SEMINAR NR. 13, REZOLVĂRI
Algebră liniară şi Geometrie analitică

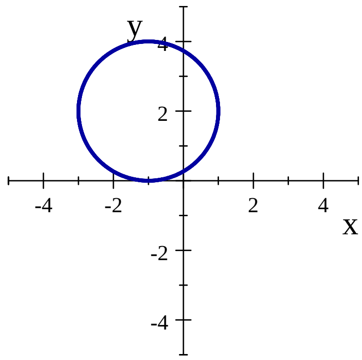
11. CONICE ÎN PLAN, ÎN $\mathbb{R}^2/\mathbb{V}_2$

Definiţie. Se numeşte *conică* în plan mulţimea punctelor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ce verifică
$(\Gamma): a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0,$
unde $a_{ij} \in \mathbb{R}, i,j \in \{0,1,2\}, a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0.$

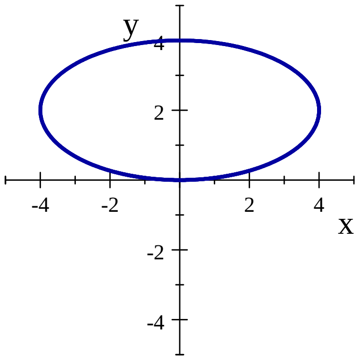
Genul conicei	Tipul conicei	Denumirea	Exemple
eliptic	nedegenerată	elipsă, cerc	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$
eliptic	nedegenerată	conica vidă (elipsa imaginară)	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = -1$
eliptic	degenerată	punct dublu (x_0, y_0)	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 0$
hiperbolic	nedegenerată	hiperbolă	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ $-\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ $xy = a, a \in \mathbb{R}^*$
hiperbolic	degenerată	reuniunea a două drepte secante în (x_0, y_0)	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 0$
parabolic	nedegenerată	parabolă	$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$, $y = ax^2 + bx + c$
parabolic	degenerată	drepte paralele	$x^2 - a^2 = 0, y^2 - a^2 = 0$ $(ax+by)^2 - c^2 = 0$
parabolic	degenerată	drepte confundate	$(ax+by+c)^2 = 0$
parabolic	degenerată	conica vidă (drepte im. paralele)	$x^2 + a^2 = 0, y^2 + a^2 = 0$

Exemple de conice în plan

a) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow$
$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 2^2$ este ecuaţia cercului cu centrul $(-1, 2)$ şi raza $R = 2$.

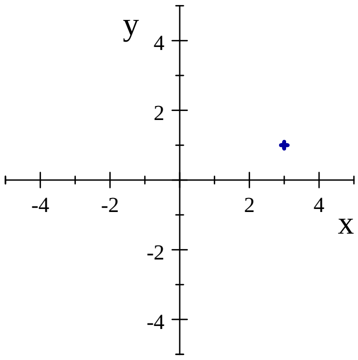


b) $\dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{(y-2)^2}{2^2} = 1$ este ecuaţia elipsei cu centrul $(0, 2)$ şi semiaxele $a = 4$, $b = 2$.

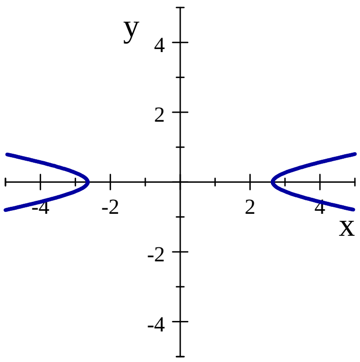


c) $\dfrac{(x-1)^2}{3^2}+\dfrac{(y-2)^2}{2^2}=-1$ este ecuaţia unei elipse imaginare (conică vidă).

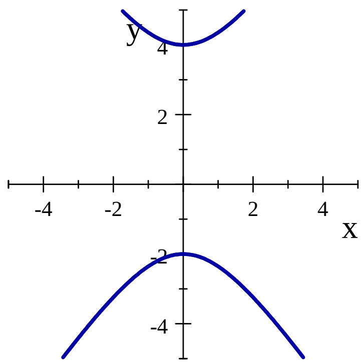
d) $\dfrac{(x-3)^2}{10}+\dfrac{(y-1)^2}{5}=0$ este ecuaţia puncului dublu $(x,y)=(3,1)$ (e conică de gen eliptic, degenerată).



