SEMINAR NR. 12, REZOLVĂRI
Algebră liniară şi Geometrie analitică

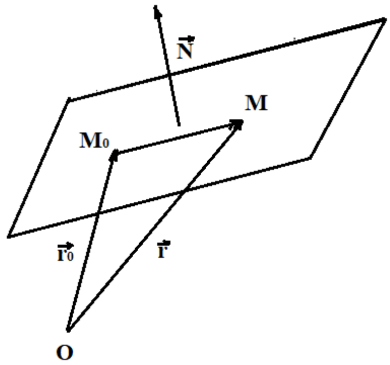
10. PLANUL ŞI DREAPTA ÎN SPAŢIU, ÎN $\mathbb{R}^3/\mathbb{V}_3$

Ecuaţii ale unui plan în $\mathbb{R}^3/\mathbb{V}_3$

Fie $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un reper ortonormat în $\mathbb{V}_3$.

Teorema 1. Un punct $M(\overrightarrow{r})$ aparţine planului (π) ce conţine punctul $M_0(\overrightarrow{r_0})$ şi este perpendicular pe vectorul normal $\overrightarrow{N}$ dacă şi numai dacă

(1) $\left\langle \overrightarrow{N}, \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0} \right\rangle = 0.$



Teorema 2. Un punct $M(x, y, z)$ aparţine planului (π) ce conţine punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi este perpendicular pe vectorul normal $\overrightarrow{N} = A\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j} + C\overrightarrow{k}$ dacă şi numai dacă

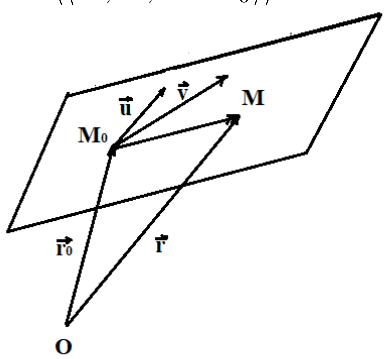
(2) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

sau, notând $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$, dacă şi numai dacă

(3) $Ax + By + Cz + D = 0.$

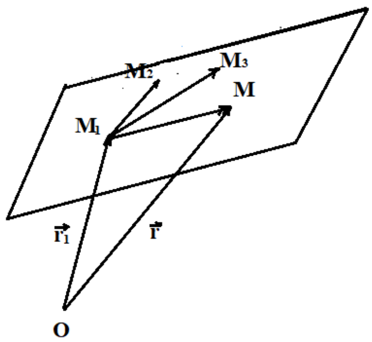
Teorema 3. Un punct $M(\overrightarrow{r})$ aparţine planului (π) ce conţine punctul $M_0(\overrightarrow{r_0})$, şi doi vectori $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ necoliniari (cu $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$) dacă şi numai dacă

(4) $\langle\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0} \rangle\rangle = 0.$



Teorema 4. Un punct $M(\overrightarrow{r})$ aparţine planului (π) ce conţine punctele $M_1(\overrightarrow{r_1})$, $M_2(\overrightarrow{r_2})$, $M_3(\overrightarrow{r_3})$ necoliniare dacă şi numai dacă

(5) $\langle\langle \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_3} - \overrightarrow{r_1} \rangle\rangle = 0.$



Teorema 5. Un punct $M(x,y,z)$ aparţine planului (π) ce conţine punctele $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$ necoliniare dacă şi numai dacă

$$(6)\quad \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(7)\quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

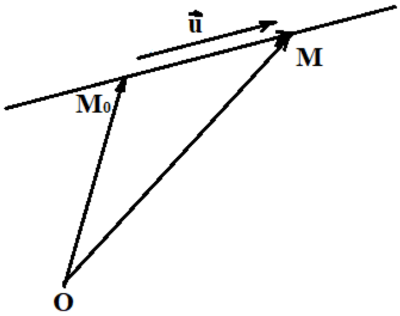
Ecuaţii ale unei drepte în $\mathbb{R}^3/\mathbb{V}_3$

Fie $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un reper ortonormat în $\mathbb{V}_3$.

