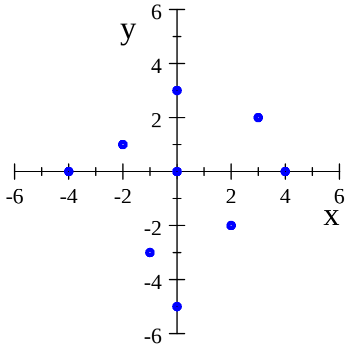
SEMINAR NR. 11, REZOLVĂRI
Algebră liniară şi Geometrie analitică

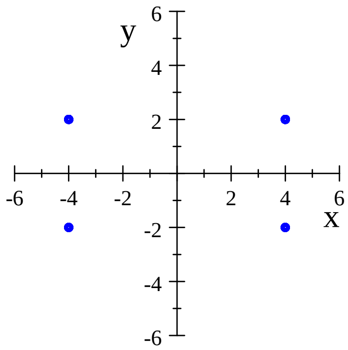
9. DREAPTA ÎN PLAN, ÎN $\mathbb{R}^2/\mathbb{V}_2$

Coordonate în plan. Distanţa dintre două puncte în plan- Recapitulare liceu.
Definiţii pentru *coordonate carteziene (abscisă, ordonată), axe, cadrane, simetricul unui punct faţă de* $O/Ox/Oy$ - vezi Curs.
Observaţie. Fie $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un reper ortonormat în $\mathbb{V}_2$. Se precizează legătura, prin reprezentare în plan, între $C = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ baza canonică, ortonormată, în $(\mathbb{V}_2, +, \cdot, \mathbb{R})$ şi $C = (\mathbf{e}_1 = (1,0), \mathbf{e}_2 = (0,1))$ baza canonică, ortonormată, în $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R}\right)$.



Pentru $M(x,y)$, x se numeşte *abscisă* şi y *ordonată.*
S-au reprezentat punctele
$M_1(3,2), M_2(-2,1), M_3(-1,-3), M_4(2,-2), M_5(4,0), M_6(0,3), M_7(-4,0), M_8(0,-5)$.
$M(x,y) \in$cadranul $I \Leftrightarrow x > 0, y > 0 : M_1$
$M(x,y) \in$cadranul $II \Leftrightarrow x < 0, y > 0 : M_2$
$M(x,y) \in$cadranul $III \Leftrightarrow x < 0, y < 0 : M_3$
$M(x,y) \in$cadranul $IV \Leftrightarrow x < 0, y > 0 : M_4$
$M(x,y) \in$axa $Ox \Leftrightarrow y = 0 : M_5, M_7$
$M(x,y) \in$axa $Oy \Leftrightarrow x = 0 : M_6, M_8$

$$M(x,y) \Rightarrow \begin{cases} N_1(-x,-y) \text{ este simetricul lui } M \text{ faţă de } O \\ N_2(-x,y) \text{ este simetricul lui } M \text{ faţă de } Oy \\ N_3(x,-y) \text{ este simetricul lui } M \text{ faţă de } O \end{cases}$$

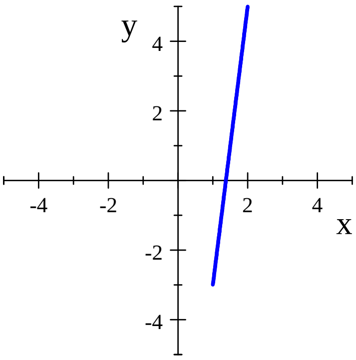


Definiţie. *Distanţa dintre două puncte din plan* $A(x_A, y_A)$ şi $B(x_B, y_B)$ este numărul real pozitiv:

(1) $$d(A,B) = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Exerciţiul 1. Să se calculeze distanţa dintre punctele $(1,-3)$ şi $(2,5)$.
Rezolvare. Fie $A(1,-3)$ şi $B(2,5)$. Atunci

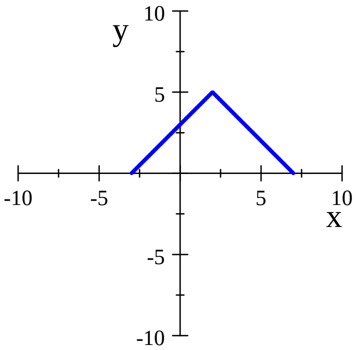
$$d(A,B) = AB = \sqrt{(2-1)^2 + (5-(-3))^2} = \sqrt{65}.$$



Exerciţiul 2. Să se determine abscisa punctului $P(x,0)$ dacă $PQ = 5\sqrt{2}$, unde $Q(2,5)$.
Rezolvare. Fie $P(x,0)$ şi $Q(2,5)$. Atunci

$$d(P,Q) = PQ = \sqrt{(2-x)^2 + (5-0)^2} = 5\sqrt{2} \Rightarrow$$
$$(2-x)^2 + 25 = 50 \Rightarrow (2-x)^2 = 25 \Rightarrow$$
$$|2-x| = 5 \Rightarrow (x_1 = 7 \text{ sau } x_2 = -3).$$