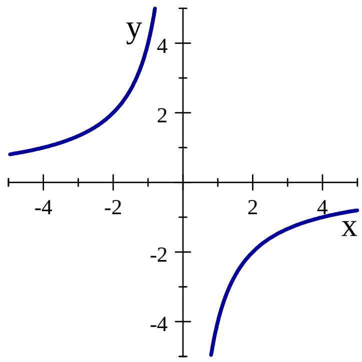
e) $\dfrac{x^2}{7}-\dfrac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$ este ecuaţia hiperbolei cu centrul $(0,0)$ şi $a=\sqrt{7}$, $b=\frac{1}{2}$.



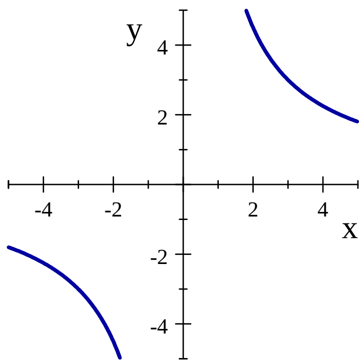
f) $-\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{(y-1)^2}{3^2}=1$ este ecuaţia hiperbolei conjugate cu centrul $(0,1)$ şi $a=2$, $b=3$.



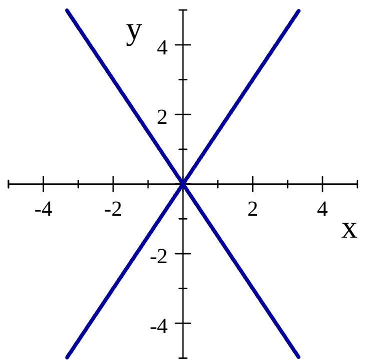
g) $xy = -4$ este ecuaţia hiperbolei echilatere cu $a = -4 < 0$.



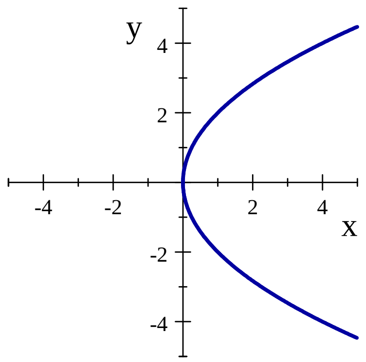
h) $xy = 9$ este ecuaţia hiperbolei echilatere cu $a = 9 > 0$.



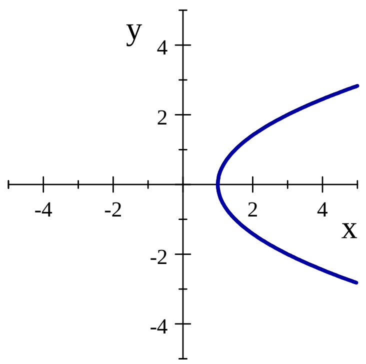
i) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 0$ este ecuaţia reuniunii de drepte $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 0$, $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 0$, concurente în $(0, 0)$ (e conică de gen hiperbolic, degenerată).



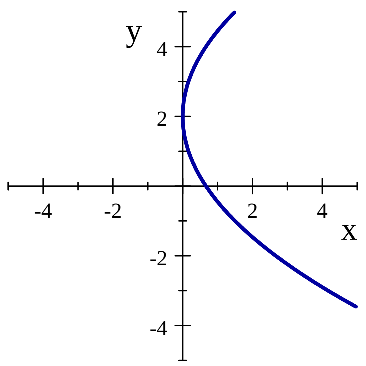
j) $y^2 = 4x$ parabolă cu "vârful" $(0,0)$, cu $p = 2$, cu axa de simetrie Ox.