Teorema 1'. Un punct $M(\overrightarrow{r})$ aparţine dreptei (d) ce conţine punctul $M_0(\overrightarrow{r_0})$ şi este paralelă cu vectorul director $\overrightarrow{u}$ dacă şi numai dacă

$(1')\quad (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}) \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow$

$(2')\quad \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + \alpha\overrightarrow{u}, \alpha \in \mathbb{R}.$



Teorema 2'. Un punct $M(x,y,z)$ aparţine dreptei (d) ce conţine punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$ şi este paralelă cu vectorul director $\overrightarrow{u} = l\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j} + n\overrightarrow{k}$ dacă şi numai dacă

$$(3')\quad \begin{cases} x = x_0 + \alpha l \\ y = y_0 + \alpha m \\ z = z_0 + \alpha n \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

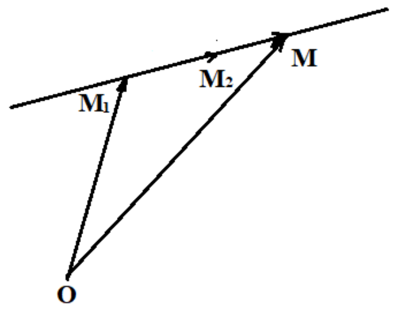
Dacă $l \neq 0$, $m \neq 0$, $m \neq 0$ atunci $(3') \Leftrightarrow$

$$(4')\quad \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}.$$

Teorema 3'. Un punct $M(\overrightarrow{r})$ aparţine dreptei (d) ce conţine punctele $M_1(\overrightarrow{r_1})$, $M_2(\overrightarrow{r_2})$ distincte dacă şi numai dacă

$(5')$ $\quad (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_1}) \times (\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow$

$(6')$ $\quad \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_1} + \alpha (\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}), \alpha \in \mathbb{R}.$



Teorema 4'. Un punct $M(x,y,z)$ aparţine dreptei (d) ce conţine punctele $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ distincte dacă şi numai dacă

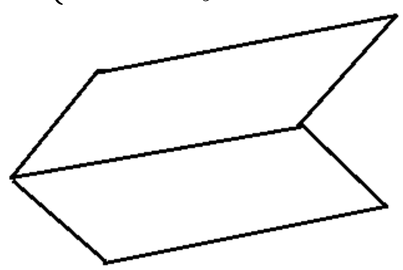
$$(7') \quad \begin{cases} x = x_1 + \alpha(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \alpha(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + \alpha(z_2 - z_1) \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dacă $x_2 \neq x_1$, $y_2 \neq y_1$, $z_2 \neq z_1$ atunci $(7') \Leftrightarrow$

$$(8') \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Teorema 5'. Un punct $M(x,y,z)$ aparţine dreptei (d) ce se obţine din intersecţia planului (π_1) de ecuaţie generală $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ cu planul (π_2) de ecuaţie generală $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ (plane neparalele) dacă şi numai dacă

$$(9') \quad \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$



Exerciţiul 1. Să se scrie ecuaţia planului (π) care trece prin origine şi este perpendicular pe planele

$(\pi_1): 2x - y + 3z - 1 = 0$

$(\pi_2): x + 2y + z = 0.$

Să se determine măsura unghiului format de (π_1) şi (π_2).

Rezolvare.

•Se ştie $O(0,0,0) \in (\pi)$. Pentru a aplica Teorema 2, se caută $\overrightarrow{N} = A\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j} + C\overrightarrow{k}$ un vector normal la planul (π) astfel încât

$$\begin{cases} (\pi) \perp (\pi_1) \\ (\pi) \perp (\pi_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{N} \perp \overrightarrow{N_1} \\ \overrightarrow{N} \perp \overrightarrow{N_2} \end{cases}$$

unde $\overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}$ sunt vectori normali la $(\pi_1), (\pi_2)$ respectiv.