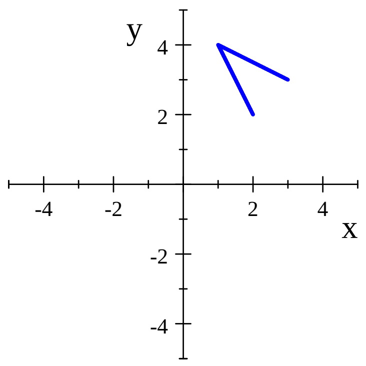
Există două puncte cu proprietatea cerută, $P_1(7,0)$ şi $P_2(-3,0)$.



Exerciţiul 3. Să se determine abscisa şi ordonata punctului $P(x,x)$ dacă $PQ = \sqrt{5}$, unde $Q(1,4)$.
Rezolvare. Fie $P(x,x)$ şi $Q(1,4)$. Atunci

$$d(P,Q) = PQ = \sqrt{(1-x)^2 + (4-x)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow$$
$$(1-x)^2 + (4-x)^2 = 5$$
$$2x^2 - 10x + 12 = 0 \Rightarrow (x_1 = 2 \text{ sau } x_2 = 3).$$

Există două puncte cu proprietatea cerută, $P_1(2,2)$ şi $P_2(3,3)$.

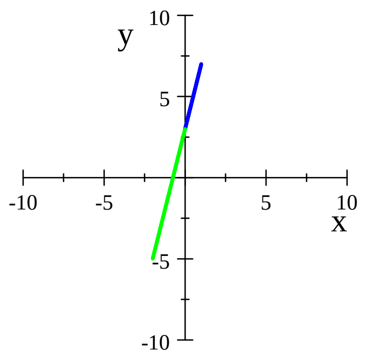


Exerciţiul 4. Să se stabilească dacă $A\,(1,7)$, $B\,(0,3)$, $C\,(-2,-5)$ sunt puncte coliniare.
Rezolvare. Se calculează:

$$d\,(A,B) = AB = \sqrt{(0-1)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{17};$$
$$d\,(B,C) = BC = \sqrt{(-2-0)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{68};$$
$$d\,(C,A) = CA = \sqrt{(1-(-2))^2 + (7-(-5))^2} = \sqrt{153}.$$

Se verifică dacă $\sqrt{17} + \sqrt{68} = \sqrt{153}$. Într-adevăr
$\left(\sqrt{17} + \sqrt{68}\right)^2 = 17 + 2\sqrt{17} \cdot \sqrt{4 \cdot 17} + 68 = 153.$

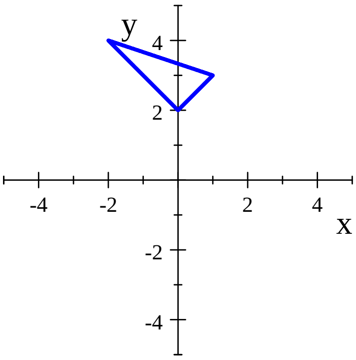
Deci $AB + BC = CA \Rightarrow A, B, C$ sunt coliniare în această ordine, cu B între A şi C.



Exerciţiul 5. Să se stabilească dacă $A\,(0,2)$, $B\,(-2,4)$, $C\,(1,3)$ sunt vârfurile unui triunghi dreptunghic.
Rezolvare. Se calculează:

$$d\,(A,B) = AB = \sqrt{(-2-0)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{2};$$
$$d\,(B,C) = BC = \sqrt{(1-(-2))^2 + (3-4)^2} = \sqrt{10};$$
$$d\,(C,A) = CA = \sqrt{(0-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{2}.$$

Se observă că $AB^2 + CA^2 = BC^2 \Rightarrow A, B, C$ sunt vârfurile unui triunghi dreptunghic în A.

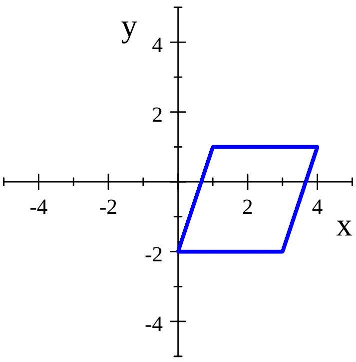


Exerciţiul 6. Să se demonstreze că $A(1,1)$, $B(4,1)$, $C(3,-2)$ şi $D(0,-2)$ sunt vârfurile unui paralelogram.

