SEMINAR NR. 10, REZOLVĂRI
Algebră liniară şi Geometrie analitică

8. REPERE ÎN PLAN ŞI SPAŢIU

Schimbarea reperelor ortonormate în plan.

Fie $\mathcal{R} = \left(O; \underbrace{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}}_{S}\right)$ şi $\mathcal{R}' = \left(O'; \underbrace{\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}}_{S'}\right)$ două repere ortonormare în plan. Trecerea de la reperul $\mathcal{R}$ la reperul $\mathcal{R}'$ este dată de

•translaţia de reper

$\overrightarrow{OO\prime} = x_0 \overrightarrow{i} + y_0 \overrightarrow{j}$

şi/sau

•rotaţia (schimbarea centro-afină) de reper

$$\begin{cases} \overrightarrow{i'} = a_{11} \overrightarrow{i} + a_{21} \overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{j'} = a_{12} \overrightarrow{i} + a_{22} \overrightarrow{j}, \end{cases} \Rightarrow \mathbf{A} =_S \mathbf{A}_{S'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

iar schimbarea de coordonate de

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

(x_1, y_1) sunt coordonatele unui punct oarecare M în reperul $\mathcal{R}$ iar (x_2, y_2) sunt coordonatele aceluiaşi punct M în reperul $\mathcal{R}'$.

Deoarece $\mathbf{A}$ este matricea de trecere de la baza ortonormată $S = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ la baza ortonormată $S' = \left(\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}\right) \Rightarrow \mathbf{A}$ este matrice ortogonală, adică $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_2$. În consecinţă, elementele matricei $\mathbf{A}$ depind de un singur parametru α, adică

• sau $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, dacă $(\mathcal{R}, \mathcal{R}')$ sunt la fel orientate ($\det \mathbf{A} = 1 > 0$). În acest caz $\alpha = \left(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i'}}\right) \in [0, \pi]$ şi $\left(\widehat{\overrightarrow{j'}, \overrightarrow{i}}\right) = \frac{\pi}{2} + \alpha$, $\left(\widehat{\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j}}\right) = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\left(\widehat{\overrightarrow{j'}, \overrightarrow{j}}\right) = -\alpha$.

• sau $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$, dacă $(\mathcal{R}, \mathcal{R}')$ sunt la contrar orientate ($\det \mathbf{A} = -1 < 0$). În acest caz $\alpha = \left(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i'}}\right) \in [0, \pi]$ şi $\left(\widehat{\overrightarrow{j'}, \overrightarrow{i}}\right) = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\left(\widehat{\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j}}\right) = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\left(\widehat{\overrightarrow{j'}, \overrightarrow{j}}\right) = -(\pi - \alpha)$.

Schimbarea reperelor ortonormate în spaţiu.

Fie $\mathcal{R} = \left(O; \underbrace{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}}_{S}\right)$ şi $\mathcal{R}' = \left(O'; \underbrace{\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'}}_{S'}\right)$ două repere ortonormare în spaţiu. Trecerea de la reperul $\mathcal{R}$ la reperul $\mathcal{R}'$ este dată de

•translaţia de reper

$\overrightarrow{OO\prime} = x_0 \overrightarrow{i} + y_0 \overrightarrow{j} + z_0 \overrightarrow{k}$

şi/sau

•rotaţia (schimbarea centro-afină) de reper

$$\begin{cases} \overrightarrow{i'} = a_{11}\overrightarrow{i} + a_{21}\overrightarrow{j} + a_{31}\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{j'} = a_{12}\overrightarrow{i} + a_{22}\overrightarrow{j} + a_{32}\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{k'} = a_{13}\overrightarrow{i} + a_{23}\overrightarrow{j} + a_{33}\overrightarrow{k} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{A} =_S \mathbf{A}_{S'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

