Universitatea Tehnică „Gheorghe Asachi" din Iaşi — FUNDAŢIA TRAIAN LALESCU DE LA MATEMATICA... SPRE LUME — MINISTERUL EDUCAŢIEI

Concursul Naţional Studenţesc de Matematică Traian Lalescu

Secţiunile **D** şi **E**

Iaşi, 4-6 Mai 2023

Subiectul 1. Fie f_1, f_2 două funcţii olomorfe în $\mathbb{C}$, astfel încât

(i) $\operatorname{Re}(f_1 - f_2)(x,y) = \varphi(x^2 - y^2)$ pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, unde $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$,

(ii) $\operatorname{Im}(f_1 + f_2)(x,y) = 2e^x \cos y$ pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

(iii) $f_1(0) = f_2(0) = i$.

a) Să se determine funcţiile f_1 şi f_2;

b) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia $f_1(z) + f_2(-z) = 2i$

c) Fie $g(x) = \operatorname{Re}\big((f_1 + f_2)(inx)\big),\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze

$$\int_0^{2\pi} \frac{g(x)}{5 - 4\sin x}\, dx.$$

Subiectul 2. Să se calculeze

$$\int_{|z|=2} \frac{(z^3 + z + 1)\cos\dfrac{\pi}{z}}{(z-3)(z^5 - z^3 + 1)}\, dz.$$

Subiectul 3. Să se determine, în clasa originalelor Laplace, soluţia ecuaţiei diferenţiale

$$x''(t) + 2x'(t-1) + x(t-2) = 1$$

care satisface $x(0) = x'(0) = 0$.

Subiectul 4. a) Să se demonstreze că $\dfrac{\pi - x}{2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n}$, pentru orice $x \in [0, 2\pi)$;

b) Să se demonstreze că $\dfrac{\pi}{2} - x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(2nx)}{n}$, pentru orice $x \in [0, \pi)$;

c) Să se calculeze $S = 1 - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{11} + \dfrac{1}{13} - \dots$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi se notează cu punctaje cuprinse între 0 şi 10.

Timp de lucru: 4 ore.