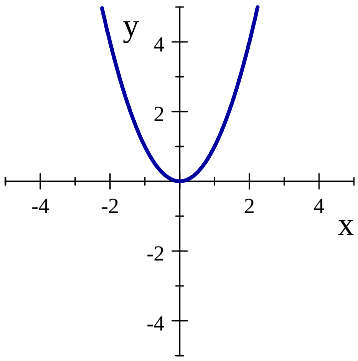
k) $y^2 = 2(x-1)$ parabolă cu "vârful" $(1,0)$, cu $p = 1$, cu axa de simetrie dreapta Ox (dreapta $y = 0$).



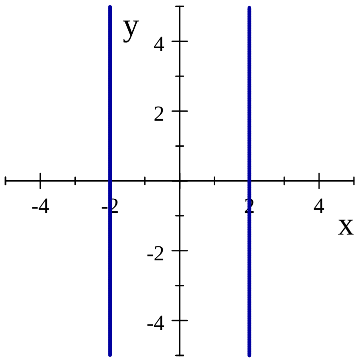
l) $(y-2)^2 = 6x$ parabolă cu "vârful" $(0,2)$, cu $p = 3$, cu axa de simetrie dreapta $y = 2$.



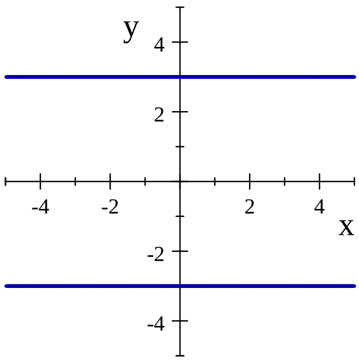
m) $y = x^2$ parabolă cu "vârful" $(0,0)$, cu axa de simetrie axa Oy (dreapta $x = 0$).



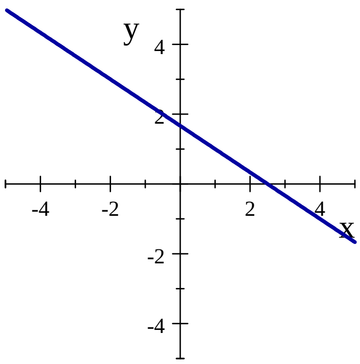
n) $x^2 - 4 = 0$ ecuaţia reuniunii de drepte paralele $x = 2$, $x = -2$ (conică de gen parabolic, degenerată).



o) $y^2 - 9 = 0$ ecuaţia reuniunii de drepte paralele $y = 3$, $y = -3$ (conică de gen parabolic, degenerată).

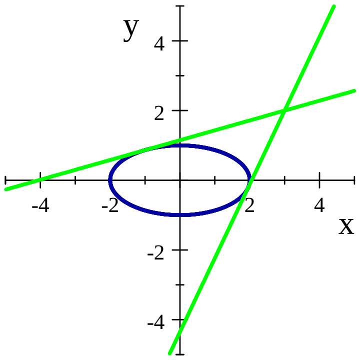


p) $(2x + 3y - 5)^2 = 0$ ecuaţia reuniunii de drepte confundate $2x + 3y - 5 = 0$ (conică de gen parabolic, degenerată).



q) $x^2 + 1 = 0$ ecuaţia unei reuniuni de drepte paralele imaginare (conică vidă).
r) $y^2 + 5 = 0$ ecuaţia unei reuniuni de drepte paralele imaginare (conică vidă).

Exerciţiul 2. Să se determine ecuaţiile tangentelor duse prin punctul $M(3,2)$ la curba de ecuaţie $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$.
Rezolvare. Curba
(Γ) $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ este o conică
(este elipsa de ecuaţie $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$).