iar schimbarea de coordonate de

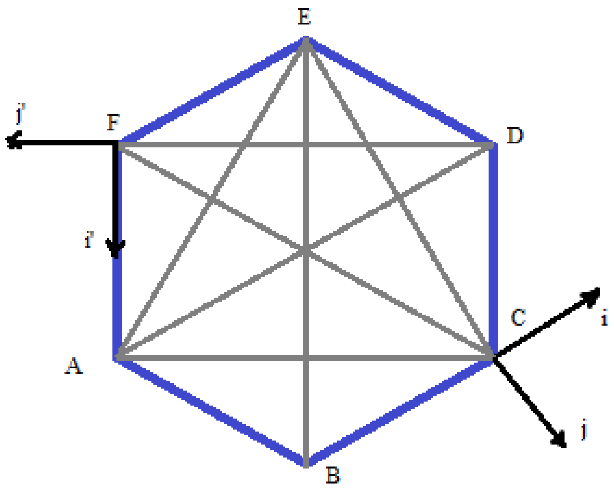
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

(x_1, y_1, z_1) sunt coordonatele unui punct oarecare M în reperul $\mathcal{R}$ iar (x_2, y_2, z_2) sunt coordonatele aceluiaşi punct M în reperul $\mathcal{R}'$.

Deoarece $\mathbf{A}$ este matricea de trecere de la baza ortonormată $S = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ la baza ortonormată $S' = \left(\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'}\right) \Rightarrow \mathbf{A}$ este matrice ortogonală, adică $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_3$.. În consecinţă, elementele matricei $\mathbf{A}$ depind de trei parametri, adică

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\left(\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{i}\right) & \cos\left(\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j}\right) & \cos\left(\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{k}\right) \\ \cos\left(\overrightarrow{j'}, \overrightarrow{i}\right) & \cos\left(\overrightarrow{j'}, \overrightarrow{j}\right) & \cos\left(\overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k}\right) \\ \cos\left(\overrightarrow{k'}, \overrightarrow{i}\right) & \cos\left(\overrightarrow{k'}, \overrightarrow{j}\right) & \cos\left(\overrightarrow{k'}, \overrightarrow{k}\right) \end{pmatrix}.$$

Exerciţiul 1. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat având lungimea laturii egală cu 1 şi $\mathcal{R}$ un reper ortonormat cu originea în punctul C, $\mathcal{R} = \left(C, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, în care vectorul $\overrightarrow{i}$ este coliniar şi are acelaşi sens cu $\overrightarrow{BC}$, iar versorul $\overrightarrow{j}$ este coliniar şi are acelaşi sens cu $\overrightarrow{EC}$. Fie $\mathcal{R}'$ un reper ortonormat cu originea în punctul F, $\mathcal{R}' = \left(F, \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}\right)$, în care versorul $\overrightarrow{i'}$ este coliniar şi are acelaşi sens cu $\overrightarrow{FA}$, iar versorul $\overrightarrow{j'}$ este coliniar şi are acelaşi sens cu $\overrightarrow{DF}$. Să se determine:
a) translaţia şi rotaţia care duc reperul $\mathcal{R}$ în reperul $\mathcal{R}'$;
b) legătura dintre coordonatele unui punct oarecare din plan în cele două repere;
c) coordonatele punctelor A şi B în cele două repere.
Rezolvare.



a) Reperul $\mathcal{R} = \left(C, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ este dus în reperul $\mathcal{R}' = \left(F, \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}\right)$ prin
•translaţia dată de

$$\overrightarrow{CF} = \underbrace{-1}_{\pm \text{ lung. proiecţiei lui } \overrightarrow{CF} \text{ pe } \overrightarrow{i}} \overrightarrow{i} + \underbrace{-2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}_{\pm \text{ lung. proiecţiei lui } \overrightarrow{CF} \text{ pe } \overrightarrow{j}} \overrightarrow{j},$$

