1 Numere complexe - clasa a X-a

1.1 Structura algebrică a mulţimii numerelor complexe

Un număr complex este o pereche ordonată de numere reale (x, y). Mulţimea numerelor complexe, notată $\mathbb{C}$, poate fi identificată cu

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

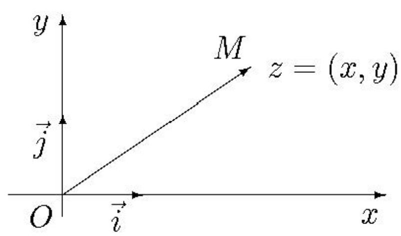
Deci, două numere complexe $z_1 = (x_1, y_1)$ şi $z_2 = (x_2, y_2)$ sunt egale dacă şi numai dacă $x_1 = x_2$ şi $y_1 = y_2$.

1.1.1 Reprezentarea în plan a numerelor complexe

Raportăm mulţimea punctelor dintr-un plan ω la un sistem de axe ortogonale cu originea într-un punct O. Aplicaţia

$$f : \mathbb{C} \to \omega, \quad f(x, y) = M,$$

unde $M(x, y) \in \omega$, este o bijectie.



M se numeşte afixul numărului complex $z = (x, y)$ în ω. Uneori, în loc de M, vom nota tot z. Fie $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$ vectorul de poziţie al punctului M. Dacă $z = (x, y)$, atunci $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$.

Poziţia punctului M în planul ω mai poate fi dată prin coordonatele sale polare r, ϕ, unde $r = \|\overrightarrow{r}\| = d\,(O, M)$, iar $\phi \in [0, 2\pi)$ este unghiul cu care trebuie rotit versorul $\overrightarrow{i}$ al axei Ox, în sens pozitiv (trigonometric sau direct) pentru a obţine orientarea lui $\overrightarrow{r}$. Uneori vom nota $\phi \in [\alpha, \alpha + 2\pi)$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$ convenabil sau $\phi \in \mathbb{R}$.

Definiţia 1.1 *Numim* modulul *numărului complex $z = (x, y)$, numărul real pozitiv*

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1.1}$$

Numim argument *al lui $z \neq (0, 0)$, orice număr real ϕ care satisface*

$$\cos\phi = \frac{x}{|z|}, \quad \sin\phi = \frac{y}{|z|}. \tag{1.2}$$

Numarul complex $0_{\mathbb{C}} = (0, 0)$ are argumentul nedeterminat.

Observaţia 1.2 *1) În orice interval $[\alpha, \alpha + 2\pi)$, sistemul de mai sus are soluţie unică, pe care o notăm $\arg_\alpha z$ şi pe care, prin abuz de limbaj, o numim* argumentul lui z în $[\alpha, \alpha + 2\pi)$. *Pentru $\alpha = 0, \arg_0 z$ se numeşte* argumentul redus *al numărului complex z.*

Propoziţia 1.3 *Expresia analitică a argumentului redus, în cazul numărului complex $z \neq (0,0)$, este*

$$\arg_0 z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + k\pi, & \textit{unde } \begin{array}{l} k = 0 \textit{ dacă } z \in I \ (x > 0, y > 0), \\ k = 1 \textit{ dacă } z \in II \cup III \ (x < 0) \\ k = 2 \textit{ dacă } z \in IV \ (x > 0, y < 0) \end{array} \\ \dfrac{\pi}{2}, & \textit{dacă } x = 0, y > 0 \\ \dfrac{3\pi}{2}, & \textit{dacă } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Demonstraţie. Se deduce, pentru fiecare cadran, formula corespunzătoare. $\square$

Exemplul 1.4 1) $z_1 = (-1, \sqrt{3}) \Rightarrow |z_1| = 2, \arg_0 z_1 = 2\pi/3$.
2) $z_2 = (0, -5) \Rightarrow |z_2| = 5, \arg_0 z_2 = 3\pi/2$.
3) $z_3 = (-2, 0) \Rightarrow |z_3| = 2, \arg_0 z_3 = \pi$.

