Concursul Naţional Studenţesc de Matematică "Traian Lalescu"

Secţiunea **B**

Iaşi, 4-6 Mai 2023

Soluţii şi bareme de corectare

Problema 1. *Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $AB = A$ şi $BA = B$. Considerăm funcţiile:*

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \operatorname{Tr}\big((1-z)A + zB\big), \quad z \in \mathbb{C},$$
$$g : \mathbb{C} \to \mathbb{N}, \quad g(z) = \operatorname{rang}\big((1-z)A + zB\big), \quad z \in \mathbb{C},$$
$$h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad h(z) = \det\big((1-z)A + zB\big), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Arătaţi că funcţiile f, g şi h sunt constante.

Soluţie şi barem de corectare:

Pentru orice $z \in \mathbb{C}$, notăm $C_z = (1-z)A + zB$. Avem

$$A^2 = A \cdot A = AB \cdot A = A \cdot BA = AB = A$$
$$B^2 = B \cdot B = BA \cdot B = B \cdot AB = BA = B$$

....1 punct

$$\begin{aligned} C_z^2 &= \big((1-z)A + zB\big)^2 = (1-z)^2A^2 + z(1-z)(AB + BA) + z^2B^2 \\ &= (1-z)^2A + z(1-z)(A + B) + z^2B = \Big((1-z)^2 + z(1-z)\Big)A + \Big(z^2 + z(1-z)\Big)B \\ &= (1-z)A + zB = C_z. \end{aligned}$$

....2 puncte

a) Deoarece $\operatorname{Tr} AB = \operatorname{Tr} BA$, rezultă că $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} B$, astfel că

$$f(z) = \operatorname{Tr} C_z = (1-z)\operatorname{Tr} A + z \operatorname{Tr} B = \operatorname{Tr} A,$$

pentru orice $z \in \mathbb{C}$, deci f este constantă. ....2 puncte

b) Orice matrice M idempotentă ($M^2 = M$) are forma canonică Jordan de forma $J_r = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$, unde $r = \operatorname{rang} M$, de unde $\operatorname{Tr} M = \operatorname{rang} M$. Deoarece C_z este idempotentă, pentru orice $z \in \mathbb{C}$, rezultă că

$$g(z) = \operatorname{rang} C_z = \operatorname{Tr} C_z = f(z), \quad \text{pentru orice } z \in \mathbb{C},$$

deci $g = f$, astfel că g este constantă. ....2 puncte

c) Deoarece $C_z^2 = C_z$, rezultă că $\det C_z \in \{0, 1\}$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$. Fixăm $z \in \mathbb{C}$ şi definim funcţia $h_z : [0, 1] \to \{0, 1\}$, $h_z(t) = h(tz) = \det C_{tz}$. Evident, funcţia h_z este continuă, astfel că h_z trebuie să fie constantă, de unde

$$h(z) = h_z(1) = h_z(0) = h(0) = \det A,$$

astfel că h este constantă. ....3 puncte

Observaţie. Dacă se ia $z = 0, z = 1$ şi cerinţele se reduc la

$$f\,(z) = \operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} B, \quad z \in \mathbb{C}$$
$$g\,(z) = \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B, \quad z \in \mathbb{C}$$
$$h(z) = \det A = \det B,, \quad z \in \mathbb{C},$$

se acordă 1 punct.

Problema 2. *Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice de rang 1 astfel încât $\operatorname{Tr} A \in \mathbb{R}$ şi există $a, b \in \mathbb{C}$ cu $|a| = 1$ astfel încât*

$$A^2 + aAA^* + aA^*A + b(A^*)^2 = \mathcal{O}_n,$$

unde $A^* = \bar{A}^T$. Arătaţi că există $u \in \mathbb{C}^n$ astfel încât $A = \pm u \cdot \bar{u}^T$.

Soluţie şi barem de corectare: Pentru că rang $A = 1$ rezultă că A se poate scrie în forma $A = x \cdot \bar{y}^T$, unde $x, y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Mai mult, $A^2 = \langle x, y\rangle \cdot A = \operatorname{Tr} A \cdot A$. Evident, pentru că $\operatorname{Tr} A^* = \overline{\operatorname{Tr} A}$ şi A^* are şi ea rangul 1, avem şi $(A^*)^2 = \overline{\operatorname{Tr} A} \cdot A^*$.

