Concursul Naţional Studenţesc de Matematică „Traian Lalescu"

Secţiunea **C**

Iaşi, 4-6 Mai 2023

Subiectul 1. Fie seria de puteri $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{4^n}{n}x^{2n}$.

a) Aflaţi mulţimea de convergenţă a seriei şi arătaţi că suma ei pe mulţimea de convergenţă este

$$f(x) = \ln(1+4x^2).$$

b) Arătaţi că ecuaţia $f(x) - e^{x^2+y^2} + ey = 0$ defineşte o unică funcţie $y = y(x)$ în vecinătatea punctului $(0,1)$ şi calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y(x)-1}{x}$.

c) Calculaţi $I = \int\limits_0^1 \sqrt{\ln\dfrac{1}{x}}dx$.

Barem
Start **1p**

a)
- Raza de convergenţă $R = \dfrac{1}{2}$ **1.5p**
- Convergenţa în $x = \pm\dfrac{1}{2}$ **1p**
- Mulţimea de convergenţă $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ **0.5p**
- Notăm $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{4^n}{n}x^{2n}$, $f'(x) = \dfrac{8x}{1+4x^2}$ **0.5p**
- $f(x) = \ln(1+4x^2) + C$ **0.25p**
- $C = 0$ **0.25p**

b)
- Verificare condiţii Teorema de existenţă a funcţiilor implicite **0.75p**
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y(x)-1}{x} = y'(0)$ **0.5p**
- $y'(0) = 0$ **0.75p**

c)
- $t = \ln\dfrac{1}{x}$ **0.5p**
- $I = \int\limits_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}}e^{-t}dt = \Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right)$ **1.5p**
- $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ **1p**

Subiectul 2. Se consideră funcţiile

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=e^{x^2+y^2} \text{ şi } g:(0,\infty)\times(0,\infty)\to\mathbb{R},\ g(x,y)=xy^3 f(\sqrt{xy},\sqrt{xy}).$$

a) Calculaţi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+y^4}{f(x,y)-1}$.

b) Determinaţi punctele de extrem local ale funcţiei f, aflate pe dreapta $x+y=1$.

c) Scrieţi polinomul Taylor de grad 2 asociat funcţiei g în jurul punctului $(1,1)$.

d) Calculaţi $\dfrac{\partial^n g}{\partial y^n}(x,y),\ n\in\mathbb{N}^*$.

Barem

Start **1p**

a)
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}=1$ **0.75p**
- Limita devine $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$ **0.25p**
- $0\le\left|\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right|\le x^2+y^2$ **0.75p**
- Valoarea limitei este egală cu 0 .... **0.25p**

b)
- Funcţia lui Lagrange este $F(x,y)=e^{x^2+y^2}+\lambda(x+y-1)$ **0.5p**
- Punctul critic $A\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right), \lambda=-\sqrt{e}$ **1p**
- Diferenţiala legăturii este $d^2F\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)=4\sqrt{e}dx^2$ **1p**
- Se obţine că A este punct de minim local condiţionat **0.5p**

Sau

- $x+y=1\to y=1-x$ şi $f(x)=e^{x^2+(1-x)^2},\ x\in\mathbb{R}$ **0.5p**
- Punctul critic $x=\dfrac{1}{2}$ **1p**
- Testarea $f''\left(\dfrac{1}{2}\right)=4\sqrt{e}>0$ **1p**
- Se obţine că A este punct de minim local condiţionat **0.5p**

c)
- Calculul derivatelor parţiale de ordinul I **0.5p**
- Calculul derivatelor parţiale de ordinul II **0.75p**
- Formula lui Taylor **0.25p**
- $T_2(x,y)=e^2\left[1+3(x-1)+5(y-1)+4(x-1)^2+17(x-1)(y-1)+11(y-1)^2\right]$ **0.5p**

d)
- Formula Leibniz **0.25p**
- $\left(e^{2xy}\right)^{(k)}_{y^k}=(2x)^k e^{2xy}$ **0.75p**
- $\dfrac{\partial^n g}{\partial y^n}=(2x)^{n-2}e^{2xy}\left[4x^2y^2+6nx^2y^2+3n(n-1)xy+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{2}\right]$ **1p**

Subiectul 3. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $v_1 = (1, 0, -1)$ şi $v_2 = (1, -1, 0)$ sunt vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = 1$, iar $v_3 = (1, 1, 1)$ este vector propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_2 = 0$. Fie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplicaţia liniară ce are pe $3A$ ca matrice în baza canonică a spaţiului $\mathbb{R}^3$.

a) Demonstraţi că

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Calculaţi A^{2023}.