Rezolvare. Se calculează:

$$d(A,B) = AB = \sqrt{(4-1)^2 + (1-1)^2} = 3;$$
$$d(B,C) = BC = \sqrt{(3-4)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{10};$$
$$d(C,D) = CD = \sqrt{(0-3)^2 + (-2-(-2))^2} = 3;$$
$$d(D,A) = DA = \sqrt{(1-0)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{10}.$$

Se observă că $AB = CD$ şi $BC = AD \Rightarrow A, B, C, D$ sunt vârfurile unui paralelogram. Din calcule nu se obţine ordinea (adică dacă $ABCD$ este patrulater convex). Se poate reprezenta grafic:



Exerciţiul 7. Să se demonstreze că $A(1,2)$, $B(4,7)$, $C(-6,13)$ şi $D(-9,8)$ sunt vârfurile unui dreptunghi.

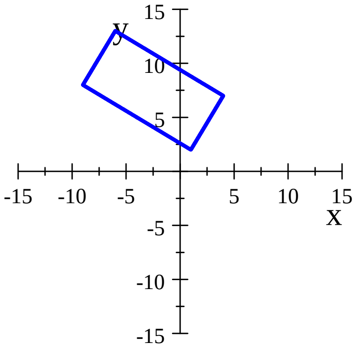
Rezolvare. Se calculează:

$$d(A,B) = AB = \sqrt{(4-1)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{34};$$
$$d(B,C) = BC = \sqrt{(-6-4)^2 + (13-7)^2} = 2\sqrt{34};$$
$$d(C,D) = CD = \sqrt{(-9-(-6))^2 + (8-13)^2} = \sqrt{34};$$
$$d(D,A) = DA = \sqrt{(1-(-9))^2 + (2-8)^2} = 2\sqrt{34}.$$

Se observă că $AB = CD$ şi $BC = AD \Rightarrow A, B, C, D$ sunt vârfurile unui paralelogram. Mai mult,

$d(B,D) = BD = \sqrt{(-9-4)^2 + (8-7)^2} = \sqrt{170}$ şi
$AB^2 + AD^2 = BD^2 \Leftrightarrow \mu\left(\widehat{BAD}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Deci $ABCD$ este dreptunghi, în această ordine. Grafic:

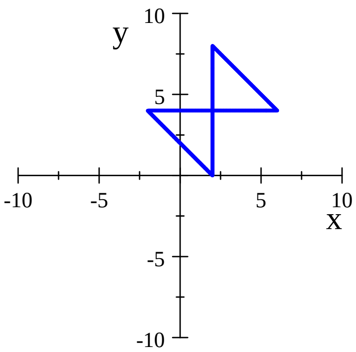


Exerciţiul 8. Să se demonstreze că $A(-2,4)$, $B(2,0)$, $C(2,8)$ şi $D(6,4)$ sunt vârfurile unui pătrat.
Rezolvare. Se calculează:

$d(A,B) = AB = \sqrt{(2-(-2))^2 + (0-4)^2} = 4\sqrt{2}$;
$d(B,C) = BC = \sqrt{(2-2)^2 + (8-0)^2} = 8$;
$d(C,D) = CD = \sqrt{(6-2)^2 + (4-8)^2} = 4\sqrt{2}$;
$d(D,A) = DA = \sqrt{(-2-6)^2 + (4-4)^2} = 8$.

Se observă că $AB = CD$ şi $BC = AD$, dar $AB \neq BC \Rightarrow A, B, C, D$ sunt vârfurile unui triunghi paralelogram, dar poate nu în această ordine.

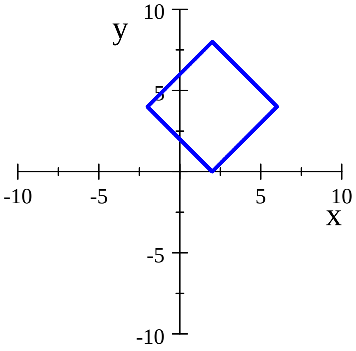
Se poate reprezenta grafic:



Sau se poate calcula:

$d(B,D) = BD = \sqrt{(6-2)^2 + (4-0)^2} = 4\sqrt{2}$;
$d(A,C) = AC = \sqrt{(2-(-2))^2 + (8-4)^2} = 4\sqrt{2}$ şi
$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Leftrightarrow \mu\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Deci $ABDC$ este dreptunghi, în această ordine.



Coordonatele unui punct care împarte un segment într-un raport dat în plan-Recapitulare liceu

Vezi Curs pentru formule şi formulele coordonatelor mijlocului unui segment, formulele coordonatelor centrului de greutate a unei plăci triunghiulare.

Exerciţiul 9. Să se determine coordonatele punctului C situat pe segmentul AB, $A(2,5)$, $B(8,-1)$, la o treime distanţă de A.

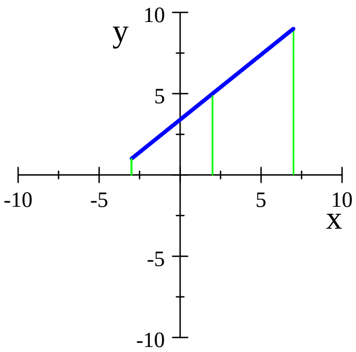
Exerciţiul 10. Să se determine coordonatele punctului C situat pe dreapta AB, $A(-3,1)$, $B(2,5)$, astfel încât $2 = \dfrac{AC}{AB}$.

