SEMINAR NR. 1, REZOLVĂRI
Algebră liniară şi Geometrie analitică

ALGEBRĂ LINIARĂ
1. MATRICE. DETERMINANŢI. SISTEME DE ECUAŢII LINIARE
1.1. Matrice. Determinanţi.

Noţiuni teoretice-vezi curs.

Definiţia 1. Fie $(\mathbb{K},+,\cdot)$ un corp comutativ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\mathbb{K}=\mathbb{C}$). Se numeşte *matrice cu m linii şi n coloane* şi cu elemente din $\mathbb{K}$ funcţia

$f:\{1,2,\ldots,m\}\times\{1,2,\ldots,n\}\to\mathbb{R}, f(i,j)=a_{ij}$.

Se notează matricea cu elementele $(a_{ij})_{i=\overline{1,m},j=\overline{1,n}}$ cu $\mathbf{A}=(a_{ij})_{i=\overline{1,m},j=\overline{1,n}}$.

Se notează mulţimea matricelor cu m linii şi n coloane, $m,n\in\mathbb{N}^*$ cu

$$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})=\left\{\mathbf{A};\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n}\\ ... & ... & ... & ...\\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn}\end{pmatrix}, a_{ij}\in\mathbb{K},\forall i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}\right\}.$$

Cazuri particulare:

•Dacă $m=n$ se obţine mulţimea matricelor *pătratice*

$$\mathcal{M}_{n}(\mathbb{K})=\left\{\mathbf{A};\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n}\\ ... & ... & ... & ...\\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}\end{pmatrix}, a_{ij}\in\mathbb{K},\forall i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}\right\}.$$

•Dacă $m=1$ se obţine mulţimea matricelor *linie*

$\mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{K})=\left\{\mathbf{A};\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\end{pmatrix}, a_{1j}\in\mathbb{K},\forall j=\overline{1,n}\right\}\simeq\mathbb{K}^n$.

•Dacă $n=1$ se obţine mulţimea matricelor *coloană*

$$\mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})=\left\{\mathbf{A};\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ ...\\ a_{m1}\end{pmatrix}, a_{i1}\in\mathbb{K},\forall i=\overline{1,m}\right\}\simeq\mathbb{K}_m.$$

Definiţia 2. Fie $\forall(\mathbf{A},\mathbf{B})\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se defineşte *egalitatea* a două matrice $\mathbf{A}$ şi $\mathbf{B}$ de acelaşi tip prin

$\mathbf{A}=\mathbf{B}\Leftrightarrow\left[a_{ij}=b_{ij},\forall i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}\right]$.

Definiţia 3. Pe mulţimea $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ se defineşte *operaţia internă de adunare a matricelor*

$+:\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})\to\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),\forall(\mathbf{A},\mathbf{B})\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n}\\ ... & ... & ...\\ a_{m1} & ... & a_{mn}\end{pmatrix}}_{\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})}+\underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & ... & b_{1n}\\ ... & ... & ...\\ b_{m1} & ... & b_{mn}\end{pmatrix}}_{\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})}=\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & ... & a_{1n}+b_{1n}\\ ... & ... & ...\\ a_{m1}+b_{m1} & ... & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}}_{\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})}.$$

Matricea $\mathbf{A}+\mathbf{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{i=\overline{1,m},j=\overline{1,n}}$ se numeşte *matricea sumă* dintre matricea $\mathbf{A}$ şi matricea $\mathbf{B}$.

Propoziţia 1. $(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),+)$ este *grup abelian* , adică

(GA_1) $\forall(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})^3:(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$

(adunarea matricelor este *asociativă*);

(GA_2) $\exists\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})}\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ (numită *matricea zero,* $\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})}=(0_{\mathbb{K}})_{i=\overline{1,m},j=\overline{1,n}}$) astfel încât

$\forall\mathbf{A}\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}):\mathbf{A}+\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})}=\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})}+\mathbf{A}=\mathbf{A}$;

(GA_3) $\forall\mathbf{A}\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),\exists(-\mathbf{A})\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ (numită *opusa matricei* $\mathbf{A}$, $-A=(-a_{ij})_{i=\overline{1,m},j=\overline{1,n}}$) astfel încât

$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=(-\mathbf{A})+\mathbf{A}=\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})}$;

(GA_4) $\forall(\mathbf{A},\mathbf{B})\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})^2:\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$

(adunarea matricelor este *comutativă*).

Exerciţiul 1. Să se precizeze care dintre următoarele matrice se pot aduna şi, în caz că este posibil, să se determine suma lor:
a) $A=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}3 & 7\end{pmatrix}$;**b)** $A=\begin{pmatrix}3 & 7\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$;
c) $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\-3 & 5\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}-1 & -7\\-3 & 2\end{pmatrix}$; **d)** $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -5 & 7\\2 & -3 & 0 & 4\\4 & 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1 & -5\\1 & 2 & -1 & 2\\5 & 1 & 1 & -8\end{pmatrix}$.

Rezolvare. a) $A=\underbrace{\begin{pmatrix}2=a_{11}\\5=a_{21}\end{pmatrix}}_{2\times1}$ şi $B=\underbrace{\begin{pmatrix}3=a_{11} & 7=a_{12}\end{pmatrix}}_{1\times2}$;

NU, deoarece A şi B nu sunt de acelaşi tip.
b) NU, deoarece A şi B nu sunt de acelaşi tip.
c) $A+B=\begin{pmatrix}2=a_{11} & 1=a_{12}\\-3=a_{21} & 5=a_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & -7\\-3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -6\\-6 & 7\end{pmatrix}$;
d) $A+B=\begin{pmatrix}1=a_{11} & 0=a_{12} & -5=a_{13} & 7=a_{14}\\2=a_{21} & -3=a_{22} & 0=a_{23} & 4=a_{24}\\4=a_{31} & 1=a_{32} & -2=a_{33} & 3=a_{34}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3=b_{11} & 2=b_{12} & 1=b_{13} & -5=b_{14}\\1=b_{21} & 2=b_{22} & -1=b_{23} & 2=b_{24}\\5=b_{31} & 1=b_{32} & 1=b_{33} & -8=_{34}\end{pmatrix}=$
$=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -4 & 2\\3 & -1 & -1 & 6\\9 & 2 & -1 & -5\end{pmatrix}$.