Definiţia 1.5 *Adunarea pe $\mathbb{C}$ asociază oricarei perechi $(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, cu $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2)$, un număr complex notat $z_1 + z_2$, numit* suma *lor, dat de*

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2). \tag{1.3}$$

Înmulţirea pe $\mathbb{C}$ asociază oricărei perechi de numere complexe $(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, cu $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2)$, un număr complex notat $z_1 z_2$, numit produsul *lor, definit prin*

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2). \tag{1.4}$$

1.1.2 Forma algebrică şi forma trigonometrică

Convenim sa notăm $(1,0)$ cu 1 (şi îl numim *unitatea reală*) şi $(0,1)$ cu i (numit *unitatea imaginară*). Atunci orice număr complex $z = (x, y)$ se scrie $z = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$, deci

$$z = x + iy. \tag{1.5}$$

Aceasta se numeşte *forma algebrică* a numărului complex z. Apoi, x şi y se numesc *partea reală*, respectiv *partea imaginară* a lui z şi se mai notează $\operatorname{Re} z$ şi, respectiv, $\operatorname{Im} z$.

Dacă $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, atunci notând $r = |z|, \phi = \arg_\alpha z$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrar), din (1.2) rezultă că $x = r\cos\phi, y = r\sin\phi$. Din (1.5) obţinem

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi), \tag{1.6}$$

numită *forma trigonometrică* a numărului z.

Observaţia 1.6 *a) Dacă $z_i = r_i(\cos\phi_i + i\sin\phi_i),\ i = 1, 2$, atunci*

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2)]. \tag{1.7}$$

b) Dacă $z = r(\cos\phi + i\sin\phi) \neq 0$, atunci

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\phi + i\sin\phi)} = \frac{1}{r}(\cos\phi - i\sin\phi) = \frac{1}{r}[\cos(-\phi) + i\sin(-\phi)]. \tag{1.8}$$

1.1.3 Conjugatul şi modulul unui număr complex

Definiţia 1.7 *Numim* conjugatul *numărului complex z, numărul $\overline{z} = x - iy$.*

Imaginile lui z şi $\bar{z}$ în plan sunt puncte simetrice faţă de axa reală. Avem

$$|\overline{z}| = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|,$$
$$\arg_0 \overline{z} = -\arg_0 z \pmod{2\pi}.$$

Teorema 1.8 *Oricare ar fi $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, avem:*
(i) $\overline{\overline{z}} = z$;
(ii) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;
(iii) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im } z = 0 \Leftrightarrow z = \overline{z}$;
(iv) $\text{Re}\, z = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$, $\text{Im}\, z = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$;
(v) $z\overline{z} = |z|^2$, $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$;
(vi) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;
(vii) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$, $\overline{\dfrac{z_1}{z_2}} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

Demonstraţia se face utilizând definiţia conjugatului şi observaţia că $z\overline{z} = |z|^2$, sau forma algebrică sau trigonometrică a numerelor complexe.

Teorema 1.9 *Între modulul sumei a două numere complexe şi modulele celor doi termeni, au loc inegalităţile:*

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \tag{1.9}$$

Puterile întregi ale unui număr complex z se definesc prin $z^0 = 1, z \neq 0$ şi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$z^n = z \cdot z \cdot ... \cdot z \ (n \text{ factori}), \quad z^{-n} = (1/z)^n,\ z \neq 0. \tag{1.10}$$

Dacă $z \neq 0$ şi $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, atunci

$$z^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{1.11}$$

Pentru $r = |z| = 1$, obţinem aşa-numita *formula a lui Moivre*:

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos n\phi + i\sin n\phi, \quad n \in \mathbb{Z}, \phi \in \mathbb{R}. \tag{1.12}$$

Definiţia 1.10 Câtul a două numere complexe $z_1 \in \mathbb{C}$ *şi* $z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *se defineşte prin*

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}.$$

Dacă $z_i = r_i(\cos\phi_i + i\sin\phi_i), i = 1, 2, r_2 \neq 0$, *atunci*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 - \phi_2)\right]. \tag{1.13}$$

Pentru orice $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, n, p \in \mathbb{Z}$, avem

$$z^n z^p = z^{n+p},$$
$$(z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n,$$
$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \frac{z_1^n}{z_2^n}.$$

1.1.4 Rădăcinile de ordinul n ale unui număr complex

Definiţia 1.11 *Se numeşte* funcţie radical de ordin n din z *(unde $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$), o funcţie care face să corespundă numărului complex z, un alt număr complex w, dat prin*

$$z = w^n$$

Se scrie $w = \sqrt[n]{z}$. Prin definiţie $\sqrt[n]{0} = 0$.