Rezolvare. Reprezentăm A, B în plan, $C(x,y)$ pe dreapta AB, apoi construim

$M = pr_{Ox}A \Rightarrow M(-3,0)$;

$P = pr_{Ox}B \Rightarrow P(2,0)$;

$N = pr_{Ox}C \Rightarrow N(x,0)$;



Atunci

$$2 = \frac{AC}{AB} = \frac{MN}{MP} = \frac{x-(-3)}{2-(-3)} \Rightarrow x = -3 + 2\cdot(2-(-3)) = 7.$$

Analog

$M' = pr_{Oy}A \Rightarrow M(0,1)$;

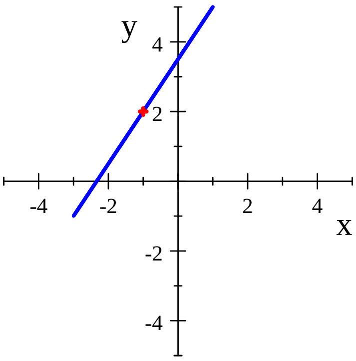
$P' = pr_{Oy}B \Rightarrow N(0,5)$;

$N' = pr_{Oy}C \Rightarrow N(0,y)$;

$$2 = \frac{AC}{AB} = \frac{M'N'}{M'P'} = \frac{y-1}{5-1} \Rightarrow y = 1 + 2\cdot(5-1) = 9.$$

Exerciţiul 11. Să se determine coordonatele punctului C situat pe segmentul AB, $A(2,-4)$, $B(8,-1)$, astfel încât $\frac{3}{5} = \frac{AC}{AB}$.
Exerciţiul 12. Să se determine coordonatele punctului C situat pe segmentul AB, $A(-1,5)$, $B(7,1)$, astfel încât $3 = \frac{AC}{CB}$.
Exerciţiul 13. Să se determine coordonatele punctului C, mijlocul segmentului AB, $A(1,5)$, $B(-3,-1)$.
Rezolvare. Conform formulelor, pentru $r = \frac{1}{2}$, se obţin coordonatele mijlocului C pentru segmentul $AB \Rightarrow$

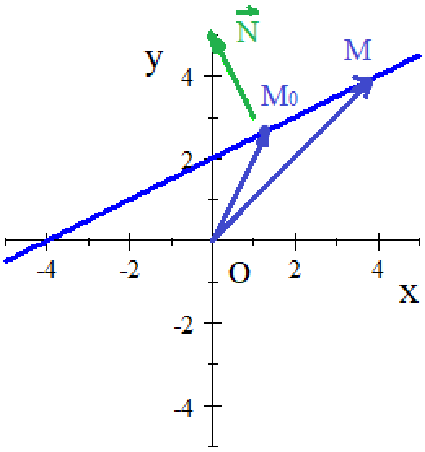
$$\begin{cases} x_C = \dfrac{x_A + x_B}{2}; \\ y_C = \dfrac{y_A + y_B}{2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = \dfrac{1-3}{2} = -1; \\ y_C = \dfrac{5-1}{2} = 2. \end{cases}$$



<u>**Ecuaţii ale unei drepte în plan, în** $\mathbb{R}^2/\mathbb{V}_2$</u>-Recapitulare liceu şi Curs.

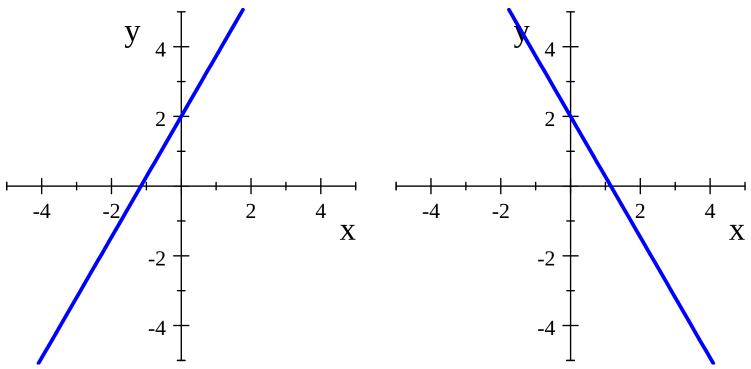
Fie $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un reper ortonormat în $\mathbb{V}_2$.
Teorema 1. Un punct $M(\overrightarrow{r})$ aparţine dreptei (d) ce conţine punctul $M_0(\overrightarrow{r_0})$ şi este perpendiculară pe vectorul normal $\overrightarrow{N}$ dacă şi numai dacă

(2) $\left\langle \overrightarrow{N}, \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0} \right\rangle = 0.$



