie. Oricare trei vectori liberi, nenuli, perpendiculari doi câte doi, formează o bază în V_3.

5. Propoziţie. Dacă $\mathcal{R} = \{O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ este un reper ortonormat, $\overrightarrow{u} = u_1\overrightarrow{i} + u_2\overrightarrow{j} + u_3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v} = v_1\overrightarrow{i} + v_2\overrightarrow{j} + v_3\overrightarrow{k}$, atunci:

$$<\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}> = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

6. Definiţie. Produsul vectorial a doi vectori $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$ din V_3 este un vector notat cu $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ definit prin:

   - mărimea sa, $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|$, este numeric egală cu aria paralelogramului determinat de vectorii $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$;
   - direcţia este perpendiculară şi pe $\overrightarrow{u}$, şi pe $\overrightarrow{v}$;
   - sensul este dat de regula burghiului (dacă parcurgem unghiul vectorilor $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$ de la $\overrightarrow{u}$ la $\overrightarrow{v}$ în sens trigonometric, atunci $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ va fi "în sus", altfel, în sens contrar).

7. Teoremă. Doi vectori sunt coliniari dacă şi numai dacă produsul lor vectorial este nul.

8. Propoziţie. Au loc următoarele proprietăţi:

   i) $<\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}> = 0 = <\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}>$, pentru orice $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V_3$;

   ii) $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \sin\left(\sphericalangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\right)$, pentru orice $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V_3$;

   iii) $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|^2 + <\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}>^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{v}\|^2$, pentru orice $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V_3$ (identitatea lui Lagrange);

   iv) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$, pentru orice $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V_3$ (produsul vectorial este anticomutativ);

   v) $(\lambda\overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \times (\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})$, pentru orice $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V_3$ şi orice $\lambda \in \mathbb{R}$;

   vi) $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$, pentru orice $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V_3$.

9. Propoziţie. Dacă $\mathcal{R} = \{O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ este un reper ortonormat, $\overrightarrow{u} = u_1\overrightarrow{i} + u_2\overrightarrow{j} + u_3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v} = v_1\overrightarrow{i} + v_2\overrightarrow{j} + v_3\overrightarrow{k}$, atunci:

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)\overrightarrow{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\overrightarrow{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\overrightarrow{k}.$$

10. Teoremă. Pentru orice trei vectori $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V_3$, are loc formula:

$$\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = <\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}> \overrightarrow{v} - <\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}> \overrightarrow{w}.$$

11. Propoziţie. Aria unui triunghi care are doi vectori liberi $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$ drept laturi este dată de formula $\mathcal{A}_\Delta = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|$ (este jumătate din aria paralelogramului generat de cei doi vectori).

12. Definiţie. Produsul mixt al vectorilor $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V_3$ este numărul real notat cu $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ şi este dat de formula:

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = <\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}>.$$

13. Teoremă. Trei vectori sunt coplanari dacă şi numai dacă produsul lor mixt este nul.

14. Propoziţie. Volumul paralelipipedului generat de vectorii liberi $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V_3$ este egal cu $|(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})|$.

15. Propoziţie. Dacă $\mathcal{R} = \{O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ este un reper ortonormat, $\overrightarrow{u} = u_1\overrightarrow{i} + u_2\overrightarrow{j} + u_3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v} = v_1\overrightarrow{i} + v_2\overrightarrow{j} + v_3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{w} = w_1\overrightarrow{i} + w_2\overrightarrow{j} + w_3\overrightarrow{k}$, atunci:

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Dreapta şi planul în spaţiu

1. Teoremă. Există şi este unic un plan (π) care să conţină un punct dat $P(x_0, y_0, z_0)$ şi să aibă normală $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$ (perpendiculara pe plan). Un punct $P \in X$ se află în planul (π) dacă şi numai dacă $< \overrightarrow{n}, \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0} >= 0$, unde $\overrightarrow{r}$ este vectorul de poziţie al punctului P, iar $\overrightarrow{r_0}$ al punctului P_0, în raport cu reperul ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$.

2. Corolar. Un punct $P(x, y, z)$ se află în planul (π) determinat de punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$ şi normala $\overrightarrow{n} = A\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j} + C\overrightarrow{k}$ dacă şi numai dacă:

$$A(x - x_0) + B(x - x_0) + C(z - z_0) = 0$$

sau, echivalent,

$$Ax + By + Cz + D = 0, \text{ unde } D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0.$$

3. Ecuaţia unui plan determinat de un punct $P(x_0, y_0, z_0)$ şi două direcţii date $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ şi $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ este dată de relaţia:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Ecuaţia unui plan determinat de trei puncte $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ şi $P_3(x_3, y_3, z_3)$ este dată de relaţia:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

sau, echivalent,

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Distanţa de la un punct $P_0(x_0, y_0, z_0)$ la planul (π), dat de ecuaţia $Ax + By + Cz + D = 0$, este dată de relaţia:

$$\text{dist}(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

6. Un punct $M \in X$ este pe dreapta determinată de punctul P_0 şi de direcţie $\overrightarrow{u}$ dacă $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + t\overrightarrow{u}$, cu $t \in \mathbb{R}$, unde $\overrightarrow{r}$ este vectorul de poziţie al punctului M, iar $\overrightarrow{r_0}$ este vectorul de poziţie al punctului P_0.

7. Ecuaţiile parametrice ale dreptei d determinate de punctul $P(x_0, y_0, z_0)$ şi de direcţie $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3) \in V_3$ sunt:

$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1, \\ y = y_0 + tu_2, \; t \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + tu_3, \end{cases}$$

8. Ecuaţiile canonice ale dreptei d determinate de punctul $P(x_0, y_0, z_0)$ şi de direcţie $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3) \in V_3$ sunt:

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}.$$

9. Observaţie. Dacă $u_3 = 0$, din scrierea $\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{0}$ vom înţelege că $z = z_0$ şi $\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2}$.

10. Un punct $P \in X$ aparţine dreptei determinate de punctele $P_1, P_2 \in X$ dacă şi numai dacă $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_1} + t(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1})$, $t \in \mathbb{R}$, unde $\overrightarrow{r}$ este vectorul de poziţie al punctului P, $\overrightarrow{r_1}$ al punctului P_1 şi $\overrightarrow{r_2}$ al punctului P_2.

11. Ecuaţiile parametrice ale dreptei determinate de punctele $P_1(x_1, y_1, z_1)$ şi $P_2(x_2, y_2, z_2)$ sunt date de relaţia:

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1), \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1), \ t \in \mathbb{R}. \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1), \end{cases}$$

12. Ecuaţiile canonice ale dreptei determinate de punctele $P_1(x_1, y_1, z_1)$ şi $P_2(x_2, y_2, z_2)$ sunt date de relaţia:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

13. Distanţa de la punctul P la dreapta d determinată de punctul P_0 şi de direcţie $\overrightarrow{u}$ se calculează folosind formula:

$$\operatorname{dist}(P, d) = \frac{\|\overrightarrow{P_0P} \times \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}.$$