Verificăm dacă $M(3,2)$ aparţine conicei. Cum $3^2 + 4 \cdot 2^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow M(3,2) \notin (\Gamma)$. Mai mult,
$3^2 + 4 \cdot 2^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow M(3,2)$ este exterior elipsei (Γ).
Fie $M(x_0, y_0)$ un punct oarecare ce aparţine conicei, adică verifică
$x_0^2 + 4y_0^2 - 4 = 0.$
Atunci tangenta la conica (Γ) în punctul $M(x_0, y_0)$ oarecare ce aparţine conicei este dată de ecuaţia (obţinută prin dedublare)
(d) $x \cdot x_0 + 4y \cdot y_0 - 4 = 0.$
Determinăm cele două drepte tangente la (Γ) dintre cele anterioare care trec prin $M(3,2)$, adică determinăm cele două puncte de tangenţă

$$\begin{cases} x_0^2 + 4y_0^2 - 4 = 0 \\ 3 \cdot x_0 + 4 \cdot 2 \cdot y_0 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{4}{3}(1 - 2y_0) \\ \frac{16}{9}(1 - 2y_0)^2 + 4y_0^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{4}{3}(1 - 2y_0) \\ 25y_0^2 - 16y_0 - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_0 = \frac{12-8\sqrt{21}}{25} \\ y_0 = \frac{8+3\sqrt{21}}{25} \end{cases} \text{sau} \begin{cases} x_0 = \frac{12+8\sqrt{21}}{25} \\ y_0 = \frac{8-3\sqrt{21}}{25} \end{cases}$$

Am găsit $M_1\left(\frac{12-8\sqrt{21}}{25}, \frac{8+3\sqrt{21}}{25}\right)$, punct de pe conica (Γ) prin care trece tangenta la conică
(d_1) $\frac{12-8\sqrt{21}}{25}x + 4 \cdot \frac{8+3\sqrt{21}}{25}y - 4 = 0.$
Am găsit $M_2\left(\frac{12+8\sqrt{21}}{25}, \frac{8-3\sqrt{21}}{25}\right)$, punct de pe conica (Γ) prin care trece tangenta la conică
(d_2) $\frac{12+8\sqrt{21}}{25}x + 4 \cdot \frac{8-3\sqrt{21}}{25}y - 4 = 0.$
Dreptele (d_1) şi (d_2) sunt tangentele la conică ce trec prin $M(3,2)$.

Exerciţiul 3. Să se determine intersecţia elipsei $3x^2 + 8y^2 = 35$ cu dreapta $x + 2y - 5 = 0$.

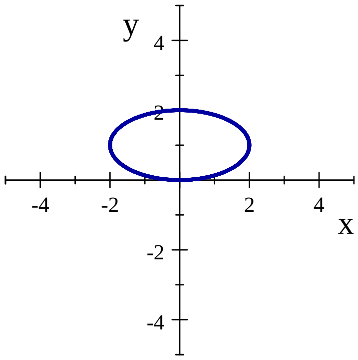
Exerciţiul 4. Să se arate că ecuaţia
$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 9 = 0$
reprezintă ecuaţia unui cerc şi să se scrie ecuaţiile tangentelor duse din origine la acest cerc.

Exerciţiul 5. Ce valoare trebuie să aibă λ pentru ca dreapta $x - y + \lambda = 0$ să fie tangentă la curba $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} + 1 = 0$? După determinarea lui λ să se afle coordonatele punctelor de contact al tangentei.

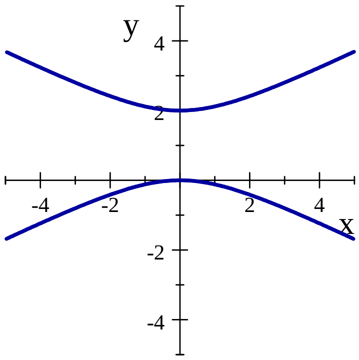
Exerciţiul 6. Să se determine punctele de intersecţie al parabolei $y^2 = 18x$ cu dreapta $6x + y - 6 = 0$.