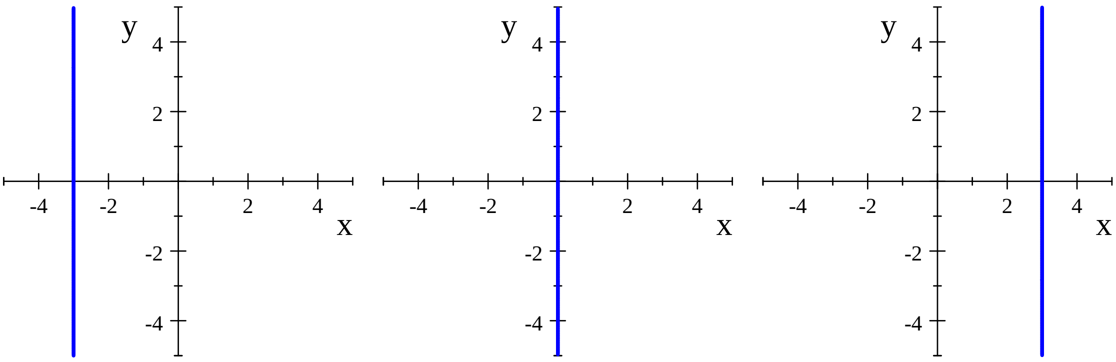
Teorema 2. Un punct $M(x,y)$ aparţine dreptei (d) ce conţine punctul $M_0(x_0, y_0)$ şi este perpen-

diculară pe vectorul normal $\overrightarrow{N} = A\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j}$ dacă şi numai dacă
(3) $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$
sau, notând $C = -(Ax_0 + By_0)$, dacă şi numai dacă
(4) $Ax + By + C = 0$- este o ecuaţie de gradul întâi în x şi y, ce reprezintă *ecuaţia generală* a unei drepte (d) în plan.
Observaţie. Fie punctul $P(x_0, y_0)$ şi dreapta (d) $Ax + By + C = 0$.
a) Dacă P nu aparţine dreptei (d), atunci distanţa de la punctul P la dreapta (d) este numărul real strict pozitiv:
$$d(P,(d)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$
b) Dacă P aparţine dreptei (d), atunci $Ax_0 + By_0 + C = 0$ şi distanţa de la punctul P la dreapta (d) este:
$$d(P,(d)) = 0.$$
Teorema 3. a) Un punct $M(x, y)$ aparţine dreptei (d) (oblică) ce are panta sau coeficientul unghiular $m = \operatorname{tg}\alpha, \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ şi se intersectează cu axa Oy într-un punct de ordonată n dacă şi numai dacă
(5) $y = mx + n$.
Observaţie.
$\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow m > 0.$
$\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\Rightarrow m < 0.$
De exemplu, (d_1) $y = \sqrt{3}x + 2$ şi (d_2) $y = -\sqrt{3}x + 2$ au reprezentările:



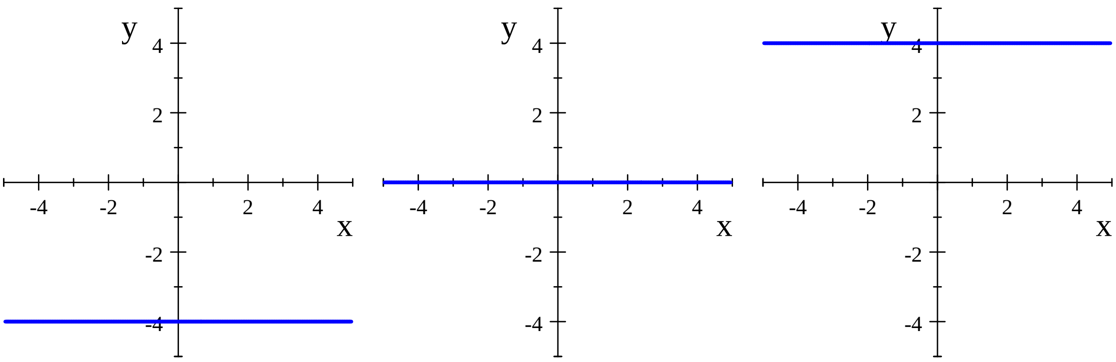
Se observă că:
(d_1) are $m_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 = \sqrt{3}, \alpha_1 = \dfrac{\pi}{3}, n_1 = 2, (d_1) \cap Oy = \{N_1\}, N_1(0, 2)$.
(d_2) are $m_2 = \operatorname{tg}\alpha_2 = \sqrt{3}, \alpha_2 = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}, n_2 = 2, (d_2) \cap Oy = \{N_2\}, N_2(0, 2)$.