Să observăm că, pentru $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = \overline{0, n-1} \tag{1.14}$$

satisfac toate $w_k^n = z$. Punctele $w_0, ..., w_{n-1}$ formează un poligon regulat cu centrul în O. Ele se numesc rădăcinile de ordin n ale numărulu complex z.

Pentru $z = 1 = 1\left(\cos 0 + i\sin 0\right)$, obţinem rădăcinile de ordinul n ale unităţii:

$$w_k = \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right), \quad k = \overline{0, n-1}.$$

1.1.5 Exponenţiala complexă şi forma exponenţială a unui număr complex

Definiţia 1.12 *Se numeşte* funcţie exponenţială e^z*, funcţia care asociaza oricarui număr complex $z = x + iy$, un alt număr complex w, de modul e^x şi argument y, adică:*

$$f(z) = e^z = e^x(\cos y + i\sin y). \tag{1.15}$$

Din definiţie avem

$$\begin{aligned}
&e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\\
&e^{-z} = 1/e^z, \quad \forall z \in \mathbb{C}\\
&e^{z_1}/e^{z_2} = e^{z_1-z_2}, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\\
&(e^z)^m = e^{mz}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

În particular, $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ şi comparând cu (1.15), găsim

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y. \tag{1.16}$$

Deci orice număr complex $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ se mai poate scrie

$$z = re^{i\varphi}. \tag{1.17}$$

Formula (1.17) se numeşte *forma exponenţială* a numărului complex z.

Dacă în (1.16) înlocuim y cu φ şi cu $-\varphi$, se obţin aşa-numitele *formule ale lui Euler*:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \tag{1.18}$$

1.1.6 Aplicaţii în geometrie

- distanţa dintre 2 puncte: $|AB| = |a - b|$;
- caracterizarea segmentului: $M \in (AB) \Leftrightarrow \exists t \in (0,1) : m = (1-t)\,a + tb$;
- caracterizarea dreptei: $M \in (AB) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} : m = (1-t)\,a + tb$;
- afixul unui punct care împarte un segment într-un raport dat: A, B, M coliniare, $\dfrac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} = t \Rightarrow m = (1-t)\,a + tb$;
- măsura unui unghi pozitiv orientat: $m\,(\sphericalangle ABC) = \arg \dfrac{c-b}{a-b}$.
- unghiul pozitiv orientat al două drepte: $m\,(\sphericalangle AB, CD) = \arg \dfrac{a-b}{c-d}$;
- coliniaritate: A, B, C coliniare $\Leftrightarrow \dfrac{b-a}{c-a} \in \mathbb{R}^*$;
- paralelism: $AB \parallel CD \Leftrightarrow \dfrac{a-b}{c-d} \in \mathbb{R}^*$;
- perpendicularitate: $AB \perp CD \Leftrightarrow \dfrac{a-b}{c-d} \in i\mathbb{R}^*$;
- conciclicitate: A, B, C, D conciclice $\Leftrightarrow \dfrac{b-a}{c-a} : \dfrac{b-d}{c-d} \in \mathbb{R}^*$;
- triunghiuri asemenea (la fel orientate): $\Delta A_1A_2A_3 \sim \Delta B_1B_2B_3 \Leftrightarrow \dfrac{a_2-a_1}{a_3-a_1} = \dfrac{b_2-b_1}{b_3-b_1}$;
- triunghiuri asemenea (invers orientate): $\Delta A_1A_2A_3 \sim \Delta B_1B_2B_3 \Leftrightarrow \dfrac{a_2-a_1}{a_3-a_1} = \dfrac{\overline{b_2}-\overline{b_1}}{\overline{b_3}-\overline{b_1}}$;
- triunghi echilateral: $A_1A_2A_3$ echilateral $\Leftrightarrow a_1 \cdot \varepsilon + a_2 \cdot \varepsilon^2 + a_3 = 0$
- relaţia lui Sylvester: $h - 2q = a + b + c$.