....3 puncte

Să remarcăm, întâi, că dacă am avea $\operatorname{Tr} A = 0$ atunci şi $\operatorname{Tr} A^* = \overline{\operatorname{Tr} A} = 0$ şi, trecând la trace în realaţia din enunţ obţinem, ţinând cont şi de relaţiile anterioare:

$$(\operatorname{Tr} A)^2 + a \operatorname{Tr}(AA^*) + a \operatorname{Tr}(A^*A) + b(\operatorname{Tr} A^*)^2 = 0 \Leftrightarrow 2a \operatorname{Tr}(AA^*) = 0 \Leftrightarrow A = \mathcal{O}_n,$$

ceea ce contrazice faptul că rang $A = 1$. Astfel, $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} A^* \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

....2 puncte

Rescriem relaţia din enunţ în forma

$$\begin{aligned}
(A + aA^*)(A + aA^*) + (b - a^2)(A^*)^2 &= \mathcal{O}_n \\
(A + aA^*)(A + aA^*) &= (a^2 - b)(A^*)^2 \\
a(\bar{a}A + A^*)(A + aA^*) &= (a^2 - b)(A^*)^2 \\
(A + aA^*)^* \cdot (A + aA^*) &= (a - \bar{a}b)(A^*)^2.
\end{aligned}$$

Dacă $b = a^2$ sau, echivalent, $a - \bar{a}b = 0$ din ultima relaţie rezultă că $A + aA^* = \mathcal{O}_n$ şi de aici, ţinând cont că $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} A^* \neq 0$, rezultă că $a = -1$ ceea ce implică $A = A^*$.

Dacă $b \neq a^2$, din relaţia $(A + aA^*)^* \cdot (A + aA^*) = (a - \bar{a}b)(A^*)^2$ rezultă şi că

$$\left[(A + aA^*)^* \cdot (A + aA^*)\right]^* = \left[(a - \bar{a}b)(A^*)^2\right]^* \Leftrightarrow (A + aA^*)^* \cdot (A + aA^*) = (\bar{a} - a\bar{b})A^2$$

şi, deci,

$$(A^*)^2 = \frac{\bar{a} - a\bar{b}}{a - \bar{a}b} A^2 \Leftrightarrow \operatorname{Tr} A \cdot A^* = \frac{\bar{a} - a\bar{b}}{a - \bar{a}b} \cdot \operatorname{Tr} A \cdot A \Leftrightarrow A^* = \frac{\bar{a} - a\bar{b}}{a - \bar{a}b} \cdot A.$$

Trecând la trace rezultă că $\dfrac{\bar{a} - a\bar{b}}{a - \bar{a}b} = 1$ şi, deci, $A = A^*$.

Astfel, $A = A^*$.

....3 puncte

Dar $A^* = \left((x\bar{y}^T)\right)^* = y\bar{x}^T$ şi atunci egalitatea $A = A^*$ implică, înmulţind scalar cu x:

$$x\bar{y}^T = y\bar{x}^T \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \cdot x = \|x\|^2 \cdot y$$

deci, x şi y sunt liniar dependenţi (coliniari),$x = \alpha y$, unde $\alpha = \dfrac{\|x\|^2}{\langle x, y\rangle} = \pm\dfrac{\|x\|}{\|y\|} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Rezultă acum că

$$A = \alpha \cdot x \cdot \bar{x}^T = \pm u \cdot \bar{u}^T, \quad \text{unde } u = \sqrt{\frac{\|x\|}{\|y\|}} \cdot x.$$

....2 puncte

Problema 3. *Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă, cu f' continuă şi $f(0) = f(1) = 0$. Arătaţi că*

$$\left(\int_0^1 x^2 f(x)\ dx\right)^2 \leq \frac{1}{112}\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx.$$

Soluţie şi barem de corectare: Considerăm

$$\int_0^1 \left(\frac{x^3+c}{3}\right)' f(x)\mathrm{dx} = \left(\frac{x^3+c}{3}\right) f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{x^3+c}{3}\right) f'(x)\mathrm{dx} =$$

$$= -\int_0^1 \left(\frac{x^3+c}{3}\right) f'(x)\mathrm{dx}$$

....5 puncte

Aplicăm CBS şi obţinem

$$\left(\int_0^1 \left(\frac{x^3+c}{3}\right) f'(x)\mathrm{dx}\right)^2 \leq \int_0^1 \left(\frac{x^3+c}{3}\right)^2 \mathrm{dx} \cdot \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{dx}$$

....3 puncte

Calculăm

$$\int_0^1 \left(\frac{x^3+c}{3}\right)^2 \mathrm{dx} = \int_0^1 \frac{1}{9}\left(x^6 + 2cx^3 + c^2\right)\mathrm{dx} = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{7} + 2c\frac{1}{4} + c^2\right)$$

Fie

$$g(c) = \frac{1}{9}c^2 + \frac{1}{18}\cdot c + \frac{1}{63}$$

care are minimul în $c = -\dfrac{1}{4}$ şi ia valoarea $\dfrac{1}{112}$.