Definiţia 4. Fie $(\mathbb{K},+,\cdot)$ un corp comutativ şi $m,n,p\in\mathbb{N}^*$. Se numeşte *matricea produs* al matricei $\mathbf{A}\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ cu matricea $\mathbf{B}\in\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ (în această ordine) matricea

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\underbrace{\begin{pmatrix}a_{11} & ... & a_{1n}\\ ... & ... & ...\\ a_{m1} & ... & a_{mn}\end{pmatrix}}_{\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}b_{11} & ... & b_{1p}\\ ... & ... & ...\\ b_{n1} & ... & b_{np}\end{pmatrix}}_{\in\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})}=\underbrace{\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+...+a_{1n}b_{n1} & ... & a_{11}b_{1p}+...+a_{1n}b_{np}\\ ... & ... & ...\\ a_{m1}b_{11}+...+a_{mn}b_{n1} & ... & a_{m1}b_{1p}+...+a_{mn}b_{np}\end{pmatrix}}_{\in\mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})},$$

adică $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\left(\sum\limits_{j=1}^{m}a_{ij}b_{jk}\right)_{i=\overline{1,m},k=\overline{1,p}}\in\mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$.
Operaţia $\cdot:\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})\to\mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ nu este o operaţie internă pe vreo mulţime.
Pentru $m=n=p$, pe mulţimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se defineşte *operaţia internă de înmulţire a matricelor pe* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$\cdot:\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\forall(\mathbf{A},\mathbf{B})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\begin{pmatrix}a_{11} & ... & a_{1n}\\ ... & ... & ...\\ a_{n1} & ... & a_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{11} & ... & b_{1n}\\ ... & ... & ...\\ b_{n1} & ... & b_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+...+a_{1n}b_{n1} & ... & a_{11}b_{1n}+...+a_{1n}b_{nn}\\ ... & ... & ...\\ a_{n1}b_{11}+...+a_{nn}b_{n1} & ... & a_{n1}b_{1n}+...+a_{nn}b_{nn}\end{pmatrix}.$$

Propoziţia 2. *(Proprietăţi ale înmulţirii matricelor)*
a) $\forall(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K}):(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$
("asociativitatea" înmulţirii matricelor);
b) $\forall(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})\times(\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}))^2:\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$
(înmulţirea este "distributivă" la stânga faţă de adunare);
c) $\forall(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})\in(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}))^2\times\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}):(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$
(înmulţirea este "distributivă" la dreapta faţă de adunare).
Denumirile puse între ghilimele sunt fără numai pentru $m=n=p$.
Propoziţia 3. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\cdot_{\text{între matrice}})$ are o structura de *monoid*, adică sunt verificate:
(M_1) $\forall(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^3:(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$
(asociativitatea înmulţirii matricelor pătratice);
(M_2) $\exists\mathbf{I}_n\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (numită *matricea unitate, identitate*) astfel încât
$\forall\mathbf{A}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}):\mathbf{A}\cdot\mathbf{I}_n=\mathbf{I}_n\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}$,

unde $\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ sau

$\mathbf{I}_n = (\delta_{ij})_{i=\overline{1,n},j=\overline{1,n}}$, unde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j, \\ 0, & \text{dacă } i \neq j, \end{cases}$ sunt simbolurile lui Kronecker.

Propoziţia 4. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \cdot_{\text{între matrice}}, +)$ are o structura de inel necomutativ, cu divizori ai lui zero.
$\left(\text{de exemplu: } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$

Observaţia 1. În $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \cdot)$ operaţia de înmulţire a matricelor **nu este comutativă**. În $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \cdot)$ **nu orice matrice este inversabilă**.

Definiţia 5. Fie $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un corp comutativ şi $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}_2$ Se numeşte *matricea putere a* $2-a$ a matricei $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ cu matricea $\mathbf{A}^2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matricea

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} =$$
$$= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1p} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{np} \end{pmatrix}}_{\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}a_{11} + ... + a_{1n}a_{n1} & ... & a_{11}a_{1n} + ... + a_{1n}a_{nn} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1}a_{11} + ... + a_{nn}a_{n1} & ... & a_{n1}a_{1n} + ... + a_{nn}a_{nn} \end{pmatrix}}_{\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})},$$

adică $\mathbf{A}^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)_{i=\overline{1,n},k=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Analog $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{A}, \mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^3 \cdot \mathbf{A}, ..., \mathbf{A}^k = \mathbf{A}^{k-1} \cdot \mathbf{A}$.

Propoziţia 5. *(Proprietăţi ale ridicării la putere a matricelor)* $\forall k, p \in \mathbb{N}_2$,

a) $\forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \mathbf{A}^k \cdot \mathbf{A}^p = \mathbf{A}^{k+p}$.

b) $\forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, matrice inversabilă: $\mathbf{A}^k \cdot \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^p = \mathbf{A}^{k-p}$.

c) $\forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \left(\mathbf{A}^k\right)^p = \mathbf{A}^{k \cdot p}$.

d) $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^k = \mathbf{A}^k \cdot \mathbf{B}^k$.

e) $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbf{B}$ matrice inversabilă: $\left(\mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{B}^{-1}\right)\right)^k = \mathbf{A}^k \cdot \left(\mathbf{B}^{-1}\right)^k$.

Exerciţiul 2. a) Se dau matricele: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Să se calculeze, dacă este posibil, produsele AB şi BA. Este adevărată egalitatea $AB = BA$?

