# Concursul Naţional Studenţesc de Matematică „Traian Lalescu”

Secţiunea **A**

Iaşi, 4-6 Mai 2023

**Subiectul 1.** Rezolvaţi în $\mathbb{Z}_{2023}$ ecuaţia $x^{2023} = \widehat{38}$.

**Soluţie:** Cum $(38, 2023) = 1$, 38 e inversabil modulo 2023, deci orice soluţie $x$ a ecuaţiei este inversabilă modulo 2023.

De aceea, $x^{1632} = x^{\varphi(2023)} = \widehat{1}$. Ca urmare, ecuaţia e echivalentă cu $x^{391} = \widehat{38}$, care se rescrie

$$x^{17\cdot 23} \equiv 38 \pmod{2023}. \tag{1}$$

........................................................................................................ **2p**

Conform teoremei chineze a resturilor, această congruenţă e echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} x^{17\cdot 23} \equiv 38 \pmod{7} \\ x^{17\cdot 23} \equiv 38 \pmod{17^2} \end{cases}, \tag{2}$$

care, ţinând cont de $x^6 \equiv 1 \pmod{7}$ şi de $x^{16\cdot 17} = x^{\varphi(17^2)} \equiv 1 \pmod{17^2}$, se rescrie

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{7} \\ x^{17\cdot 7} \equiv 38 \pmod{17^2} \end{cases}. \tag{3}$$

........................................................................................................ **4p**

Dar din $x^{17\cdot 7} \equiv 38 \pmod{17^2}$ obţinem $x^{17\cdot 7} \equiv 38 \pmod{17}$, adică, ţinând cont de $x^{16} \equiv 1 \pmod{17}$, $x^7 \equiv 4 \pmod{17}$. Ridicând această ultimă congruenţă la puterea 7, obţinem $x \equiv 4^7 \pmod{17}$, adică $x \equiv -4 \pmod{17}$. De aici, există $\lambda \in \{0, 1, \ldots, 16\}$ aşa încât $x \equiv -4 + 17\lambda \pmod{17^2}$; se verifică prin calcul că toate aceste valori sunt soluţii ale congruenţei $x^{17\cdot 7} \equiv 38 \pmod{17^2}$. Conform lemei chineze a resturilor, soluţia sistemului (3) este $x \equiv 3 \cdot 1156 + 868 \cdot (-4 + 17\lambda) \pmod{2023}$, adică $x \equiv -4 + 595\lambda \pmod{2023}$, $\lambda \in \{0, 1, \ldots, 16\}$.

Ca urmare, soluţiile ecuaţiei date sunt:

$$\{\widehat{-4 + 595\lambda} : \lambda \in \{0, 1, \ldots, 16\}\} = \{\widehat{-4 + 119\lambda} : \lambda \in \{0, 1, \ldots, 16\}\}.$$

........................................................................................................ **4p**

**Subiectul 2.** Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât există $a, b \in \mathbb{C}$ şi $c \in \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$ pentru care

$$aA + bB = (1-c)AB + cBA.$$

Arătaţi că $(AB - BA)^n = O_n$.

**Soluţie:** Relaţia din ipoteză se scrie $(A - bI_n)(aI_n - B) + abI_n = c(BA - AB)$ şi respectiv $(aI_n - B)(A - bI_n) + abI_n = (c-1)(BA - AB)$. Matricile $(A - bI_n)(aI_n - B) + abI_n$ şi $(aI_n - B)(A - bI_n) + abI_n$ au acelaşi polinom caracteristic, deci au aceleaşi valori proprii. Atunci $c(BA - AB)$ şi $(c-1)(BA - AB)$ au acelaşi spectru.

........................................................................................................ **5p**

Dacă $c = 1$, concluzia este evidentă. Dacă $c \neq 1$, deducem că $BA - AB$ şi $\dfrac{c}{c-1}(BA - AB)$ au aceleaşi valori proprii. Fie $\lambda$ o valoare proprie a matrice $BA - AB$. Atunci $\dfrac{c}{c-1}\lambda$ este valoare proprie şi, inductiv, $\left(\dfrac{c}{c-1}\right)^k \lambda$ este valoare proprie pentru $BA - AB$, pentru orice $k \geq 1$.

