



# Concursul Național Studentesc de Matematică „Traian Lalescu”

## Secțiunea A

Iași, 4-6 Mai 2023

**Subiectul 1.** Rezolvați în  $\mathbb{Z}_{2023}$  ecuația  $x^{2023} = 38$ .

**Subiectul 2.** Fie  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  astfel încât există  $a, b \in \mathbb{C}$  și  $c \in \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$  pentru care

$$aA + bB = (1 - c)AB + cBA.$$

Arătați că  $(AB - BA)^n = O_n$ .

**Subiectul 3.** Fie  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție derivabilă pe  $[0, 1]$ , cu derivata continuă și  $f(0) = f(1) = 0$ .  
Demonstrați că

$$\left( \int_0^1 x^2 f(x) \, dx \right)^2 \leq \frac{1}{112} \int_0^1 (f'(x))^2 \, dx.$$

**Subiectul 4.** Fie  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  o funcție crescătoare. Să se demonstreze că dacă

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1,$$

atunci  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{a^x} = 0$ , oricare ar fi  $a > 1$ .

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii și se notează cu punctaje cuprinse între 0 și 10.

**Timp de lucru:** 4 ore.