Concursul Naţional Studenţesc de Matematică „Traian Lalescu”

Secţiunea **C**

Iaşi, 4-6 Mai 2023

Subiectul 1. Fie seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{4^n}{n}x^{2n}$.

a) Aflaţi mulţimea de convergenţă a seriei şi arătaţi că suma ei pe mulţimea de convergenţă este

$$f(x) = \ln(1+4x^2).$$

b) Arătaţi că ecuaţia $f(x) - e^{x^2+y^2} + ey = 0$ defineşte o unică funcţie $y = y(x)$ în vecinătatea punctului $(0,1)$ şi calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{y(x)-1}{x}$.

c) Calculaţi $I = \int\limits_0^1 \sqrt{\ln\frac{1}{x}}dx$.

Subiectul 2. Se consideră funcţiile

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = e^{x^2+y^2} \text{ şi } g : (0,\infty)\times(0,\infty) \to \mathbb{R},\ g(x,y) = xy^3 f(\sqrt{xy}, \sqrt{xy}).$$

a) Calculaţi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4+y^4}{f(x,y)-1}$.

b) Determinaţi punctele de extrem local ale funcţiei f, aflate pe dreapta $x + y = 1$.

c) Scrieţi polinomul Taylor de grad 2 asociat funcţiei g în jurul punctului $(1,1)$.

d) Calculaţi $\frac{\partial^n g}{\partial y^n}(x,y),\ n \in \mathbb{N}^*$.

Subiectul 3. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $v_1 = (1,0,-1)$ şi $v_2 = (1,-1,0)$ sunt vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = 1$, iar $v_3 = (1,1,1)$ este vector propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_2 = 0$. Fie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplicaţia liniară ce are pe $3A$ ca matrice în baza canonică a spaţiului $\mathbb{R}^3$.

a) Demonstraţi că

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Calculaţi A^{2023}.

c) Există vectori de forma $v = (a+b,\ a-b,\ a)$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, care aparţin nucleului aplicaţiei liniare T? Dar pentru ca v să aparţină imaginii? În caz afirmativ, aflaţi aceşti vectori.

d) Aflaţi matricea aplicaţiei liniare T în baza:

$$B = \{e_1' = (1,1,0),\ e_2' = (1,0,1),\ e_3' = (0,1,1)\}.$$

Subiectul 4. Se consideră sfera $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 3 = 0$ şi dreapta $d : \begin{cases} x - z = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$.

a) Determinaţi intersecţia sferei S cu dreapta d.

b) Determinaţi ecuaţia simetricei sferei S faţă de dreapta d.

c) Aflaţi ecuaţiile planelor perpendiculare pe dreapta d, a căror intersecţie cu sfera S este un cerc de rază $r = 2$.

d) Determinaţi punctele M de pe dreapta d astfel încât triunghiul MO_1O_2 să fie echilateral, unde O_1 şi O_2 sunt centrele celor două sfere.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi se notează cu punctaje cuprinse între 0 şi 10.

Timp de lucru: 4 ore.