Concursul Naţional Studenţesc de Matematică „Traian Lalescu"

Secţiunile **D** şi **E**

Iaşi, 4-6 Mai 2023

Subiectul 1. Fie f_1, f_2 două funcţii olomorfe în $\mathbb{C}$, astfel încât

(i) $\operatorname{Re}(f_1 - f_2)(x,y) = \varphi(x^2 - y^2)$ pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, unde $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$;

(ii) $\operatorname{Im}(f_1 + f_2)(x,y) = 2e^x \cos y$ pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;

(iii) $f_1(0) = f_2(0) = i$.

a) Să se determine funcţiile f_1 şi f_2;

b) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia $f_1(z) + f_2(-z) = 2i$;

c) Fie $g(x) = \operatorname{Re}\big((f_1 + f_2)(inx)\big),\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze

$$\int_0^{2\pi} \frac{g(x)}{5 - 4\sin x}\, dx.$$

Soluţie:

Consideră $f_1(z) = u_1(x,y) + iv_1(x,y)$ şi $f_2(z) = u_2(x,y) + iv_2(x,y)$, cu $x + iy = z$.

a) Impune condiţia u_1 şi u_2 armonice şi obţine

$\varphi(x^2 - y^2) = a(x^2 - y^2) + b,\ a, b \in \mathbb{R}$ **1p**

Derivează (i) şi (ii) în raport cu x şi y, apoi utilizează condiţiile Cauchy-Riemann. **0,5p**

Obţine $f_1(z) = \dfrac{az^2}{2} + ie^z + c_1,\ c_1 \in \mathbb{C}$ **1p**

Obţine $f_2(z) = -\dfrac{az^2}{2} + ie^z + c_2,\ c_2 \in \mathbb{C}$ **1p**

Determină $c_1 = c_2 = 0$. **0,5p**

b) $f_1(z) + f_2(-z) = i\big(e^z + e^{-z}\big)$. **0,5p**

$e^z = 1$ **1p**

Obţine $z = 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$ **0,5p**

c) $g(x) = -2\sin(nx)$ **0,5p**

Formează integrala $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{-2e^{inx}}{5 - 4\sin x}\,\mathrm{d}x$ **0,5p**

Substituie $e^{ix} = z$ şi obţine $I = \displaystyle\int_{|z|=1} \frac{2 \cdot z^n}{2z^2 - 5iz - 2}\,\mathrm{d}z$ **0,5p**

Alege polul simplu $\dfrac{i}{2}$ în interiorul curbei şi calculează reziduul în $\dfrac{i}{2}$ **0,5p**

Obţine $I = \dfrac{-\pi}{3 \cdot 2^{n-2}}\left(\cos\dfrac{n\pi}{2} + i\sin\dfrac{n\pi}{2}\right)$ **1,5p**

Obţine valoarea integralei cerute: $\dfrac{-\pi}{3 \cdot 2^{n-2}}\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ **0,5p**

Subiectul 2. Să se calculeze

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{(z^3+z+1)\cos\dfrac{\pi}{z}}{(z-3)(z^5-z^3+1)}\,dz.$$

Soluţie:

- $z=0$ punct singular esenţial situat în interiorul curbei de integrare .... **0,5 p**
- $z=3$ pol simplu (nu este soluţie pentru ecuaţiile $z^5-z^3+1=0$ şi $z^3+z+1=0$) situat în exteriorul curbei de integrare .... **0,5 p**
- rădăcinile ecuaţiei $z^5-z^3+1=0$, notate cu z_k, $k=\overline{1,5}$, sunt poli simpli ($z_k^3+z_k+1\neq 0$ şi $5z_k^4-3z_k^2\neq 0$ pentru orice $k=\overline{1,5}$) .... **0,5 p**

Demonstrează $|z_k|<2$ pentru orice $k=\overline{1,5}$ .... **2,5 p**

Din Teorema Reziduurilor, rezultă

$I=2\pi i\left(\text{Rez}(f;0)+\sum\limits_{k=1}^{5}\text{Rez}(f;z_k)\right)$. .... **1 p**

Deoarece suma tuturor reziduurilor în punctele singulare finite şi în punctul de la infinit este nulă, obţinem