........................................................................................................ **3p**

Întrucât $BA - AB$ are un număr finit de valori proprii şi $\dfrac{c}{c-1} \neq \pm 1$, atunci $\lambda = 0$. Toate valorile proprii ale matricei $BA - AB$ sunt aşadar nule, de unde concluzia.

........................................................................................................ **2p**

**Subiectul 3.** Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe $[0,1]$, cu derivata continuă şi $f(0) = f(1) = 0$. Demonstraţi că

$$\left(\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \frac{1}{112}\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2\,\mathrm{d}x.$$

**Soluţie:**

Aplicând formula de integrare prin părți se obține

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\frac{x^3+c}{3}\right)' \cdot f(x)\mathrm{dx} &= \left(\frac{x^3+c}{3}\right) \cdot f(x)\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{x^3+c}{3}\right) \cdot f'(x)\mathrm{dx} \qquad (4)\\ &= -\int_0^1 \left(\frac{x^3+c}{3}\right) \cdot f'(x)\mathrm{dx}\end{aligned}$$

........................................................................................................ **5p**

Aplicând mai departe inegalitatea Cauchy-Schwarz, obținem

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 \left(\frac{x^3+c}{3}\right) \cdot f'(x)\mathrm{dx}\right)^2 &\leq \int_0^1 \left(\frac{x^3+c}{3}\right)^2 \mathrm{dx} \cdot \int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{dx}\\ &= g(c) \cdot \int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{dx},\end{aligned}$$

unde

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(c) = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{7} + \frac{2c}{4} + c^2\right).$$

........................................................................................................ **3p**

Dar funcția $g$ are valoarea minimă $\dfrac{1}{112}$ atinsă pentru $c = -\dfrac{1}{4}$. Cu aceasta soluția este completă.

........................................................................................................ **2p**

**Notă:** Dacă se urmează paşii de rezolvare, fără considerarea constantei $c$, se acordă în total 3 puncte.

Doar pentru aplicarea formulei de integrare prin părţi, fără considerarea constantei $c$, se acordă în total 1 punct.

**Subiectul 4.** Fie $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ o funcţie crescătoare. Să se demonstreze că dacă

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1,$$

atunci $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{a^x} = 0$, oricare ar fi $a > 1$.

**Soluţie:** Fie $a > 1$ arbitrar. Presupunem, prin absurd, că funcția $x \mapsto \frac{f(x)}{a^x}$ nu are limita 0 când $x \to \infty$. Atunci există $\rho > 0$ astfel încât, pentru orice $r > 0$, există $x_r \geq r$ cu proprietatea că

$$\frac{f(x_r)}{a^{x_r}} \geq \rho.$$

................................................................................................ **2p**

În particular, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, există $x_n \geq n$ astfel încât $f(x_n) \geq \rho a^{x_n}$. Evident, $x_n \to \infty$.

Fixăm acum $\varepsilon \in (0, a-1)$. Din

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1,$$

rezultă existența lui $b \in \mathbb{R}$ astfel încât, oricare ar fi $x \in [b, \infty)$,

$$1 \leq \frac{f(x+1)}{f(x)} < 1 + \varepsilon.$$

În urma unui raționament inductiv, se deduce de aici imediat că

$$\forall x \in [b, \infty), \quad \forall k \in \mathbb{N}^* : \quad f(x+k) < (1+\varepsilon)^k f(x).$$

În particular, $f(b+k) < (1+\varepsilon)^k f(b)$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$.

................................................................................................ **5p**

Fie $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $x_n > b$. Notăm $k = [x_n - b] + 1$. Atunci $k > x_n - b$ sau $b + k > x_n$. În cele din urmă avem

$$\rho a^{x_n} \leq f(x_n) \leq f(b+k) < (1+\varepsilon)^k f(b) < (1+\varepsilon)^{x_n - b + 2} f(b),$$

de unde deducem

$$f(b) > \rho(1+\varepsilon)^{b-2} \left(\frac{a}{1+\varepsilon}\right)^{x_n},$$

oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ cu $x_n > b$. Făcând $n \to \infty$ obținem că $f(b) \geq \infty$. Contradicție.

................................................................................................ **3p**