Exerciţiul 7. Să se traseze graficele conicelor :

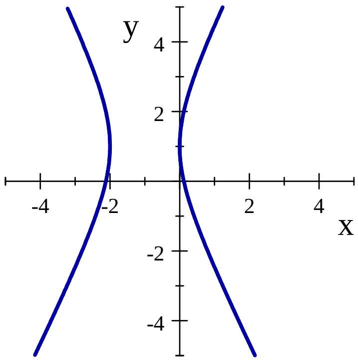
a) $x^2 + 4y^2 - 8y = 0$,



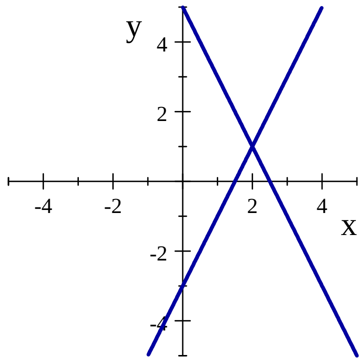
b) $x^2 - 4y^2 + 8y = 0$,



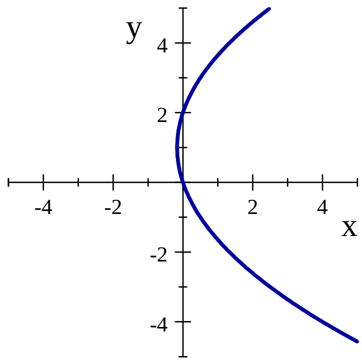
c) $4x^2 - y^2 + 8x + 2y = 1$,



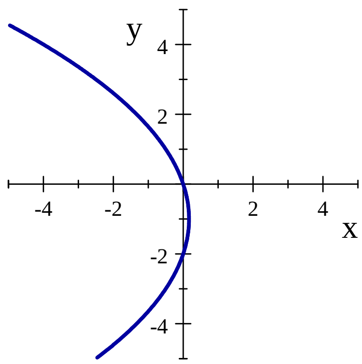
d) $4x^2 - y^2 - 16x + 2y + 15 = 0$,



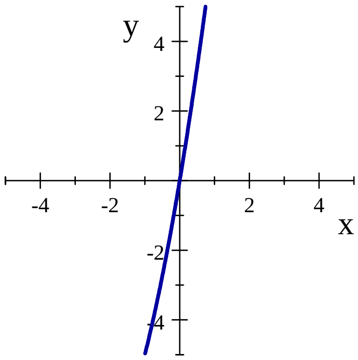
e) $y^2 - 6x - 2y = 0$,



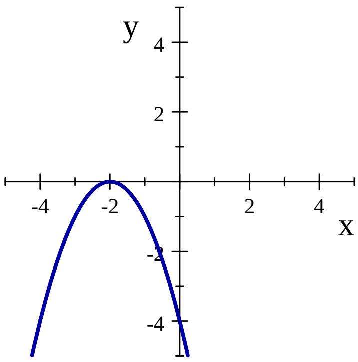
f) $y^2 + 6x + 2y = 0$,



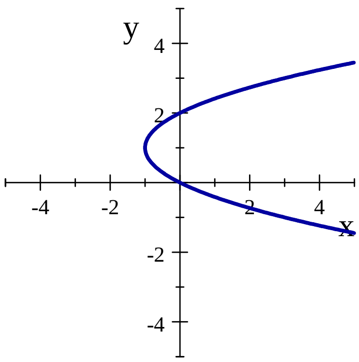
g) $x^2 + 6x - y = 0$,



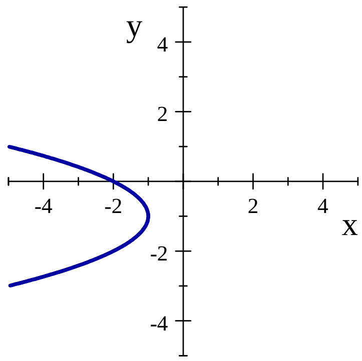
h) $x^2 + 4x + y + 4 = 0,$



i) $y^2 - x - 2y = 0,$

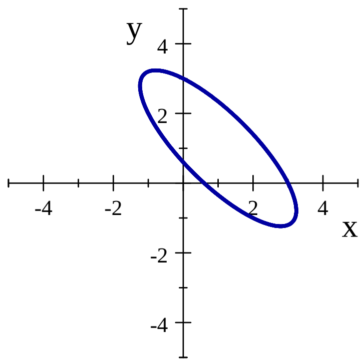


j) $y^2 + x + 2y + 2 = 0.$

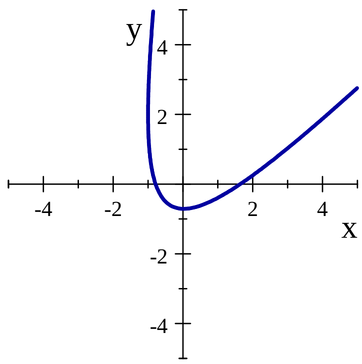