c) Există vectori de forma $v = (a + b,\ a - b,\ a)$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, care aparţin nucleului aplicaţiei liniare T? Dar pentru ca v să aparţină imaginii? În caz afirmativ, aflaţi aceşti vectori.

d) Aflaţi matricea aplicaţiei liniare T în baza:

$$B = \{e_1' = (1, 1, 0),\ e_2' = (1, 0, 1),\ e_3' = (0, 1, 1)\}.$$

Barem:

Start **1p**

a)
- $\lambda_1 = 1,\ m_g = m_a = 2$ şi $\lambda_2 = 0$ deci A diagonalizabilă **0.5p**
- $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **0.5p**
- $A = CDC^{-1}$ **1p**
- Determinare C^{-1} **0.5p**
- Determinare A **0.5p**

b)
- $A^{2023} = CD^{2023}C^{-1}$ **0.5p**
- $D^{2023} = D$ **0.25p**
- $A^{2023} = A$ **0.25p**

c)
- $T(a + b, a - b, a) = (0, 0, 0)$ **0.5p**
- Sistemul pentru aflarea valorilor $a,\ b$ **0.5p**
- $v = (a, a, a),\ a \in \mathbb{R}$ **0,25p**
- $\exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ astfel încât $T(x, y, z) = (a + b, a - b, a)$ **0.5p**
- Sistemul pentru determinarea $a,\ b$ **0.5p**
- $v = (b, -b, 0) \in Im\ f$ pentru $\forall a \in \mathbb{R}$ **0.25p**

d)
- S matricea de trecere de la B_{can} la baza B **0.5p**
- $M_B^T = S^{-1} \cdot M_{B_{can}}^T \cdot S$ **1p**
- determinare S^{-1} **0.5p**
- determinare M_B^T **0.5p**

Subiectul 4. Se consideră sfera $S: x^2+y^2+z^2-2x-2y-3=0$ şi dreapta $d: \begin{cases} x-z=0 \\ 2x-y-3=0 \end{cases}$.

a) Determinaţi intersecţia sferei S cu dreapta d.

b) Determinaţi ecuaţia simetricei sferei S faţă de dreapta d.

c) Aflaţi ecuaţiile planelor perpendiculare pe dreapta d, a căror intersecţie cu sfera S este un cerc de rază $r=2$.

d) Determinaţi punctele M de pe dreapta d astfel încât triunghiul MO_1O_2 să fie echilateral, unde O_1 şi O_2 sunt centrele celor două sfere.

Barem:
Start **1p**

a)
- Sistemul pentru $d \cap S$ **0.5p**
- Rezolvarea sistemului prin orice metodă **1.5p**

b)
- Centrul sferei este $O_1(1,1,0)$ şi $R=\sqrt{5}$. **0.5p**
- Planul perpendicular pe dreapta d $\pi': x+2y+z-3=0$ **0.5p**
- Proiecţia este $\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$ **1p**
- Simetricul punctului O_1 faţă de d este $O_2\,(2,-1,3)$ **0.5p**
- Ecuaţia sferei simetrice este $S_2: (x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=5$ **0.5p**

c)
- Ecuaţia planelor perpendiculare pe dreapta d are forma $\pi: x+2y+z+d=0$ **0.5p**
- Distanţa de la centrul sferei la planul π este egală cu 1 .... **0.75p**
- Se obţine $\frac{|3+d|}{\sqrt{1+4+1}}=1 \to |3+d|=\sqrt{6} \to d_1=\sqrt{6}-3,\ d_2=-\sqrt{6}-3$ **0.5p**
- Planele: $\pi_1: x+2y+z+\sqrt{6}-3=0,\ \pi_2: x+2y+z-\sqrt{6}-3=0$ **0.25p**

d)
- Deoarece $M \in d \to \exists t_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $M(t_0, 2t_0-3, t_0)$ **0.25p**
- Triunghiul MO_1O_2 este isoscel **0.25p**
- MO_1O_2 echilateral rezultă $m(\widehat{MO_1O_2})=60°$ **0.25p**
- Observăm că $\overrightarrow{O_1O_2}=(1,\ -2,\ 3)$ şi $\overrightarrow{O_1M}=(t_0-1,\ 2t_0-4,\ t_0)$ **0.25p**
- $\frac{t_0-1-4t_0+8+3t_0}{\sqrt{14}\sqrt{(t_0-1)^2+(2t_0-4)^2+t_0^2}}=\frac{1}{2}$ **0.5p**
- Determinarea soluţiilor **0.25p**
- Determinarea punctelor **0.25p**

Observaţie: Orice altă metodă de rezolvare se va puncta corespunzător.