•rotaţia dată de

$$\begin{cases} \overrightarrow{i'} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{j'} = \frac{-\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{i} + \frac{-1}{2}\overrightarrow{j} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{A} =_S \mathbf{A}_{S'} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

sau

$$\alpha = \left(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i'}}\right) = \frac{2\pi}{3} \in [0, \pi], \left(\widehat{\overrightarrow{j'}, \overrightarrow{j}}\right) = -\alpha$$

(repere la fel orientate din figură), adică

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}.$$

b) Fie (x_1, y_1) coordonatele unui punct oarecare M în reperul $\mathcal{R}$ iar (x_2, y_2) coordonatele aceluiaşi punct M în reperul $\mathcal{R}'$. Atunci schimbarea de coordonate este dată de

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-1}{2}x_2 + \frac{-\sqrt{3}}{2}y_2 - 1 \\ y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 + \frac{-1}{2}y_2 - \sqrt{3}. \end{cases}$$

c) $\begin{cases} \overrightarrow{CA} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{i} \end{cases}$ şi $\begin{cases} \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{i'} \\ \overrightarrow{FB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{i'} - \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{j'} \end{cases}$.

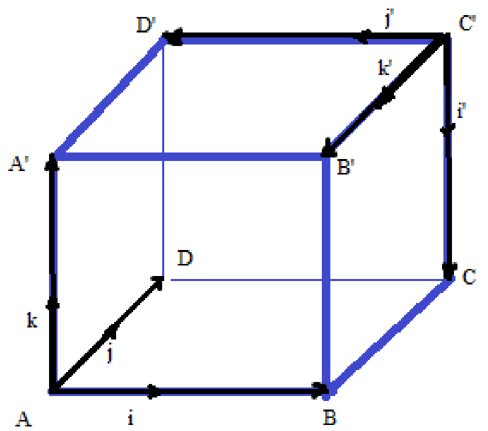
Exerciţiul 2. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ de latură 1. Considerăm reperul $\mathcal{R} = \left(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ unde $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{k}$ şi reperul $\mathcal{R}' = (C', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'})$ unde $\overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{i'}$, $\overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{j'}$, $\overrightarrow{C'B'} = \overrightarrow{k'}$.

a) Să se arate că $S = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ şi $S' = \left(\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'}\right)$ sunt baze ortonormate.

b) Să se determine matricea $\mathbf{A}$ de trecere de la baza S la baza S'.

c) Să se verifice dacă matricea $\mathbf{A}$ este ortogonală.

Rezolvare.



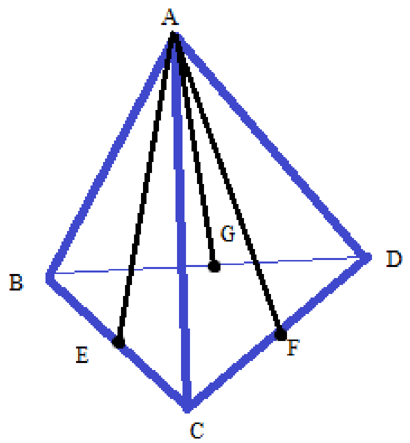
a) Sistemul de vectori $S = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ este bază în $\mathbb{V}_3$ deoarece

$$\begin{cases} \text{nr. vect. din } S = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V}_3 \\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k} \text{ sunt vectori l.i. pentru că sunt necoplanari.} \end{cases}$$

