Universitatea Tehnică „Gheorghe Asachi” din Iaşi
FUNDATIA TRAIAN LALESCU DE LA MATEMATICA... SPRE LUME
MINISTERUL EDUCAȚIEI

Concursul Naţional Studenţesc de Matematică “Traian Lalescu”

Secţiunea **B**

Iaşi, 4-6 Mai 2023

Problema 1. *Fie matricele* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *astfel ca* $AB = A$ *şi* $BA = B$*. Considerăm funcţiile:*

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \operatorname{Tr}\big((1-z)A + zB\big), \quad z \in \mathbb{C},\\ &g : \mathbb{C} \to \mathbb{N}, \quad g(z) = \operatorname{rang}\big((1-z)A + zB\big), \quad z \in \mathbb{C},\\ &h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad h(z) = \det\big((1-z)A + zB\big), \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Arătaţi că funcţiile f, g *şi* h *sunt constante.*

Problema 2. *Fie* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *o matrice de rang 1 astfel încât* $\operatorname{Tr} A \in \mathbb{R}$ *şi există* $a, b \in \mathbb{C}$ *cu* $|a| = 1$ *astfel încât*

$$A^2 + aAA^* + aA^*A + b(A^*)^2 = \mathcal{O}_n,$$

unde $A^* = \bar{A}^T$*. Arătaţi că există* $u \in \mathbb{C}^n$ *astfel încât* $A = \pm u \cdot \bar{u}^T$*.*

Problema 3. *Fie* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *o funcţie derivabilă, cu* f' *continuă şi* $f(0) = f(1) = 0$*. Arătaţi că*

$$\left(\int_0^1 x^2 f(x)\ dx\right)^2 \le \frac{1}{112}\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx.$$

Problema 4. *Considerăm funcţia continuă şi strict crescătoare* $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *care satisface* $f(0) = 0$ *şi* $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$*.*

a) Arătaţi că f *este bijectivă şi că seria de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} x^{f(n)}$ *este convergentă pentru orice* $x \in (-1, 1)$*.*

b) Notăm inversa funcţiei f *cu* g*, iar suma seriei de puteri anterioare cu* h*. Presupunem că*

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), \quad \forall x, y \ge 0.$$

Calculaţi $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} g(1-x) \cdot h(x)$*.*

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi se notează cu punctaje cuprinse între 0 şi 10.

Timp de lucru: 4 ore.