Se ştie$\begin{cases} (\pi_1): 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ (\pi_2): x + 2y + z = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{N_1} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{N_2} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} \end{cases}$

<u>modul 1</u>

$$\begin{cases} \overrightarrow{N} \perp \overrightarrow{N_1} \\ \overrightarrow{N} \perp \overrightarrow{N_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left\langle \overrightarrow{N}, \overrightarrow{N_1} \right\rangle = 0 \\ \left\langle \overrightarrow{N}, \overrightarrow{N_2} \right\rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A - B + 3C = 0 \\ A + 2B + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{-7}{5}\alpha \\ B = \frac{1}{5}\alpha \\ C = \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Atunci $\overrightarrow{N} = \frac{1}{5}\alpha\left(-7\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}\right), \alpha \in \mathbb{R}^*$ sunt <u>toţi</u> vectorii normali la planul (π). În particular, pentru $\alpha = 5$, $\overrightarrow{N} = -7\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$ este <u>un</u> vector normal la planul (π).

<u>modul 2</u>

$$\begin{cases} \overrightarrow{N} \perp \overrightarrow{N_1} \\ \overrightarrow{N} \perp \overrightarrow{N_2} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{N} = \widetilde{\alpha}\left(\overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2}\right) = \widetilde{\alpha}\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \widetilde{\alpha}\left(-7\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}\right), \widetilde{\alpha} \in \mathbb{R}^*$$

sunt <u>toţi</u> vectorii normali la planul (π). În particular, pentru $\widetilde{\alpha} = 1$, $\overrightarrow{N} = -7\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$ este <u>un</u> vector normal la planul (π).

Se înlocuieşte în Teorema 2, în relaţia (2) $\Rightarrow$
$(\pi): -7(x - 0) + 1(y - 0) + 5(z - 0) = 0 \Leftrightarrow$
$(\pi): -7x + y + 5z = 0$ este ecuaţia generală a planului.
Era previzibil ca $D = 0$, deoarece $O(0, 0, 0) \in (\pi)$.

$\bullet(\widehat{(\pi_1), (\pi_2)}) = \left(\widehat{\overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}}\right) \Longrightarrow$

$$\cos(\widehat{(\pi_1), (\pi_2)}) = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}}\right) = \frac{\left\langle \overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2} \right\rangle}{\left\|\overrightarrow{N_1}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{N_2}\right\|} =$$

$$= \frac{2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}}$$

Exerciţiul 2. Pentru ce valoare a lui $p \in \mathbb{R}$, dreapta

$$(d): \begin{cases} 3x - 2y + z + 3 = 0 \\ 4x - 3y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

este paralelă cu planul $(\pi): 2x - y + pz - 2 = 0$?

Rezolvare.

Cum $(\pi): 2x - y + pz - 2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{N} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + p\overrightarrow{k}$ este un vector normal la planul (π).

Cum $(d) = (\pi_1) \cap (\pi_2): \begin{cases} 3x - 2y + z + 3 = 0 & \left(\pi_1^1\right) \rightsquigarrow \overrightarrow{N_1} = 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 1\overrightarrow{k} \\ 4x - 3y + z + 1 = 0 & \left(\pi_2^1\right) \rightsquigarrow \overrightarrow{N_2} = 4\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} \end{cases} \Rightarrow$

$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}\overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ este <u>un</u> vector director al dreptei (d).

Atunci $(\pi) \parallel (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{N} \perp \overrightarrow{u} \Leftrightarrow \left\langle \overrightarrow{N}, \overrightarrow{u} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + p \cdot (-1) = 0 \Leftrightarrow p = 1.$

Exerciţiul 3. Se consideră punctul $M_0\,(1,-1,3)$ şi dreptele

$$(d_1) : \begin{cases} x + z - 3 = 0 \\ y - 3z - 1 = 0 \end{cases} \text{ şi } (d_2) : \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

Să se determine ecuaţia planului (π) care trece prin M_0 şi este paralel cu dreptele (d_1) şi (d_2).
Rezolvare.