Mai mult, S este bază ortonormată, deoarece
$$\begin{cases} \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 1, \left\|\overrightarrow{AD}\right\| = 1, \left\|\overrightarrow{AA'}\right\| = 1 \\ \widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)} = \frac{\pi}{2}, \widehat{\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}\right)} = \frac{\pi}{2}, \widehat{\left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AB}\right)} = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$
Sistemul de vectori $S' = \left(\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'}\right)$ este bază în $\mathbb{V}_3$ deoarece
$$\begin{cases} \text{nr. vect. din } S = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V}_3 \\ \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'} \text{ sunt vectori l.i. pentru că sunt necoplanari.} \end{cases}$$
Mai mult, S' este bază ortonormată, deoarece
$$\begin{cases} \left\|\overrightarrow{C'C}\right\| = 1, \left\|\overrightarrow{C'D'}\right\| = 1, \left\|\overrightarrow{C'B'}\right\| = 1 \\ \widehat{\left(\overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{C'D'}\right)} = \frac{\pi}{2}, \widehat{\left(\overrightarrow{C'D'}, \overrightarrow{C'B'}\right)} = \frac{\pi}{2}, \widehat{\left(\overrightarrow{C'B'}, \overrightarrow{C'C}\right)} = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$
b) Cum $\begin{cases} \overrightarrow{i'} = 0\,\overrightarrow{i} + 0\,\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{j'} = -\overrightarrow{i} + 0\,\overrightarrow{j} + 0\,\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{k'} = 0\,\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 0\,\overrightarrow{k} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{A} =_S \mathbf{A}_{S'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

c) sau S, S' baze ortonormate$\Rightarrow_S \mathbf{A}_{S'}$ este matrice ortogonală;
sau verificăm
$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_3.$$
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_3.$$

Exerciţiul 3. Fie tetraedrul regulat $ABCD$ cu muchiile de lungime 1 şi E, F,G mijloacele laturilor BC, CD, respectiv BD. Notăm cu $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$.
a) Să se arate că $S = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ formează o bază în $\mathbb{V}_3$.
b) Să se determine măsurile unghiurilor $\widehat{EAG}, \widehat{EAF}$ şi $\widehat{FAG}$.
c) Fie $S' = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ baza ortonormată obţinută din S prin procedeul Gram-Schmidt. Să se determine matricea de trecere de la baza S la baza S'.
Rezolvare.



a) Sistemul de vectori $S = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ este bază în $\mathbb{V}_3$ deoarece

$$\begin{cases} \text{nr. vect. din } S = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V}_3 \\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \text{ sunt vectori l.i. pentru că sunt necoplanari.} \end{cases}$$

b) Se calculează

$$\begin{cases} \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}); \\ \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}); \\ \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{w} + \overrightarrow{u}). \end{cases}$$

Atunci

$$\cos\left(\widehat{EAG}\right) = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AG}}\right) = \frac{\left\langle \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AG} \right\rangle}{\left\|\overrightarrow{AE}\right\| \left\|\overrightarrow{AG}\right\|} =$$

$$= \frac{\left\langle \frac{1}{2}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}), \frac{1}{2}(\overrightarrow{w} + \overrightarrow{u}) \right\rangle}{\sqrt{\left\langle \frac{1}{2}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}), \frac{1}{2}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \right\rangle}\sqrt{\left\langle \frac{1}{2}(\overrightarrow{w} + \overrightarrow{u}), \frac{1}{2}(\overrightarrow{w} + \overrightarrow{u}) \right\rangle}} =$$

$$= \frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle + \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle + \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle}{\sqrt{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle + 2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle}\sqrt{\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{w} \rangle + 2\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle}} =$$

$$= \frac{1 \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{3} + 1^2 + 1 \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{3} + 1 \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{3}}{\sqrt{1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{3} + 1^2}\sqrt{1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{3} + 1^2}} = \frac{5}{6}.$$

$$\cos\left(\widehat{EAF}\right) = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}}\right) = \frac{\left\langle \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF} \right\rangle}{\left\|\overrightarrow{AE}\right\| \left\|\overrightarrow{AF}\right\|} = ... = \frac{5}{6}.$$

$$\cos\left(\widehat{FAG}\right) = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG}}\right) = \frac{\left\langle \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG} \right\rangle}{\left\|\overrightarrow{AF}\right\| \left\|\overrightarrow{AG}\right\|} = ... = \frac{5}{6}.$$

c) •Se determină $S_o = \left(\overrightarrow{i_o}, \overrightarrow{j_o}, \overrightarrow{k_o}\right)$ baza ortonormată obţinută din $S = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ prin procedeul Gram-Schmidt.