Rezolvare.

$$AB = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}}_{2\times\underline{2}-\text{nr de col}} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}_{\underline{2}.\text{nr de lin}\times 2} = \underbrace{\begin{pmatrix} -5 = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-3) & -12 = 2 \cdot (-7) + 1 \cdot 2 \\ -12 = (-3)(-1) + 5(-3) & 31 = -3 \cdot (-7) + 5 \cdot 2 \end{pmatrix}}_{2\times 2}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -36 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}.$$

Se observă că $AB \neq BA$.

b) Este posibil ca produsul a două matrice nenule să fie matricea nulă?

Rezolvare. Da,

$\exists A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \theta_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}, \exists B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \theta_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ astfel încât

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \theta_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}.$$

c) Este posibil ca $A \neq \theta, AB = AC \nRightarrow B = C$? (adică să nu existe o regulă similară simplificării numerelor reale)

Rezolvare. Da,

$\exists A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \theta_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}, \exists B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B \neq C$, astfel încât

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; AC = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, AB = AC.$$

Exerciţiul 3. Să se precizeze care dintre următoarele matrice se pot înmulţi şi, dacă da, să se precizeze dimensiunile matricei produs:

a) $A=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}3&7\end{pmatrix}$;**b)** $A=\begin{pmatrix}3&7\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$;

c) $A=\begin{pmatrix}2&1\\-3&5\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}-1&-7\\-3&2\end{pmatrix}$;**d)** $A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\3&2&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\2&-3&1\\1&2&0\end{pmatrix}$.

Rezolvare.

a) $AB=\underbrace{\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}}_{2\times\underline{1}}\underbrace{\begin{pmatrix}3&7\end{pmatrix}}_{\underline{1}\times 2}=\underbrace{\begin{pmatrix}6=2\cdot3&14=2\cdot7\\15=5\cdot3&35=5\cdot7\end{pmatrix}}_{2\times2}$

b) $AB=\underbrace{\begin{pmatrix}3&7\end{pmatrix}}_{1\times\underline{2}}\underbrace{\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}}_{\underline{2}\times 1}=\underbrace{(41=3\cdot2+7\cdot5)}_{1\times1}$;

c) $AB=\begin{pmatrix}2&1\\-3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-7\\-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-12\\-12&31\end{pmatrix}$;

d) $AB=\begin{pmatrix}2&-1&0\\3&2&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&-1\\2&-3&1\\1&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1&-3\\5&-7&-1\\1&-5&1\end{pmatrix}$.

Alte exemple de matrice care se pot înmulţi:

e) $\begin{pmatrix}1&0&-2\\2&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\8&3\end{pmatrix}$; **f)** $\begin{pmatrix}1&0&-2\\2&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix}1&-3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=(7)$.

Exerciţiul 4. Fie matricele A,B,C,D

$$A=\begin{pmatrix}3&0\\-1&2\\1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&5&2\\-1&1&0\\-4&1&3\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}-3&-1\\2&1\\4&3\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}4&-1\\2&0\end{pmatrix}.$$

Calculaţi acele matrice dintre cele enumerate mai jos care sunt definite:

$A+B,A+C,AB,BA,CD,DC,D^2$.

Rezolvare. $A+B$ nu are sens.

$$A+C=\begin{pmatrix}3&0\\-1&2\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&-1\\2&1\\4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&3\\5&4\end{pmatrix}.$$

AB nu are sens.

$$BA=\underbrace{\begin{pmatrix}1&5&2\\-1&1&0\\-4&1&3\end{pmatrix}}_{3\times\underline{3}}\underbrace{\begin{pmatrix}3&0\\-1&2\\1&1\end{pmatrix}}_{\underline{3}\times2}=\underbrace{\begin{pmatrix}0&12\\-4&2\\-10&5\end{pmatrix}}_{3\times2}.$$

$$CD=\begin{pmatrix}-3&-1\\2&1\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-1\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14&3\\10&-2\\22&-4\end{pmatrix}.$$

DC nu are sens.

$$D^2=D\cdot D=\begin{pmatrix}4&-1\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-1\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&-4\\8&-2\end{pmatrix}.$$

D^2 are sens numai pentru matrice pătratice.

Definiţia 6. Pe mulţimea $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ se defineşte *operaţia externă de înmulţire a matricelor din* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *cu scalari din corpul* $\mathbb{K}$

$\cdot : \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$,

$$\forall (\alpha, \mathbf{A}) \in \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & ... & \alpha a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ \alpha a_{m1} & ... & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matricea $\alpha\mathbf{A} = (\alpha a_{ij})_{i=\overline{1,m},j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ se numeşte *matricea produs* al matricei $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ cu scalarul $\alpha \in \mathbb{K}$.

La capitolul *Spaţii liniare* (*vectoriale*) *peste* $\mathbb{K}$ se va arăta că:

Propoziţia 6. $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *are o structura de* $\mathbb{K}$-*spatiu liniar* (*spaţiu liniar peste corpul comutativ* K) *în raport cu operaţiile definite anterior* (K *poate* fi considerat $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$), adică sunt verificate:

a) $(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), +)$ este grup abelian.

b) (SL_1) $\forall (\alpha, \beta, \mathbf{A}) \in \mathbb{K}^2 \times \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{A}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{A}$;

(SL_2) $\forall (\alpha, \beta, \mathbf{A}) \in \mathbb{K}^2 \times \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : (\alpha + \beta) \cdot \mathbf{A} = (\alpha \cdot \mathbf{A}) + (\beta \cdot \mathbf{A})$;

(SL_3) $\forall (\alpha, \mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})^2 : \alpha \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\alpha \cdot \mathbf{A}) + (\alpha \cdot \mathbf{B})$;

(SL_4) $\forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : 1_{\mathbb{K}} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$.

Definiţia 7. a) Fie $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se numeşte *matrice transpusă* matricei $\mathbf{A}$ matricea $\mathbf{A}^T \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ ce are drept linii, respectiv coloane, coloanele, respectiv liniile matricei $\mathbf{A}$.