Se ştie $M_0\,(1,-1,3) \in (\pi)$. Pentru a aplica Teorema 2, se caută $\overrightarrow{N} = A\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j} + C\overrightarrow{k}$ un vector normal la planul (π) astfel încât

$$\begin{cases} (\pi) \parallel (d_1) \\ (\pi) \parallel (d_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{N} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{N} \perp \overrightarrow{u_2} \end{cases}$$

unde $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ sunt vectori directori pentru $(d_1), (d_2)$ respectiv.

Cum $(d_1) = \left(\pi_1^1\right) \cap \left(\pi_2^1\right) : \begin{cases} 1x + 0y + z - 3 = 0 & \left(\pi_1^1\right) \rightsquigarrow \overrightarrow{N_1^1} = 1\overrightarrow{i} + 0\overrightarrow{j} + 1\overrightarrow{k} \\ 0x + 1y - 3z - 1 = 0 & \left(\pi_2^1\right) \rightsquigarrow \overrightarrow{N_2^1} = 0\overrightarrow{i} + 1\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k} \end{cases} \Rightarrow$

$\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{N_1^1} \times \overrightarrow{N_2^1} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} = -\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ este <u>un</u> vector director al dreptei (d_1).

Cum $(d_2) = \left(\pi_1^2\right) \cap \left(\pi_2^2\right) : \begin{cases} 1x + 0y - z - 1 = 0 & \left(\pi_1^2\right) \rightsquigarrow \overrightarrow{N_1^2} = 1\overrightarrow{i} + 0\overrightarrow{j} - 1\overrightarrow{k} \\ 0x + 1y + 2z - 3 = 0 & \left(\pi_2^2\right) \rightsquigarrow \overrightarrow{N_2^2} = 0\overrightarrow{i} + 1\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k} \end{cases} \Rightarrow$

$\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{N_1^2} \times \overrightarrow{N_2^2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ este <u>un</u> vector director al dreptei (d_2).

<u>modul 1</u>

$$\begin{cases} \overrightarrow{N} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{N} \perp \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left\langle \overrightarrow{N}, \overrightarrow{u_1} \right\rangle = 0 \\ \left\langle \overrightarrow{N}, \overrightarrow{u_2} \right\rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -A + 3B + C = 0 \\ A - 2B + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -5\alpha \\ B = -2\alpha \\ C = \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Atunci $\overrightarrow{N} = \alpha\left(-5\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right), \alpha \in \mathbb{R}^*$ sunt toţi vectorii normali la planul (π). În particular, pentru $\alpha = -1$, $\overrightarrow{N} = 5\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ este un vector normal la planul (π).

<u>modul 2</u>

$$\begin{cases} \overrightarrow{N} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{N} \perp \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{N} = \widetilde{\alpha}\left(\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{u_2}\right) = \widetilde{\alpha} \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \widetilde{\alpha}\left(5\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}\right), \widetilde{\alpha} \in \mathbb{R}^*$$

sunt toţi vectorii normali la planul (π). În particular, pentru $\widetilde{\alpha} = 1$, $\overrightarrow{N} = 5\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ este un vector normal la planul (π).

Se înlocuieşte în Teorema 2, în relaţia (2) $\Rightarrow$

$(\pi) : 5\,(x-1) + 2\,(y+1) - 1\,(z-3) = 0 \Leftrightarrow$

$(\pi) : 5x + 2y - z = 0$ este ecuaţia generală a planului.

Exerciţiul 4. Să se determine ecuaţia planului (π) care trece prin origine şi conţine dreapta $(d) : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{1}$.

Rezolvare.

Se caută ecuaţia planului (π) cu proprietatea $\begin{cases} O(0,0,0) \in (\pi) \\ (d) \subset (\pi). \end{cases}$

Conform Teoremei $2'$, relaţia $(4')$, din $(d) : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{1} \Rightarrow$

$$\begin{cases} M_0(1,0,2) \in (d) \subset (\pi) \\ \overrightarrow{u} = 1\overrightarrow{i} + 1\overrightarrow{j} + 1\overrightarrow{k} \text{ este un vector director al dreptei } (d). \end{cases}$$

Atunci atât vectorul $\overrightarrow{u}$, cât şi vectorul $\overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{OM_0} = 1\overrightarrow{i} + 0\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ sunt în (π). Se observă că $O(0,0,0) \notin (d)$, deoarece $\dfrac{0-1}{1} \neq \dfrac{0}{1} \neq \dfrac{0-2}{1}$, şi că vectorii $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{r_0}$ sunt necoliniari (au coordonatele neproporţionale).