Etapa 0. Se observă că $S = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ este bază în $\mathbb{V}_3$.

Etapa 1. Se caută $\overline{S} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w_1})$ bază ortogonală în $\mathbb{V}_3$. Se găseşte

$\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{u}$.

$$\|\overrightarrow{u_1}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 = 1;$$

$$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u_1} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle = \|\overrightarrow{v}\| \|\overrightarrow{u}\| \cos\left(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}}\right) = 1 \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2};$$

$$\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u_1} \rangle = \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle = \|\overrightarrow{w}\| \|\overrightarrow{u}\| \cos\left(\widehat{\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}}\right) = 1 \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

$$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v} - \frac{\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u_1} \rangle}{\|\overrightarrow{u_1}\|^2}\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{v} - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{u}.$$

$$\|\overrightarrow{v_1}\|^2 = \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \rangle = \left\langle \overrightarrow{v} - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{u} \right\rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle - \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle + \tfrac{1}{4}\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle$$

$$= 1^2 - 1 \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}1^2 = \tfrac{3}{4}.$$

$$\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v_1} \rangle = \left\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{u} \right\rangle = \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle - \tfrac{1}{2}\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle = 1 \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}.$$

$$\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{w} - \frac{\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u_1} \rangle}{\|\overrightarrow{u_1}\|^2}\overrightarrow{u_1} - \frac{\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v_1} \rangle}{\|\overrightarrow{v_1}\|^2}\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{w} - \frac{\frac{1}{2}}{1}\overrightarrow{u} - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}\left(\overrightarrow{v} - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{u}\right)$$

$$= -\tfrac{1}{3}\overrightarrow{u} - \tfrac{1}{3}\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}.$$

$$\|\overrightarrow{w_1}\|^2 = \left\langle -\tfrac{1}{3}\overrightarrow{u} - \tfrac{1}{3}\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}, -\tfrac{1}{3}\overrightarrow{u} - \tfrac{1}{3}\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \right\rangle$$

$$= \left(-\tfrac{1}{3}\right)^2 \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle + \left(-\tfrac{1}{3}\right)^2 \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{w} \rangle +$$

$$+2\left(-\tfrac{1}{3}\right)\left(-\tfrac{1}{3}\right)\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + 2\left(-\tfrac{1}{3}\right)\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle + 2\left(-\tfrac{1}{3}\right)\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle$$

$$= \left(-\tfrac{1}{3}\right)^2 \cdot 1^2 + \left(-\tfrac{1}{3}\right)^2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1^2 + \tfrac{2}{9} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{2}{3}.$$

<u>Etapa 2.</u> Se caută $S_o = \left(\overrightarrow{i_o}, \overrightarrow{j_o}, \overrightarrow{k_o}\right)$ bază ortonormată în $\mathbb{V}_3$. Se găseşte

$$\begin{cases} \overrightarrow{i_o} = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{u_1}\|}\overrightarrow{u_1} = \dfrac{1}{\sqrt{1}}\overrightarrow{u}; \\ \overrightarrow{j_o} = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{v_1}\|}\overrightarrow{v_1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\left(\overrightarrow{v} - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{u}\right); \\ \overrightarrow{k_o} = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{w_1}\|}\overrightarrow{w_1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\left(-\tfrac{1}{3}\overrightarrow{u} - \tfrac{1}{3}\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\right). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{i_o} = \overrightarrow{u}; \\ \overrightarrow{j_o} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{u} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{v}; \\ \overrightarrow{k_o} = -\frac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{u} - \frac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{v} + \frac{3}{\sqrt{6}}\overrightarrow{w}. \end{cases}$$

•Matricea de trecere de la baza S la baza S_o este

$${}_S\mathbf{A}_{S_o} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$