$A^T = (a_{ji})_{j=\overline{1,n},i=\overline{1,m}} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$

b) Fie $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\mathbf{A}$ se numeşte *matrice simetrică* dacă $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ şi *matrice antisimetrică* dacă $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$. Se notează cu $\mathcal{M}_n^s(\mathbb{K})$ mulţimea matricelor pătratice simetrice şi cu $\mathcal{M}_n^a(\mathbb{K})$ mulţimea matricelor pătratice antisimetrice.

Propoziţia 7. *(Proprietăţi ale transpunerii matricelor)*

a) $\forall (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in (\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}))^2 : (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$.

b) $\forall (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}) : (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$.

c) $\forall (\alpha, \mathbf{A}) \in \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : (\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T$.

d) $\forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.

Definiţia 8. a) Fie $\mathbf{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\mathbf{D}$ se numeşte *matrice diagonală* dacă

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ ... & ... & \dots & ... \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ cu } \lambda_i \in \mathbb{K}, i = \overline{1,n}.$$

b) Fie $\mathbf{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\mathbf{L}$ se numeşte *matrice inferior triunghiulară* dacă

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}, \text{ cu } l_{ij} \in \mathbb{K}, i,j = \overline{1,n}.$$

c) Fie $\mathbf{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\mathbf{U}$ se numeşte *matrice superior triunghiulară* dacă

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}, \text{ cu } u_{ij} \in \mathbb{K}, i,j = \overline{1,n}.$$

Exerciţiul 5. Fie matricele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Să se determine, dacă este posibil, următoarele matrice:

a) $2B$; **b)** $-C$; **c)** $-3A$; **d)** $C - 3A$; **e)** $C - 3B$; **f)** AB; **g)** BA; **h)** BC; **i)** CB.

În cazul în care determinarea nu se poate face, să se explice de ce.

j) Să se determine, dacă este posibil, matricea $(AC)^T$ şi să se verifice dacă $\underline{(AC)^T = C^T A^T}$.

Rezolvare. a) $2B = 2\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -12 & -8 \end{pmatrix}$;
b) $-C = -\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;
c) $-3A = -3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3 & -3 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$;
d) $C - 3A$ nu are sens;
e) $C - 3B = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 19 & 10 \end{pmatrix}$
f) $AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 10 \\ -9 & -6 \\ -12 & -8 \end{pmatrix}$.
g) BA nu are sens;
h) $BC = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 \\ -34 & 32 \end{pmatrix}$.
i) $CB = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 & 26 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$.
j) $AC = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$; $(AC)^T = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$;

$C^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Exerciţiul 6. Fie $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Să se demonstreze că
a) $(A+B)\cdot(A-B) = A^2 - B^2 \Leftrightarrow A\cdot B = B\cdot A$.
b) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Leftrightarrow A\cdot B = B\cdot A$.
Rezolvare. a) Fie $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
" $\Rightarrow$ "Se presupune că $(A+B)\cdot(A-B) = A^2 - B^2$.
Atunci, folosind presupunerea şi proprietăţile operaţiilor cu matrice$\Rightarrow$

$A\cdot(A-B) + B\cdot(A-B) = A\cdot A - B\cdot B \Rightarrow A\cdot A - A\cdot B + B\cdot A - B\cdot B = A\cdot A - B\cdot B \Rightarrow$
$A\cdot B = B\cdot A$.

" $\Leftarrow$ "Se presupune că $A\cdot B = B\cdot A$.
Atunci, folosind presupunerea şi proprietăţile operaţiilor cu matrice$\Rightarrow$

$(A+B)\cdot(A-B) = A\cdot(A-B) + B\cdot(A-B) =$
$= A\cdot A - A\cdot B + B\cdot A - B\cdot B \overset{A\cdot B = B\cdot A}{=} A^2 - B^2$.

Exerciţiul 7. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Să se demonstreze că

$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)\mathbf{I}_2 = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})}$.

(*ecuaţia caracteristică* ataşată matricei din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$).
Rezolvare. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Atunci

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)\mathbf{I}_2 =$$
$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+da & ab+db \\ ac+dc & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}.$$

Exerciţiul 8. Fie (1) $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Folosind relaţia (2) $A^2 = 4A - 3\mathbf{I}_2$ (este chiar ecuaţia caracteristică, se putea deduce de la exerciţiul 7) şi inducţia matematică, să se demonstreze că:

$P(n): A^n = \frac{3^n-1}{2}A + \frac{3-3^n}{2}\mathbf{I}_2, \forall n \in \mathbb{N}_2.$

Demonstraţie. Într-adevăr:

$P(2): A^2 = \frac{3^2-1}{2}A + \frac{3-3^2}{2}\mathbf{I}_2$-adevărată conform (2)

$P(k) \Rightarrow P(k+1), \forall k \in \mathbb{N}_2:$

Se presupune $P(k)$ adevărată: $A^k = \frac{3^k-1}{2}A + \frac{3-3^k}{2}\mathbf{I}_2.$

Se arată că $P(k+1)$ adevărată:

$$A^{k+1} = A^k A = \left(\frac{3^k-1}{2}A + \frac{3-3^k}{2}\mathbf{I}_2\right)A = \frac{3^k-1}{2}A^2 + \frac{3-3^k}{2}A \overset{(2)}{=}$$
$$= \frac{3^k-1}{2}(4A-3\mathbf{I}_2) + \frac{3-3^k}{2}A = \frac{3^{k+1}-1}{2}A + \frac{3-3^{k+1}}{2}\mathbf{I}_2\text{-q.e.d.}$$

Definiţia determinantului unei matrice pătratice cu elemente reale şi reguli de calcul-vezi mai jos sau liceu.

Definiţia unui minor de ordin p al unei matrice, a unui minor complementar unui minor de ordin p, a unui complement algebric al unui minor de ordin p-vezi liceu.