$I=-2\pi i\,\big(\text{Rez}(f;3)+\text{Rez}(f;\infty)\big)$ .... **1 p**

Calculează

$\text{Rez}(f;3)=\lim\limits_{z\to 3}(z-3)\dfrac{(z^3+z+1)\cos\dfrac{\pi}{z}}{(z-3)(z^5-z^3+1)}=\dfrac{1}{14}$. .... **1 p**

$\text{Rez}(f;\infty)=\text{Rez}(g,0)=0$, unde $g(w)=-\dfrac{1}{w^2}f\left(\dfrac{1}{w}\right)$ .... **2 p**

Obţine valoarea integralei $I=-\dfrac{\pi i}{7}$ .... **1 p**

Subiectul 3. Să se determine, în clasa originalelor Laplace, soluţia ecuaţiei diferenţiale

$$x''(t) + 2x'(t-1) + x(t-2) = 1$$

care satisface $x(0) = x'(0) = 0$.

Soluţie: Notăm $\mathcal{L}\{x(t)\}[s] = F(s)$. Foloseşte teorema de derivare a originalului şi teorema întârzierii în timp, şi găseşte

$\mathcal{L}\{x(t-2)\}[s] = e^{-2s}F(s)$

$\mathcal{L}\{x'(t)\}[s] = sF(s)$

$\mathcal{L}\{x'(t-1)\}[s] = s\,e^{-s}F(s)$ .... **1 p**

$\mathcal{L}\{x''(t)\}[s] = s^2F(s)$

$\mathcal{L}\{1\}[s] = \dfrac{1}{s}$, $\operatorname{Re} s > 0$

Aplică transformarea Laplace asupra ecuaţiei date şi găseşte

$F(s) = \dfrac{1}{s^3} \cdot \dfrac{1}{\left(1 + \frac{e^{-s}}{s}\right)^2}$ .... **2 p**

Foloseşte seria geometrică $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n = \dfrac{1}{1+z}$, $|z| < 1$, şi seria obţinută prin derivare $\dfrac{1}{(1+z)^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^n$, $|z| < 1$. .... **1 p**

Obţine $F(s) = \dfrac{1}{s^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\left(\dfrac{e^{-s}}{s}\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\dfrac{e^{-ns}}{s^{n+3}}$ .... **3 p**

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^{n+3}}\right\}[t] = \dfrac{t^{n+2}}{(n+2)!}$ .... **1 p**

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-ns}}{s^{n+3}}\right\}[t] = \dfrac{1}{(n+2)!}(t-n)^{n+2}\eta(t-n)$ unde $\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$ .... **1 p**

Aplică transformarea inversă Laplace şi găseşte soluţia $x(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+1}{(n+2)!}(t-n)^{n+2}\eta(t-n) = \sum\limits_{n=0}^{[t]}(-1)^n\dfrac{n+1}{(n+2)!}(t-n)^{n+2}\eta(t-n)$, $t > 0$. .... **1 p**

Subiectul 4. a) Să se demonstreze că $\dfrac{\pi - x}{2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n}$, pentru orice $x \in (\,0, 2\pi\,)$;

b) Să se demonstreze că $\dfrac{\pi}{2} - x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(2nx)}{n}$, pentru orice $x \in (\,0, \pi\,)$;

c) Să se calculeze $S = 1 - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{11} + \dfrac{1}{13} - \dots$.

Soluţie: a) Dezvoltă în serie Fourier de sinusuri funcţia $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$. Obţine apoi valoarea coeficienţilor $b_n = \dfrac{(-1)^n + 1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. **2p**

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n + 1}{n} \sin\left(\frac{nx}{2}\right) = \sum_{n=2k} \frac{2}{2k} \sin(kx) + \sum_{n=2k+1} 0 = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n}$$ **2p**

b) $x \to 2x$ în egalitatea de la a) şi obţine $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2} = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\sin(2nx)}{2n}$ **2p**

c) Diferenţa relaţiilor obţinute la a) şi la b) şi obţine: $\dfrac{\pi}{4} = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$, $\forall x \in (0, \pi)$ **2p**

Alege $x = \dfrac{\pi}{3}$ şi obţine $S = \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$ .... **(2p)**

Notă: Orice altă soluţie corectă va fi notată corespunzător.