1.2 Probleme

Exerciţiul 1 (Identitatea paralelogramului) Arătaţi că $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$.

Exerciţiul 2 Fie $z,\ z' \in \mathbb{C}$ cu $|z| = |z'| = 1$ şi $zz' \neq -1$. Să se arate că $\dfrac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$.

Exerciţiul 3 Calculaţi suma $s = 1 + z + z^2 + ... + z^n$, unde $z = (1+i)\,/\,(1-i)$.

Exerciţiul 4 Rezolvaţi ecuaţiile: a) $z^3 = \overline{z}\left(|z|^2 - 1\right)$; b) $z^3 = \overline{z}$.

Exerciţiul 5 Fie $a, b \in \mathbb{C}$ distincte, de afixe A, respectiv B şi $r > 0$ dat. Stabiliţi locul geometric al afixelor numerelor complexe z ce satisfac:

a) $|z - a| = 0$; b) $|z - a| = r$; c) $|z - a| < r$; d) $|z - a| \leq r$; e) $|z - a| > r$;
f) $0 < |z - a| < r$; g) $|z - a| - |z - b| = 0$; h) $|z - a| - |z - b| = r$;
i) $|z - a| + |z - b| = r$; j) $r < |z - a| < 2r$.

Exerciţiul 6 Determinaţi forma trigonometrică a numărului complex $z = (\cos a + \sin a) + i (\sin a - \cos a)$.

Exerciţiul 7 Calculaţi: a) $z = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)^{60}$; b) $z = (-1 - i)^{80}$; c) $z = \left(\sqrt{3} - i\right)^{50}$.

Exerciţiul 8 Dacă $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$, determinaţi valoarea sumei

$$1 + z + z^2 + ... + z^{2022}.$$

Exerciţiul 9 Numerele complexe z_1, z_2, z_3 de modul 1 satisfac relaţiile

$$z_1 + z_2 + z_3 \neq 0,$$
$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0.$$

Determinaţi valoarea lui $|z_1 + z_2 + z_3|$.

Exerciţiul 10 Se consideră numerele complexe

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{12} + i \sin\frac{\pi}{12},$$
$$z_2 = \cos\frac{7\pi}{12} - i \sin\frac{7\pi}{12}.$$

Determinaţi modulul numărului complex $z_1 + z_2$.

Exerciţiul 11 Fie numerele complexe z de modul 1 ce satisfac relaţia:

$$\sin(z + \overline{z}) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + i(z - \overline{z})\right) = 0.$$

Calculaţi $\mathrm{Re}^4 z + \mathrm{Im}^4 z$.

Exerciţiul 12 Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $k \in \{0, 1, ..., n - 1\}$. Determinaţi partea reală a numărului complex

$$\left(\operatorname{ctg}\frac{(2k+1)\pi}{2n} + i\right)^n.$$

Exerciţiul 13 Se consideră polinomul

$$f(x) = x^n + px + q, p, q \in \mathbb{R}.$$

Pentru $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, calculaţi $S_n = x_1^n + x_2^n + ... + x_n^n$, unde $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului.

Exercişiul 14 a) Calculaţi sumele

$$S_1 = 1 + \cos t + \cos 2t + ... + \cos nt,$$
$$S_2 = \sin t + \sin 2t + ... + \sin nt.$$

b) Calculaţi sumele

$$S_3 = C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - ...,$$
$$S_4 = C_n^1 - C_n^3 + C_n^4 - ...,$$

$n \in \mathbb{N}^*$, cu convenţia $C_n^k = 0$ pentru $k > n$.

Exerciţiul 15 Fie mulţimile

$$A = \left\{ \operatorname{Re} \frac{1}{z} |\ z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},\ z^{2025} = 1 \right\},$$
$$B = \left\{ \operatorname{Im} \frac{1}{z} |\ z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},\ z^{2025} = 1 \right\}.$$

Dacă notăm cu S_A suma elementelor mulţimii A, iar cu S_B suma elementelor mulţimii B, determinaţi $S_B - S_A$.