○**Definiţia 9**. Fie $M = \{1, 2, ..., n\}$.

a) O funcţie bijectivă $\sigma : M \to M$ se numeşte *permutare pe* M. Mulţimea tuturor permutărilor lui M cu operaţia de compunere formează un grup, notat S_n.

b) O permutare σ *admite o inversiune* dacă există $i < j$ astfel încât $\sigma(i) > \sigma(j)$.

c) O permutare σ se numeşte *pară* (respectiv *impară*) dacă admite un număr par (respectiv impar) de inversiuni.

d) Aplicaţia $\varepsilon : S_n \to \{-1, 1\}$, $\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \sigma \text{ este pară,} \\ -1 & \text{dacă } \sigma \text{ este impară} \end{cases}$ se numeşte *signatură*, iar $\varepsilon(\sigma)$ se numneşte *signatura permutării* σ.

○**Exerciţiul 9**. Fie $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ şi $\sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ o permutare din S_5. Să se precizeze paritatea permutării.

Rezolvare. Inversiunile sunt:

$\sigma(1) = 2 > \sigma(3) = 1,$
$\sigma(2) = 3 > \sigma(3) = 1,$
$\sigma(4) = 6 > \sigma(5) = 5,\ \sigma(4) = 6 > \sigma(6) = 4,$
$\sigma(5) = 5 > \sigma(6) = 4.$

Numărul de inversiuni este 5. Permutarea este impară, $\varepsilon(\sigma) = -1$.

○**Definiţia 10**. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice pătratică. Se numeşte *determinantul matricei* A numărul real $\det A \in \mathbb{R}$ definit prin

$$\det A = \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)},$$

unde S_n este mulţimea permutărilor mulţimii $\{1, 2, \dots, n\}$, iar $\varepsilon(\sigma)$ este signatura permutării σ.

Se notează: $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$

Propoziţia 8. (*proprietăţi ale determinanţilor*) Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Atunci:

a) $\boxed{\det(A^T) = \det(A), \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ (orice proprietate referitoare la liniile unui determinant este adevărată şi pentru coloane).

b) Dacă elementele unei linii / coloane ale unei matrice A se înmulţesc cu un scalar α, atunci determinantul noii matrice este $\alpha \det A$. Mai mult,

$\boxed{\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A), \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \alpha \in \mathbb{R}.}$

c) Dacă într-un determinant se schimbă între ele două linii / coloane, atunci se schimbă semnul determinantului.

d) Un determinant este **nul** dacă:
- toate elementele unei linii / coloane sunt nule sau
- are două linii / coloane proporţionale (deci şi dacă are două linii / coloane egale) sau
- una dintre linii / coloane este o combinaţie liniară de două linii / coloane.

e) Valoarea unui determinant **nu se schimbă** dacă la elementele unei linii / coloane adăugăm combinaţii liniare formate cu elementele altor două sau mai multe linii / coloane.

f) $\boxed{\det(AB) = \det(A)\det(B), \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

g) Determinantul unei matrice diagobale, triunghiulare inferior, respectiv superior este egal cu produsul elementelor de pe diagonala principală:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ ... & ... & \dots & ... \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot ... \cdot \lambda_n.$$

$$\begin{vmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{vmatrix} = l_{11} \cdot l_{22} \cdot ... \cdot l_{nn}; \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{vmatrix} = u_{11} \cdot u_{22} \cdot ... \cdot u_{nn}.$$

Definiţia 11. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A se numeşte *matrice ortogonală* dacă
$A^T \cdot A = A \cdot A^T = I_n$.

Propoziţia 9. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este matrice ortogonală, atunci $\det(A) = \pm 1$. Reciproc, nu.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1, \text{ dar } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

○**Definiţia 12**. Se numeşte *urma matricei* $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ numărul complex

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

○**Propoziţia 10**. Au loc:

a) $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B), \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C});$

b) $\mathrm{Tr}(\alpha A) = \alpha \,\mathrm{Tr}(A), \forall \alpha \in \mathbb{C}, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C});$

c) $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA), \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C});$

d) $\mathrm{Tr}\left(AA^T\right) = 0 \Rightarrow A = \theta_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});$

e) $\mathrm{Tr}\left(UAU^{-1}\right) = \mathrm{Tr}(A), \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu $\det(U) \neq 0$.

Demonstraţie. În ipotezele subpunctului:

a) $\mathrm{Tr}(A+B) \underset{\text{def. Tr}}{\overset{+\text{ în } \mathcal{M}_n(\mathbb{C})}{=}} \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B);$

b) $\mathrm{Tr}(\alpha A) \underset{\text{def. Tr}}{\overset{\cdot \text{ pe } \mathcal{M}_n(\mathbb{C})}{=}} \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_{ii}) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \alpha \,\mathrm{Tr}(A);$

c) $AB = \left(\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} b_{kj})\right)_{i,j=\overline{1,n}}; BA = \left(\sum_{k=1}^{n} (b_{ik} a_{kj})\right)_{i,j=\overline{1,n}} \Rightarrow$

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{ji} = \mathrm{Tr}(BA);$$

d) $AA^T = \left(\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} a_{jk})\right)_{i,j=\overline{1,n}} \Rightarrow \mathrm{Tr}\left(AA^T\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij})^2.$

$$\mathrm{Tr}\left(AA^T\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij})^2 = 0 \Rightarrow A = \theta_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \text{ în } \mathcal{M}_n(\mathbb{R});$$

e) $\mathrm{Tr}\left(\underbrace{UAU^{-1}}_{\text{un } A \text{un } B}\right) \overset{c)}{=} \mathrm{Tr}\left(\underbrace{U^{-1}UA}_{\text{un } B \text{un } A}\right) = \mathrm{Tr}\,(A)\,.$

Observaţia 2. Calculul unui determinant are sens numai pentru matrice pătratice.

Regula $n = 2$:

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.}$$

Regula $n = 3$:

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.}$$

(Sarus, triunghiului, dezvoltarea după o linie, după o coloană)

Pentru $n \geq 4$ se folosesc reguli legate de dezvoltarea după o linie, după o coloană, Lagrange.