Teorema 3. b) Un punct $M(x, y)$ aparţine dreptei (d) paralele cu Oy şi se intersectează cu axa Ox într-un punct de abscisă a dacă şi numai dacă
(6) $x = a.$ $(y \in \mathbb{R})$.
Observaţie. Pentru $x = a$, se poate conveni ca $m = \infty$ şi $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.
De exemplu, (d_1) $x = -3, (d_2)$ $x = 0$ şi (d_3) $x = 3$ au reprezentările:



Se observă că:
(d_1) are $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}, (d_1) \cap Oy = \emptyset, (d_1) \cap Ox = \{M_1\}, M_1(-3,0)$.
(d_2) are $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}, (d_2) \cap Oy = Oy, (d_2) \cap Ox = \{M_2\}, M_2(0,0)$.
(d_3) are $\alpha_3 = \frac{\pi}{2}, (d_3) \cap Oy = \emptyset, (d_3) \cap Ox = \{M_3\}, M_3(3,0)$.

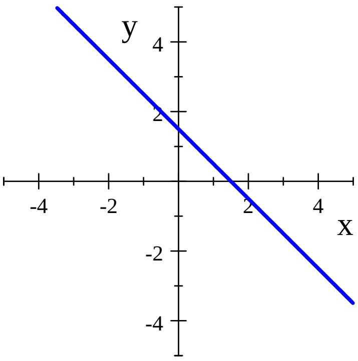
Teorema 3. c) Un punct $M(x,y)$ aparţine dreptei (d) paralele cu Ox şi se intersectează cu axa Oy într-un punct de ordonată b dacă şi numai dacă
(7) $\quad y = b.\ (x \in \mathbb{R})$
Observaţie. Pentru $y = b$, se poate conveni ca $m = 0$ şi $\alpha = 0$.
De exemplu, $(d_1)\ y = -4, (d_2)\ y = 0$ şi $(d_3)\ y = 4$ au reprezentările:



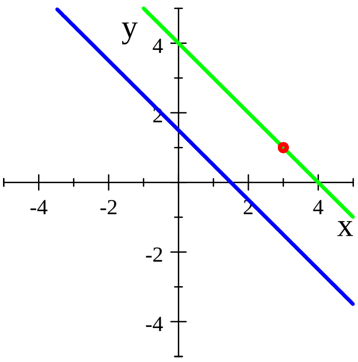
Se observă că:
(d_1) are $\alpha_1 = 0, (d_1) \cap Ox = \emptyset, (d_1) \cap Oy = \{N_1\}, N_1(0,-4)$.
(d_2) are $\alpha_2 = 0, (d_2) \cap Ox = Ox, (d_2) \cap Oy = \{N_2\}, N_2(0,0)$.
(d_3) are $\alpha_3 = 0, (d_3) \cap Ox = \emptyset, (d_3) \cap Ox = \{N_3\}, N_3(0,4)$.

Teorema 4. Fie două drepte de ecuaţii $(d_1)\ y = m_1 x + n_1$ şi $(d_2)\ y = m_2 x + n_2$.
a) dreptele sunt paralele sau coincid dacă şi numai dacă $m_1 = m_2$.
b) dreptele sunt perpendiculare dacă şi numai dacă $m_1 \cdot m_2 = -1$.

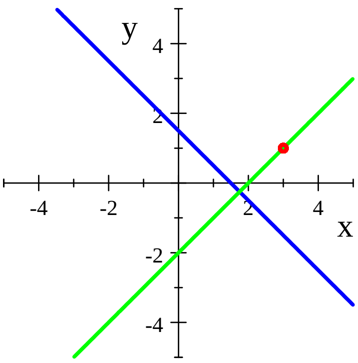
Teorema 5. Un punct $M(x,y)$ aparţine dreptei (d) ce are panta sau coeficientul unghiular $m = \operatorname{tg}\alpha, \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ şi trece prin punctul $M_0(x_0, y_0)$
(8) $\quad y - y_0 = m(x - x_0)$.
Observaţie. Fie dreapta $(d)\ 2x + 2y - 3 = 0$.
Atunci $(d)\ 2x + 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow (d)\ y = -x + \frac{3}{2} \Rightarrow m_d = -1 (\alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4})$



Dreapta paralelă cu (d), ce trece prin $M_0\,(3,1)$ este cu $m_{d_1} = m_d = -1$ şi
(d_1) $y - 1 = -1 \cdot (x - 3)$

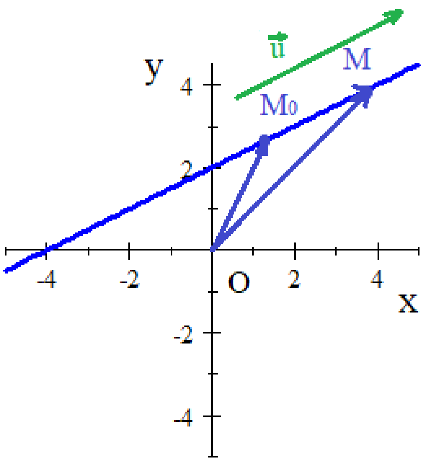


Dreapta perpendiculară pe (d), ce trece prin $M_0\,(3,1)$ este cu $m_{d_1} = \dfrac{-1}{m_d} = +1$ şi
(d_2) $y - 1 = +1 \cdot (x - 3)$