Exerciţiul 8○. Să se stabilească natura următoarelor conice şi apoi să se reprezinte grafic :

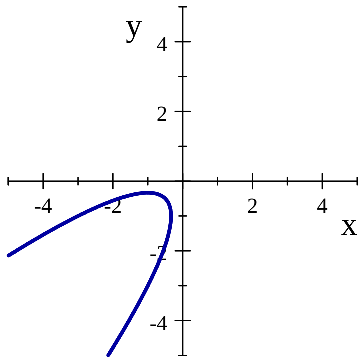
a) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$,



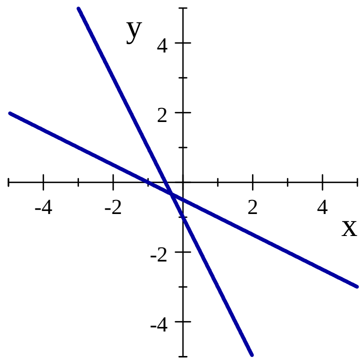
b) $7x^2 - 8xy + y^2 - 6x - 12y - 9 = 0$,



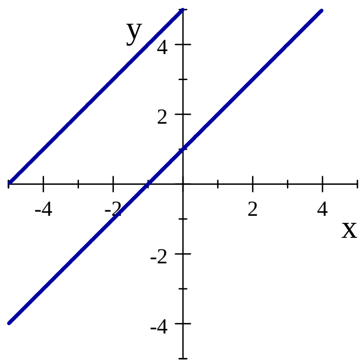
c) $3x^2 - 6xy + 3y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$,



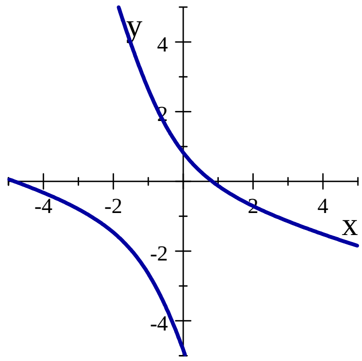
d) $2x^2 + 5xy + 2y^2 + 3x + 3y + 1 = 0,$



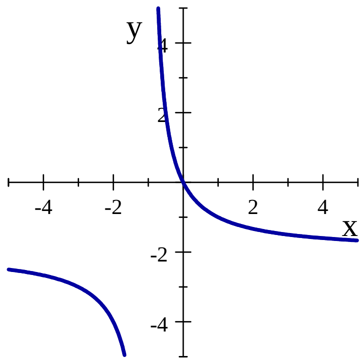
e) $x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 6y + 5 = 0,$



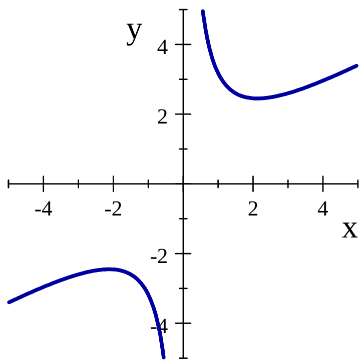
f) $x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 4y - 4 = 0,$



g) $xy + 2x + y = 0$,

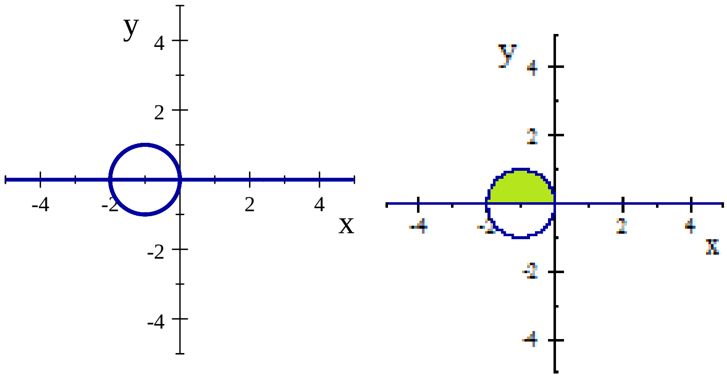


h) $2x^2 - 2\sqrt{3}xy + 9 = 0$.