Exerciţiul 10. Să se calculeze determinanţii:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$;**b)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; **c)** $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 9 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$; **d)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Rezolvare. Matricele A de la exerciţiu sunt pătratice, de ordin $n = 2, 3, 4$. Deci are sens calculul pentru $\det A$.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-3) \cdot 1 = 7.$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}\overset{Sarus}{=}$
$\begin{matrix} 2 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & 0 \end{matrix}$

$= (2 \cdot 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 \cdot 0) - (2 \cdot 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 \cdot 2) = 35.$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{triunghiului}{=}$

$= (2 \cdot 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 \cdot 0) - (2 \cdot 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 \cdot 2) = 35$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{de ex., dezv. după } l_1}{=} 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} +$

$+ (-3) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 35$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{de ex., dezv. după } c_3}{=} (-3) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} +$

$+2 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 35.$

c) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 9 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{de ex., dezv. după } l_1}{=} 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 9 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} +$

$+1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 9 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -256.$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{de ex., dezv. după } c_3}{=} 0 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} +$

$+0 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1.$

Exerciţiul 11. Fie $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ cu $\det A = 17$. Să se calculeze $\det\left(3A^2\right)$.
Rezolvare. $\det\left(3A^2\right) = 3^7 \det(A \cdot A) = 3^7 \det A \cdot \det A = 3^7 \cdot 17^2$.

Definiţia 13. Fie $\forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Matricea $\mathbf{A}$ este *matrice inversabilă* dacă
$\exists \mathbf{A}^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ astfel încât $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.
Matricea $\mathbf{A}^{-1}$ se numeşte *inversa* matricei $\mathbf{A}$.
Reguli de calcul-vezi liceu.
Teorema 1. $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det \mathbf{A} \neq 0$ (matricea $\mathbf{A}$ este nesingulară).
Propoziţia 11. (*proprietăţi ale inversării*) Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice pătratice inversabile. Atunci:
a) A^{-1} este inversabilă şi $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;
b) AB este inversabilă şi $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
c) A^T este inversabilă şi $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$;
d) αA este inversabilă şi $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$, $\lambda \neq 0$.

Exerciţiul 12. Să se determine, dacă există, inversele matricelor
a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; **c)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ R. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;
d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ R. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ R. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **f)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ R. $\nexists A^{-1}$.

Rezolvare. a) Se calculează $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow \exists A^{-1}$.

Metoda liceu-schiţă $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^*}$

$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$a_{11}^* = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; a_{12}^* = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4; a_{13}^* = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3;$

$a_{21}^* = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; a_{22}^* = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1. \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5; a_{23}^* = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3;$

$a_{31}^* = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1; a_{32}^* = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6; a_{33}^* = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4.$

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^* = \dfrac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$

○**Metoda Gauss, varianta 1**

Se efectuează transformări elementare asupra *liniilor* matricei cu blocurile A, I_n(adunări de linii, înmulţirea unei linii cu un scalar nenul, permutări de linii) după regula $(A|\ I_n) \sim ... \sim (I_n|\ A^{-1})$.

Etapa 1. Se efectuează transformări elementare asupra *liniilor* matricei cu blocurile A, I_n, $(A|\ I_n)$, până se obţine pe primul bloc o matrice superior triunghiulară, după algoritmul:

pasul 1. Se păstrează prima linie a matricei $(A|\ I_n)$ şi se face zero pe prima coloană, sub diagonala principală a matricei A;

pasul 2. Se păstrează prima şi a doua linie şi se face zero pe a doua coloană, sub diagonala principală a matricei de la pasul 1 ;

ş.a.m.d.

Dacă la unul din paşi, la intersecţia dintre diagonala principală a primului bloc şi linia corespunzătoare pasului apare elementul 0, atunci se introduce un pas intermediar, în care se permută între ele linia cu elementul 0 cu o linie situată sub ea.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{2} & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{l_1 \\ -l_1+2l_2 \\ l_1+2l_3}}{\overset{pas1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-4} & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \underset{\substack{l_1 \\ l_2 \\ 3l_2+2l_3}}{\overset{pas2}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

Etapa 1'. Se transformă matricea superior triunghiulară de pe primul bloc al matricei obţinută la Etapa 1 în matricea unitate, efectuând transformări elementare asupra *liniilor* după algoritmul:

pasul 1'. Se păstrează ultima linie şi se face zero pe ultima coloană a primului bloc, deasupra diagonalei principale a matricei de la Etapa1;

pasul 2'. Se păstrează ultima şi penultima linie şi se face zero pe penultima coloană a primului bloc, deasupra diagonalei principale a matricei de la pasul 1';

ş.a.m.d. (dacă matricea este de ordin mai mare decât 3)

pasul final. Se face 1 pe diagonala principală a primului bloc a matricei de la pasul anterior.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 6 & 4 \end{array}\right) \underset{\substack{-3l_3+l_1 \\ 3l_3+l_2 \\ l_3}}{\overset{pas1'}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 4 & -18 & -12 \\ 0 & \boxed{-4} & 0 & -4 & 20 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right) \underset{\substack{l_2+2l_1 \\ l_2 \\ l_3}}{\overset{pas2'}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 4 & -16 & -12 \\ 0 & -4 & 0 & -4 & 20 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right) \underset{\substack{\frac{1}{4}l_1 \\ \frac{1}{-4}l_2 \\ l_3}}{\overset{\substack{pas \\ final}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

Etapa 2. S-a obţinut matricea inversă $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

○**Metoda Gauss cu matrice eşalon**

Valoarea unui determinant nu se schimbă dacă la elementele unei linii adunăm combinaţii liniare formate cu elementele altor linii. În unele probleme cu matrice e necesară aplicarea de transformări elementare asupra matricei pentru aducerea ei la o formă superior triunghiulară, încât în paşii intermediari să se păstreze determinantul. Metoda Gauss se poate folosi cu modificarea de mai jos:

Se efectuează transformări elementare asupra *liniilor* matricei cu blocurile A, I_n(adunări de linii, înmulţirea unei linii cu un scalar nenul, permutări de linii) după regula $(A|\ I_n) \sim ... \sim (I_n|\ A^{-1})$.