Conform relaţiei (4) din Teorema 3, un punct $M(\overrightarrow{r})$, cu $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ aparţine planului $(\pi) \Leftrightarrow$

$(\pi) : \langle\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{r_0}, \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0} \rangle\rangle = 0$ este ecuaţia vectorială a planului$\Leftrightarrow$

$$(\pi) : \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ x-1 & y-0 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$(\pi) : 2x - y - z = 0$ este ecuaţia generală a planului.

Se observă că $D = 0 \Leftrightarrow O(0,0,0) \in (\pi)$.

Exerciţiul 5. Să se determine distanţa dintre dreptele $(d_1) : \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{1}$ şi $(d_2) : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{1}$.

Rezolvare.

Conform Teoremei $2'$, relaţia $(4')$, din $(d_1) : \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{1} \Rightarrow$

$$\begin{cases} M_1(-1,2,3) \in (d_1) \\ \overrightarrow{u_1} = -1\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 1\overrightarrow{k} \text{ este un vector director al dreptei } (d_1). \end{cases}$$

Conform Teoremei $2'$, relaţia $(4')$, din $(d_2) : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{1} \Rightarrow$

$$\begin{cases} M_2(1,1,1) \in (d_2) \\ \overrightarrow{u_2} = 1\overrightarrow{i} + 1\overrightarrow{j} + 1\overrightarrow{k} \text{ este un vector director al dreptei } (d_2). \end{cases}$$

Se construieşte un "paralelipiped" pe vectorii $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$, unde

$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \left(1\overrightarrow{i} + 1\overrightarrow{j} + 1\overrightarrow{k}\right) - \left(-1\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}\right) = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$.

Cum $\left\langle\left\langle \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \right\rangle\right\rangle = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow$"paralelipipedul" este nedegenerat (dreptele (d_1) şi (d_2) sunt necoplanare, nici nu sunt paralele, nici nu se intersectează). Atunci $\operatorname{dist}(d_2, d_2)$ este lungimea înălţimii acestui paralelipiped corespunzătoare paralelogramului-bază construit pe vectorii $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \Rightarrow$

$$\boxed{\operatorname{dist}(d_2, d_2) = \frac{\left|\left\langle\left\langle \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \right\rangle\right\rangle\right|}{\|\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{u_2}\|}.}$$

$$\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{u_2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}.$$

$\|\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{u_2}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$.

$\operatorname{dist}(d_2, d_2) = \dfrac{|6|}{\sqrt{14}} = \dfrac{6}{\sqrt{14}}$.

Exerciţiul 6. Se consideră punctul $M(2,1,-3)$, dreapta $(d): x - 2 = y = 2z + 1$ şi planul $(\pi): x + 2y - 3z + 4 = 0$.

a) Să se determine distanţele de la punctul M la planul (π), respectiv la dreapta (d).

b) Să se determine unghiul dintre dreaptă şi plan.

Rezolvare.

Exerciţiul 7. Să se determine coordonatele proiecţiei punctului $M(4,-3,1)$ pe planul $(\pi): x + 2y - z - 3 = 0$.

Rezolvare.

Se verifică dacă $M \in (\pi)$.

$4 + 2(-3) - 1 - 3 = 0$ fals$\Rightarrow M \notin (\pi)$.

Se construieşte o dreaptă (d) astfel încât

$$\begin{cases} M(4,-3,1) \in (d) \\ (d) \perp (\pi). \end{cases}$$

Cum $(d) \perp (\pi) \Rightarrow$un vector $\overrightarrow{u}$ director pentru (d) este tocmai un vector $\overrightarrow{N}$ normal la $(\pi) \Rightarrow$
$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{N} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$.