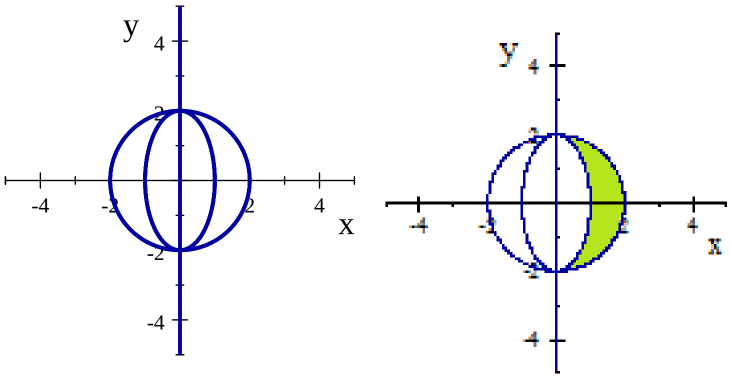


12. DOMENII ÎN PLAN (în $\mathbb{R}^2/\mathbb{V}_2$)

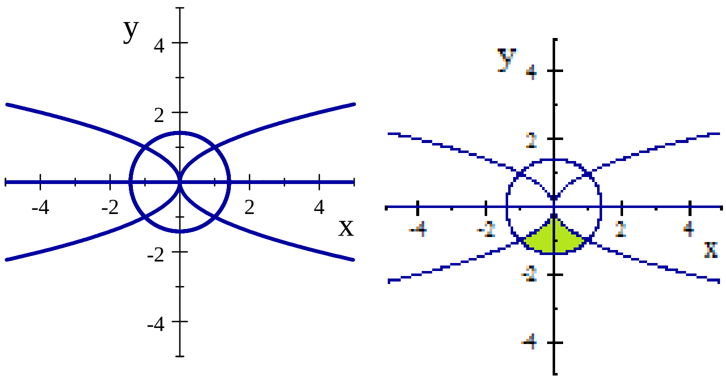
Exerciţiul 9. Să se reprezinte grafic următoarele domenii:
a) $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq -2x, y \geq 0\right\}$;



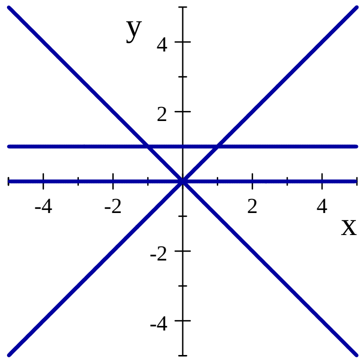
b) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2\leq 4, x^2+\frac{y^2}{4}\geq 1, x\geq 0\right\}$;



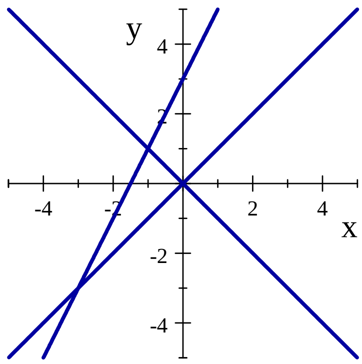
c) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2\leq 2, x\leq y^2, x\geq -y^2, y\leq 0\right\}$;



d) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2\geq y^2, x\leq y, 0\leq y\leq 1\right\}$;



e) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y^2 \geq x^2, y \leq 2x+3\right\}$;



f) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + (y-1)^2 \leq 1, y \leq x^2, x \geq 0\right\}$.