Etapa 1. Se efectuează transformări elementare asupra *liniilor* matricei cu blocurile A, I_n, $(A|\ I_n)$, până se obţine pe primul bloc o matrice superior triunghiulară eşalon (cu 1 pe diagonala principală), după algoritmul:

pasul 1_p. Se face 1 la intersecţia dintre prima linie a matricei $(A|\ I_n)$ cu prima coloană.
pasul 1. Se păstrează prima linie a matricei de la pasul 1 şi se face zero pe prima coloană, sub diagonala principală a primului bloc;
pasul 2_p. Se face 1 la intersecţia dintre a doua linie a matricei de la pasul 1 cu a doua coloană.
pasul 2. Se păstrează prima şi a doua linie şi se face zero pe a doua coloană, sub diagonala principală a matricei de la pasul 2_p ;
pasul 3_p. Se face 1 la intersecţia dintre a treia linie a matricei de la pasul 2 cu a treia coloană.
ş.a.m.d. (dacă matricea este de ordin mai mare decât 3).
Dacă la unul din paşi, la intersecţia dintre diagonala principală a primului bloc şi linia corespunzătoare pasului apare elementul 0, atunci se introduce un pas intermediar, in care se permută între ele linia cu elementul 0 cu o linie situată sub ea.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{\frac{1}{2}l_1 \\ l_2 \\ l_3}}{\overset{pas1_p}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{l_1 \\ -l_1+l_2 \\ l_1+l_3}}{\overset{pas1}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 3 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{l_1 \\ -\frac{1}{2}l_2 \\ l_3}}{\overset{pas2_p}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{l_1 \\ l_2 \\ -3l_2+l_3}}{\overset{pas2}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{l_1 \\ l_2 \\ 4l_3}}{\overset{pas3_p}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

Observaţie. Paşii $1_p-1, 2_p-2$ se puteau grupa astfel:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{2} & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{\frac{1}{2}l_1 \\ -\frac{1}{2}l_1+l_2 \\ \frac{1}{2}l_1+l_3}}{\overset{pas1_p-1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 3 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{l_1 \\ -\frac{1}{2}l_2 \\ \frac{3}{2}l_2+l_3}}{\overset{pas2_p-2}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{l_1 \\ -\frac{1}{2}l_2 \\ l_3}}{\overset{pas3_p}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

Etapa 1'. Se transformă matricea superior triunghiulară eşalon de pe primul bloc al matricei obţinută la Etapa 1 în matricea unitate, efectuând transformări elementare asupra *liniilor* după algoritmul:
pasul 1'. Se păstrează ultima linie şi se face zero pe ultima coloană a primului bloc, deasupra diagonalei principale a matricei de la Etapa1;
pasul 2'. Se păstrează ultima şi penultima linie şi se face zero pe penultima coloană a primului bloc, deasupra diagonalei principale a matricei de la pasul 1';
ş.a.m.d. (dacă matricea este de ordin mai mare decât 3)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 6 & 4 \end{array}\right) \underset{\substack{-\frac{3}{2}l_3+l_1 \\ -\frac{3}{4}l_3+l_2 \\ l_3}}{\overset{pas1'}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & -9 & -6 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right) \underset{\substack{-l_2+l_1 \\ l_2 \\ l_3}}{\overset{pas2'}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

Etapa 2. S-a obţinut matricea inversă $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}$.

b) Se calculează $\det A=\begin{vmatrix}1&0&1&1\\0&0&1&0\\1&1&1&0\\1&0&0&2\end{vmatrix}=-1\Rightarrow\exists A^{-1}$.

Metoda Gauss cu matrice eşalon:

Etapa 1.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}\boxed{1}&0&1&1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&1&0&0\\1&1&1&0&0&0&1&0\\1&0&0&2&0&0&0&1\end{array}\right)\underset{\text{nu e necesar}}{\overset{pas1_p}{\sim}}\ \underset{\begin{array}{c}l_1\\l_2\\-l_1+l_3\\-l_1+l_4\end{array}}{\overset{pas1}{\sim}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&1&1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-1&-1&0&1&0\\0&0&-1&1&-1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\underset{\begin{array}{c}l_1\\l_3\\l_2\\l_4\end{array}}{\overset{\begin{array}{c}pas\\intermediar\end{array}}{\sim}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&1&1&1&0&0&0\\0&\boxed{1}&0&-1&-1&0&1&0\\0&0&\boxed{1}&0&0&1&0&0\\0&0&-1&1&-1&0&0&1\end{array}\right)\underset{\text{nu e necesar}}{\overset{pas2_p}{\sim}}\ \underset{\text{nu e necesar}}{\overset{pas2}{\sim}}\ \underset{\text{nu e necesar}}{\overset{pas3_p}{\sim}}$$

$$\underset{\begin{array}{c}l_1\\l_2\\l_3\\l_3+l_4\end{array}}{\overset{pas3}{\sim}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&1&1&1&0&0&0\\0&1&0&-1&-1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&-1&1&0&1\end{array}\right)$$

Etapa 1'.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&1&1&1&0&0&0\\0&1&0&-1&-1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1&0&0\\0&0&0&\boxed{1}&-1&1&0&1\end{array}\right)\underset{\begin{array}{c}-l_4+l_1\\l_4+l_2\\l_3\\l_4\end{array}}{\overset{pas1'}{\sim}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&1&0&2&-1&0&-1\\0&1&0&0&-2&1&1&1\\0&0&\boxed{1}&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&-1&1&0&1\end{array}\right)\underset{\begin{array}{c}-l_3+l_1\\l_2\\l_3\\l_4\end{array}}{\overset{pas2'}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&2&-2&0&-1\\0&\boxed{1}&0&0&-2&1&1&1\\0&0&1&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&-1&1&0&1\end{array}\right)\underset{\text{nu e necesar}}{\overset{pas3'}{\sim}}\ \underset{\text{nu e necesar}}{\overset{\text{pas final}}{\sim}}.$$

Etapa 2. S-a obţinut matricea inversă $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-2&0&-1\\-2&1&1&1\\0&1&0&0\\-1&1&0&1\end{pmatrix}$.