Atunci, cum $M(4,-3,1) \in (d)$, conform relaţiei $(4')$ din Teorema $2' \Rightarrow$

$$(d): \frac{x-4}{1} = \frac{y-(-3)}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

Pe această dreaptă (d) se construieşte $M' = \mathrm{pr}_{(\pi)} M$. Se observă că $\{M'\} = (\pi) \cap (d) \Rightarrow$

$$M': \begin{cases} x+2y-z-3=0 \\ \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-(-3)}{2} = \dfrac{z-1}{-1} \end{cases} \Rightarrow M'(5,-1,0).$$

Exerciţiul 8. Să se determine coordonatele proiecţiei punctului $M(4,-3,1)$ pe dreapta

$$(d): \begin{cases} x+2y-z-3=0 \\ x-3y+2z+3=0. \end{cases}$$

Rezolvare.

Se verifică dacă $M \in (d)$.

$$\begin{cases} 4+2(-3)-1-3=0 \\ 4-3(-3)+2\cdot 1+3=0 \end{cases} \text{fals} \Rightarrow M \notin (d).$$

Se construieşte un plan (π) astfel încât

$$\begin{cases} M(4,-3,1) \in (\pi) \\ (\pi) \perp (d). \end{cases}$$

Cum $(\pi) \perp (d) \Rightarrow$un vector $\overrightarrow{N}$ normal la (π) este tocmai un vector $\overrightarrow{u}$ director pentru $(d) \Rightarrow$

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{u} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k}.$$

Atunci, cum $M(4,-3,1) \in (\pi)$, conform relaţiei (2) din Teorema 2 $\Rightarrow$

$(\pi): -1(x-4) - 2(y-(-3)) - 5(z-1) = 0 \Leftrightarrow$

$(\pi): x+2y+5z-3=0$

În acest plan (π) se construieşte $M' = \mathrm{pr}_{(d)} M$. Se observă că $\{M'\} = (\pi) \cap (d) \Rightarrow$

$$M': \begin{cases} x+2y+5z-3=0 \\ x+2y-z-3=0 \\ x-3y+2z+3=0 \end{cases} \Rightarrow M'\left(\tfrac{3}{5}, \tfrac{6}{5}, 0\right).$$

Exerciţiul 11. Să se determine coordonatele simetricului originii faţă de dreapta

$$(d): \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}.$$

Rezolvare.

Se verifică dacă $O \in (d)$.

$$\frac{0-1}{1} = \frac{0}{1} = \frac{0-2}{1} \text{ fals} \Rightarrow O \notin (d)\,.$$

Se construieşte un plan (π) astfel încât

$$\begin{cases} O\,(0,0,0) \in (\pi) \\ (\pi) \perp (d)\,. \end{cases}$$

Cum $(\pi) \perp (d) \Rightarrow$un vector $\overrightarrow{N}$ normal la (π) este tocmai un vector $\overrightarrow{u}$ director pentru $(d) \Rightarrow$

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\,.$$

Atunci, cum $O\,(0,0,0) \in (\pi)$, conform relaţiei (2) din Teorema 2 $\Rightarrow$

$$(\pi) : 1\,(x-0) + 1\,(y-0) + 1\,(z-0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\pi) : x + y + z = 0$$

În acest plan (π) se construieşte $\begin{cases} M' = \mathrm{pr}_{(d)}\,O \\ S = \text{simetricul lui } O \text{ faţă de } (d)\,. \end{cases}$

Se observă că $\{M'\} = (\pi) \cap (d) \Rightarrow$

$$M' : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{1} \end{cases} \Rightarrow M'\,(0,-1,1)\,.$$

Deoarece S este şi simetricul lui O faţă de $M' \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_{M'} = \dfrac{x_O + x_S}{2} \\ y_{M'} = \dfrac{y_O + y_S}{2} \\ z_{M'} = \dfrac{z_O + z_S}{2} \end{cases} \Rightarrow S\,(0,-2,2)\,.$$