Exerciţiul 16 Notăm cu $x_1, x_2, ..., x_{2024}$ rădăcinile de ordinul 2025 ale unităţii din mulţimea $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Determinaţi valoarea expresiei

$$\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_{2024}} \right)^{2025}.$$

Exerciţiul 17 Să se stabilească locul geometric definit de ecuaţia

$$\left| \frac{z-a}{z-b} \right| = k > 0, \quad a, b \in \mathbb{C}, \text{ distincte.}$$

Exerciţiul 18 Stabiliţi locul geometric al afixelor numerelor complexe z ce satisfac:

a) $\operatorname{Im}(z+i) = 0$; b) $\arg(z-2i) = \frac{\pi}{4}$; c) $\arg \frac{z-1}{z+1} = \frac{\pi}{3}$;

d) $\frac{\pi}{6} < \arg \frac{z-3}{z-i} < \frac{\pi}{3}$; e) $-\frac{\pi}{4} < \arg(z-i) < \frac{\pi}{6}$; f) $|z| < 1 - \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$;

g) $\left| \frac{z}{z+3i} \right| < 1$; h) $\left| \frac{1-z}{1+z} \right| > 3$; i) $\left| z^2 - c^2 \right| = a^2$, c real.

Exerciţiul 19 Fie $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ patru puncte din planul complex şi $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4-$ afixele lor. Să se arate că dreptele care unesc punctele A_1 şi A_2, pe de o parte, şi punctele A_3 şi A_4, pe de altă parte:

- sunt perpendiculare dacă raportul $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}$ este pur imaginar;
- sunt paralele dacă raportul $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}$ este real.

Exerciţiul 20 Calculaţi $\left(a + bz + cz^2\right)\left(a + bz^2 + cz\right)$ unde $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exerciţiul 21 Fie $z, w \in \mathbb{C},\ |w| < 1,\ z\overline{w} \neq 1,\ s = \dfrac{z - w}{1 - z\overline{w}}$. Atunci $|s| \leq 1$ dacă şi numai dacă $|z| \leq 1$.

Exerciţiul 22 Să se afle locul geometric al punctelor $z \in \mathbb{C}$ pentru care afixele numerelor $z,\ z^2,\ z^3$ sunt vârfurile unui triunghi dreptunghic.

Exerciţiul 23 Dacă $|a| = |b| = |c| = r > 0$ şi $a + b + c = 0$ arătaţi că afixele numerelor $a,\ b,\ c$ sunt vârfurile unui triunghi echilateral.

Exerciţiul 24 Numerele $z_1,\ z_2, ...,\ z_n \in \mathbb{C}^*$ au acelaşi modul. Dovediţi că numărul

$$w = \frac{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3) \cdot ... \cdot (z_{n-1} + z_n)(z_n + z_1)}{z_1 z_2 \cdot ... \cdot z_n}$$

esre real.

Exerciţiul 25 Arătaţi că, pentru $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\cos\ n\varphi = P(\cos\varphi),$$

unde P este un polinom cu coeficienţi întregi de grad n.

Exerciţiul 26 Să se arate că toate rădăcinile polinomului

$$z^{n+1} + \alpha z^n + \alpha z + 1,\ \alpha \in \mathbb{R},\ \ |\alpha| \leq 1,\ n \in \mathbb{N}^*$$

au modulul egal cu 1.

Exerciţiul 27 Arătaţi că, dacă $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos\varphi$, atunci $z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos\ n\varphi$.