Teorema 6. Un punct $M\,(\overrightarrow{r})$ aparţine dreptei (d) ce conţine punctul $M_0\,(\overrightarrow{r_0})$ şi este paralelă cu vectorul director $\overrightarrow{u}$ dacă şi numai dacă

(9) $\qquad \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + \alpha\,\overrightarrow{u}, \alpha \in \mathbb{R}.$



Teorema 7. Un punct $M(x,y)$ aparţine dreptei (d) ce conţine punctul $M_0(x_0,y_0)$ şi este paralelă cu vectorul director $\overrightarrow{u}=m_1\overrightarrow{i}+m_2\overrightarrow{j}$ dacă şi numai dacă

(10) $\begin{cases} x=x_0+\alpha\cdot m_1 \\ y=y_0+\alpha\cdot m_2 \end{cases},\alpha\in\mathbb{R}.$

Dacă $m_1\neq 0$, $m_2\neq 0$, atunci (10) $\Leftrightarrow$

(11) $\dfrac{y-y_0}{m_2}=\dfrac{x-x_0}{m_1}.$

În acest caz, panta este $m=\dfrac{m_2}{m_1}$ şi se regăseşte (8).

Mai mult, direct (10) $\Leftrightarrow$

(12) $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}=0.$

Teorema 8. Un punct $M(\overrightarrow{r})$ aparţine dreptei (d) ce conţine punctele $M_1(\overrightarrow{r_1})$, $M_2(\overrightarrow{r_2})$ distincte dacă şi numai dacă

(13) $\overrightarrow{r}=\overrightarrow{r_1}+\alpha(\overrightarrow{r_2}-\overrightarrow{r_1}),\alpha\in\mathbb{R}.$

Teorema 9. Un punct $M(x,y)$ aparţine dreptei (d) ce conţine punctele $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ distincte dacă şi numai dacă

(14) $\begin{cases} x=x_1+\alpha(x_2-x_1) \\ y=y_1+\alpha(y_2-y_1) \end{cases},\alpha\in\mathbb{R}.$

Dacă $x_2\neq x_1$, $y_2\neq y_1$, atunci (14) $\Leftrightarrow$

(15) $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}.$

În acest caz, panta este $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ şi se regăseşte (8).

Mai mult, direct (14) $\Leftrightarrow$

(16) $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}=0\Leftrightarrow$

(17) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0.$

Teorema 10. Un punct $M(x,y)$ aparţine dreptei (d) ce taie axele de coordonate în $A(a,0)$, $B(0,b)$, cu $a\in\mathbb{R}^*,b\in\mathbb{R}^*$ dacă şi numai dacă