....2 puncte

Observaţii. Dacă se urmează paşii de rezolvare, fără considerarea constantei c, se acordă în total 3 puncte.

Doar pentru aplicarea formulei de integrare prin părţi, fără considerarea constantei c, se acordă în total 1 punct.

Problema 4. *Considerăm funcţia continuă şi strict crescătoare* $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *care satisface* $f(0) = 0$ *şi* $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$.

a) Arătaţi că f *este bijectivă şi că seria de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} x^{f(n)}$ *este convergentă pentru orice* $x \in (-1, 1)$.

b) Notăm inversa funcţiei f *cu* g, *iar suma seriei de puteri anterioare cu* h. *Presupunem că*

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), \quad \forall x, y \geq 0.$$

Calculaţi $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} g(1 - x) \cdot h(x)$.

Soluţie şi barem de corectare: a) Cum f este strict crescătoare, este injectivă, iar din f continuă şi $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$ rezultă $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$. Cum $f(0) = 0$, rezultă că f este bijectivă.

....1 punct

Se observă că seria de puteri poate fi scrisă sub forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_k x^k$, unde

$$a_k = \begin{cases} 1, & \text{pentru } k = f(n) \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Atunci $\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$, de unde raza de convergenţă a seriei de puteri este 1.

....2 puncte

b) Notând $u(x) = \ln f(e^x)$, observăm că u este continuă şi satisface ecuaţia lui Cauchy

$$u(x + y) = u(x) + u(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Avem succesiv

$$\begin{aligned} u(x) &= u(1) \cdot x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ f(e^x) &= e^{u(1) \cdot x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x) &= x^{u(1)}, \quad \forall x > 0. \end{aligned}$$

Cum $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$, obţinem că există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $f(x) = x^p$, pentru orice $x \geq 0$.

....2 puncte

În plus, deoarece f este crescătoare, iar $x \in (0, 1)$, avem pentru $y \in [n, n+1]$ că

$$x^{f(n+1)} \leq x^{f(y)} \leq x^{f(n)},$$

de unde

$$x^{f(n+1)} \leq \int_n^{n+1} x^{f(y)} dy \leq x^{f(n)}.$$

Va rezulta

$$\sum_{n=0}^{N} x^{f(n+1)} \leq \int_0^{N+1} x^{f(y)} dy \leq \sum_{n=0}^{N} x^{f(n)},$$

şi cum seria este convergentă pentru $x \in (0, 1)$, vom obţine că integrala $\int_0^{\infty} x^{f(y)} dy$ este convergentă şi că

$$\lim_{x \to 1_-} g(1 - x) \cdot h(x) = \lim_{x \to 1_-} (1 - x)^{\frac{1}{p}} \int_0^{\infty} x^{f(y)} dy = \lim_{x \to 1_-} (1 - x)^{\frac{1}{p}} \int_0^{\infty} e^{y^p \cdot \ln x} dy. \tag{1}$$

....3 puncte

Cu schimbarea de variabilă $y^p \cdot \ln x = -t$, vom avea

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{y^p \cdot \ln x} dy &= \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot \frac{1}{p} \left(\frac{t}{-\ln x}\right)^{\frac{1}{p}-1} \cdot \frac{1}{-\ln x} dt \\ &= \frac{1}{p\left(-\ln x\right)^{\frac{1}{p}}} \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{\frac{1}{p}-1} \cdot dt = \frac{1}{\left(-\ln x\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{1}{p} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{p}\right).\end{aligned}$$

Introducând în (1), vom avea

$$\lim_{x \to 1_-} g\left(1-x\right) \cdot h\left(x\right) = \lim_{x \to 1_-} \left(\frac{1-x}{-\ln x}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{p} \Gamma\left(\frac{p+1}{p}\right) = \frac{1}{p} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) = \Gamma\left(\frac{p+1}{p}\right).$$

....2 puncte