1.3 Numere complexe la olimpiade

Problema 1 Fie ABC un triunghi înscris în cercul $\mathcal{C}$ de centru O şi rază 1. Pentru orice $M \in \mathcal{C}\backslash\{A, B, C\}$, notăm

$$s(M) = OH_1^2 + OH_2^2 + OH_3^2,$$

undeH_1, H_2, H_3 sunt ortocentrele triunghiurilor MAB, MBC, respectiv MCA.

a) Demonstraţi că dacă triunghiul ABC este echilateral, atunci $s(M) = 6$, oricare ar fi $M \in \mathcal{C}\backslash\{A, B, C\}$.

b) Demonstraţi că dacă există trei puncte distincte $M_1, M_2, M_3 \in \mathcal{C}\backslash\{A, B, C\}$ astfel încât $s(M_1) = s(M_2) = s(M_3)$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

ONM 2024, Etapa judeţeană, P2

Problema 2 Fie a, b,c numere complexe nenule de acelaşi modul pentru care numerele $A = a+b+c$ şi $B = abc$ sunt reale. Demonstraţi că, pentru orice număr natural n, numărul $C_n = a^n + b^n + c^n$ este real.

ONM 2024, Etapa judeţeană, P3

Problema 3 Considerăm pentagonul inscriptibil $ABCDE$ în care $AB = BC = CD$ şi centrul de greutate al pentagonului coincide cu centrul cercului circumscris. Arătaţi că pentagonul $ABCDE$ este regulat.

Centrul de greutate al unui pentagon este punctul din planul pentagonului al cărui vector de poziţie este egal cu media aritmetică a vectorilor de poziţie ai vârfurilor.

ONM 2024, Etapa naţională, P2

Problema 4 Pe arcul mic AB al cercului circumscris triunghiului echilateral ABC se consideră punctul N astfel încât măsura arcului NB este de $30°$. Din punctul N se duc perpendiculare pe latura AC, respectiv AB. Acestea intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului ABC în punctele M, respectiv I.

a) Demonstraţi că triunghiul IMN este echilateral.

b) Dacă H_1, H_2 şi H_3 reprezintă ortocentrele triunghiurilor NAB, IBC, respectiv CAM, demonstraţi că triunghiul $H_1H_2H_3$ este echilateral.

ONM 2023, Etapa judeţeană, P2

Problema 5 Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Determinaţi toate numerele complexe $z \in \mathbb{C}$ pentru care

$$\left|z^{n+1} - z^n\right| \geq \left|z^{n+1} - 1\right| + \left|z^{n+1} - z\right|.$$

ONM 2023, Etapa judeţeană, P3

Problema 6 Arătaţi că, oricare ar fi numerele complexe z_1 şi z_2, are loc inegalitatea

$$|z_1 + z_2| + |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2| + \max\{|z_1|, |z_2|\}.$$

ONM 2022, Etapa naţională, P2

Problema 7 Fie $Z \subset \mathbb{C}$ o mulţime de n numere complexe, $n \geq 2$. Arătaţi că pentru orice număr natural nenul $m \leq \frac{n}{2}$ există o submulţime U cu m elemente a mulţimii Z astfel încât

$$\left|\sum_{z \in U} z\right| \leq \left|\sum_{z \in Z \setminus U} z\right|.$$

ONM 2022, Etapa naţională, P3

Problema 8 Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe de modul 1, cu proprietatea că $|z_i - z_j| \geq \sqrt{2}$, pentru orice $i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$. Demonstraţi că

$$|z_1 + z_2| + |z_2 + z_3| + |z_3 + z_1| \leq 3.$$

ONM 2022, Etapa judeţeană, P2

Problema 9 Un număr natural $n \geq 4$ se numeşte *interesant* dacă există cel puţin un număr complex z de modul 1 astfel încât $1 + z + z^2 + z^{n-1} + z^n = 0$. Determinaţi câte numere interesante sunt cel mult egale cu 2022.

ONM 2022, Etapa judeţeană, P3

Problema 10 Determinaţi numerele complexe x, y, z de acelaşi modul, ştiind că numerele $x+y+z$ şi $x^3 + y^3 + z^3$ sunt reale.

ONM 2021, Etapa naţională, P1

Problema 11 Fie $n \geq 2$ un număr natural cu proprietatea că mulţimea rădăcinilor de ordinul n ale unităţii are mai puţin de $2^{[\sqrt{n}]} - 1$ submulţimi cu suma elementelor nulă. Arătaţi că n este prim.

ONM 2021, Etapa naţională, P3