$$(18) \qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Exerciţiul 14. Să se deducă ecuaţia dreptei care trece prin punctele $P(1,5)$, $Q(7,-7)$.
Exerciţiul 15. Să se deseneze ecuaţia dreptei care trece prin punctul $C(2,1)$ şi are panta 1.
Exerciţiul 16. Să se scrie ecuaţia dreptei cu $\alpha=\frac{\pi}{4}$ şi are $n=0$. Să se deseneze.
Exerciţiul 17. Să se scrie ecuaţia dreptei cu $\alpha=\frac{-\pi}{4}$ şi are $n=0$. Să se deseneze.
Exerciţiul 18. Să se scrie ecuaţia dreptei cu $\alpha=\frac{\pi}{4}$ şi are $n=1$. Să se deseneze.
Exerciţiul 19. Să se se determine pantele dreptelor (d_1) determinată de punctele $(1,5),(3,8)$ şi (d_2) determinată de punctele $(-4,1),(0,7)$. Să se stabilească dacă dreptele sunt paralele, coincid sau sunt perpendiculare.
Exerciţiul 20. Să se se determine pantele dreptelor (d_1) determinată de punctele $(1,3),(3,1)$ şi (d_2) determinată de punctele $(1,-3),(-1,-2)$. Să se stabilească dacă dreptele sunt paralele, coincid sau sunt perpendiculare.
Exerciţiul 21. Dacă dreapta (d) determinată de punctele $(a,5)$ şi $(4,3)$ este paralelă cu o dreaptă care are panta 3, să se determine a.
Exerciţiul 22. Dacă dreapta (d) determinată de punctele $(a,5)$ şi $(4,3)$ este perpendiculară pe o dreaptă care are panta 3, să se determine a.
Exerciţiul 23. Să se determine a şi b dacă dreapta care trece prin punctele $(a,1)$ şi $(0,b)$ coincide cu cu dreapta ce trece prin punctele $(1,4)$ şi $(2,-3)$.
Exerciţiul 24.Să se determine a şi b dacă dreapta care trece prin punctele $(a,4)$ şi $(3,7)$ este paralelă cu cu dreapta ce trece prin punctele $(b,-1)$ şi $(5,1)$.
Exerciţiul 25. Să se determine o relaţie între a şi b dacă dreapta care trece prin punctele $(-2,4)$ şi $(1,b)$ este perpendiculară pe dreapta ce trece prin punctele $(-2,4)$ şi $(a,2)$.
Exerciţiul 26. Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(-2,3)$ şi are panta 2. Să se deseneze dreapta.
Exerciţiul 27. Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(3,-2)$ şi care este perpendiculară pe axa Ox. Să se deseneze dreapta.
Exerciţiul 28. Să se scrie ecuaţiile dreptelor: **a)** paralele, **b)** perpendiculare pe dreapta $3x+2y-5=0$ şi care trec prin punctul de coordonate $(3,1)$.
Exerciţiul 29. Să se deseneze dreapta $2x-3y-6=0$.
Exerciţiul 30. Să se scrie ecuaţia redusă a dreptei $3y-\sqrt{3}x+6=0$, să se stabilească unghiul format de dreaptă cu axa Ox, să se deseneze dreapta.
Exerciţiul 31. Care din punctele $(2,3),(-1,5),(6,0),(0,4)$ se găsesc pe dreapta $3x+4y-18=0$?
Exerciţiul 32. Să se stabilească dacă ecuaţiile $5x-7y+8=0$ şi $21y=24+15x$ reprezintă aceeaşi dreaptă.
Exerciţiul 33. Să se scrie expresia analitică a vectorului determinat de punctele $(3,-2)$ şi $(-1,5)$.
Exerciţiul 37. Să se determine versorul corespunzător vectorului $\overrightarrow{a}=3\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}$.
Exerciţiul 38. Fie $\overrightarrow{a}=3\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{b}=-\overrightarrow{i}+5\overrightarrow{j}$. Să se calculeze $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$, $2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$, $\left\|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right\|$, $\left\|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right\|$ şi să se reprezinte în plan vectorii reprezentanţi ai vectorilor determinaţi având punctul iniţial în $(1,1)$.
Exerciţiul 39. Să se determine coordonatele punctului A a vectorului $\overrightarrow{AB}\in\overrightarrow{a}$, dacă $\overrightarrow{a}=4\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}$ şi $B(-2,1)$.
Exerciţiul 40. Să se determine cosinusul unghiului dintre vectorii $\overrightarrow{a}=3\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{b}=-\overrightarrow{i}+5\overrightarrow{j}$.
Exerciţiul 41. Dacă $\|\overrightarrow{u}\|=10, \|\overrightarrow{v}\|=6, \sphericalangle(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=60°$, să se calculeze $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$.

Exerciţiul 42. Dacă $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{b} = x\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$, $\sphericalangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 60°$, să se determine x.
Exerciţiul 43. Să se stabilească dacă vectorii $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ sunt ortogonali.
Exerciţiul 44. Să se stabilească dacă vectorii $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ sunt ortogonali.
Exerciţiul 45. Să se calculeze lungimea proiectiei vectorului $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ pe $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$. Să se deseneze reprezentanţi ai ceilor doi vectori şi vectorul proiecţie $pr_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$, $pr_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{b}$, toţi aplicaţi în origine.
Exerciţiul 46. Să se determine distanţa de la punctul $(1, 4)$ la dreapta $3x - 5y + 2 = 0$.
Exerciţiul 47. Pentru ce valori ale lui m dreapta $y - 1 = m(x + 3)$ este la distanţă 3 de origine.
Exerciţiul 48. Să se determine distanţa dintre dreptele $2x - 5y - 10 = 0$ şi $2x - 5y + 4 = 0$.
Exerciţiul 49. Să se determine ecuaţia dreptei bisectoare a unghiului dintre dreptele $3x-4y-3 = 0$ şi $5x + 12y + 1 = 0$.
Exerciţiul 50. Să se scrie ecuaţia dreptei dacă se cunosc punctul $A(-1, 2)$ situat pe dreptă şi:

a) vectorul director $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$;
b) punctul $B(2, 0)$ al dreptei;
c) vectorul normal $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j}$;
d) panta $m = 5$.

Exerciţiul 51. Să se determine punctul de intersecţie al dreptelor $x - y - 2 = 0$ şi $x + y - 6 = 0$.
Exerciţiul 52. Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(3, -5)$ si are vectorul director $\overrightarrow{u} = 4\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j}$.
Exerciţiul 53. Sa se afle coordonatele punctului C_1 simetric punctului $C(2, 4)$ fata de dreapta $(d) : x - y - 2 = 0$.
Exerciţiul 54. Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(2, 5)$ şi este egal departată de punctele $B(-1, 2)$ şi $C(5, 4)$.