○**Exerciţiul 13**. Fie $A=\begin{pmatrix}1&2\\4&8\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Ce concluzie se poate obţine din $A\cdot B=\mathbf{I}_2$, unde $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Rezolvare. $\det A=\begin{vmatrix}1&2\\4&8\end{vmatrix}=0\Rightarrow A$ este matrice singulară$\Rightarrow$

$\Rightarrow A$ nu este inversabilă, nu admite inversă.

Pentru $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (pe care nu are sens să o numim "inversă" sau "o inversă" pentru A) impunem ca

$A \cdot B = \mathbf{I}_2 \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 4a+8c & 4b+8d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\begin{cases} a+2c=1 \\ b+2d=0 \\ 4a+8c=0 \\ 4b+8d=1 \end{cases}$ -sistem incompatibil.

Deci $\nexists B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care să verifice $A \cdot B = \mathbf{I}_2$, ceea ce era de aşteptat.

Exerciţiul 14. Este unică inversa unei matrice? Să se justifice răspunsul.

Rezolvare. Inversa unei matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dacă există, este unică.

Într-adevăr, fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ o matrice inversabilă. Se presupune că există $B_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ şi $B_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a.î.

$A \cdot B_1 = B_1 \cdot A = \mathbf{I}_n$ şi $A \cdot B_2 = B_2 \cdot A = \mathbf{I}_n$.

Folosind asociativitatea înmulţirii matricelor$\Rightarrow$

$B_1 = B_1 \cdot \mathbf{I}_n = B_1 \cdot (A \cdot B_2) = (B_1 \cdot A) \cdot B_2 = \mathbf{I}_n \cdot B_2 = B_2$.

○**Exerciţiul 15.** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ două matrice care satisfac relaţiile

$A^2 = B^2 = (A \cdot B)^2 = \mathbf{I}_n$.

Să se demonstreze că $A \cdot B = B \cdot A$.

Exerciţiul 16. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Să se verifice că $A^3 = 5\mathbf{I}_3$, să se demonstreze că A este nesingulară şi să se determine A^{-1}.

Definiţia 14. Fie $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Se numeşte *rangul matricei* A numărul natural $r \in \mathbb{N}$, $r \le \min\{m,n\}$ cu proprietatea că există în A cel puţin un minor de ordinul r diferit de zero şi toţi minorii de ordin mai mare decât r, dacă există, sunt egali cu zero. Se notează $r = \operatorname{rang} A$.

În particular, $\operatorname{rang} \boldsymbol{\theta}_n = 0, \operatorname{rang} \mathbf{I}_n = n$.

Propoziţia 12.

a) $\operatorname{rang} AB \le \min\{\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B\}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$.

b) Fie $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \operatorname{rang} B = n$. Atunci

$\operatorname{rang} AB = \operatorname{rang} A$,

adică prin înmulţirea unei matrice cu o matrice nesingulară rangul matricei produs este acelaşi cu al matricei iniţiale.

c) (inegalitatea Sylvester) $\operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B \le \operatorname{rang} AB + n, \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exerciţiul 17. Să se determine rangul matricelor

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & -13 & 11 \end{pmatrix}$; **b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ R. $\operatorname{rang} A = 2$;**d)** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ R. $\operatorname{rang} A = 2$;

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ R. $\operatorname{rang} A = 1$.

Rezolvare. a) $A = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & -13 & 11 \end{pmatrix}}_{3\times 4}$

Deoarece A are 3 linii şi 4 coloane$\Rightarrow 0 \leq \operatorname{rang} A \leq \min\{3,4\} = 3$.

Metoda din liceu 1 ("de la mare la mic").

•Se calculează toţi minorii de ordin 3. Dacă există un minor de ordinul 3 nenul, atunci $\operatorname{rang} A = 3$.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -13 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 3 & 3 & -3 \\ 3 & -13 & 11 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 3 & 5 & 11 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ -1 & 3 & -3 \\ 5 & -13 & 11 \end{vmatrix} = 0.$$

$|(c_1,c_2,c_3)| = 0; |(c_1,c_3,c_4)| = 0; |(c_1,c_2,c_4)| = 0; |(c_2,c_3,c_4)| = 0;$

Deoarece toţi minorii de ordin 3 sunt nuli$\Rightarrow 0 \leq \operatorname{rang} A \leq 2$.

•Se calculează toţi minorii de ordin 2. Dacă există un minor de ordinul 2 nenul atunci $\operatorname{rang} A = 2$.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0.$$

Deoarece există un minor de ordin 2 nenul$\Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$.

Metoda din liceu 2 ("de la mic la mare").

•Dacă toate elementele matricei A sunt nule atunci $\operatorname{rang} A = 0$. $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

Deoarece A are şi elemente nenule, $\exists a_{11} = 3 \neq 0 \Rightarrow 1 \leq \operatorname{rang} A \leq 3$.

•Se calculează toţi minorii de ordin 2 ce conţin $a_{11} = 3$, obţinuţi prin bordare cu elemente rămase din liniile şi coloanele matricei. Dacă toţi minorii de acest tip sunt nuli atunci $\operatorname{rang} A = 1$.(adică orice matrice care are liniile proporţionale $\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ \alpha a & \alpha a & \alpha a & \alpha a \\ \beta a & \beta a & \beta a & \beta a \end{pmatrix}$ sau coloanele proporţionale)

$$\exists \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0.$$

Deoarece există un minor de ordin 2 de acest tip nenul$\Rightarrow 2 \leq \operatorname{rang} A \leq 3$.

•Se calculează toţi minorii de ordin 3 ce conţin blocul matriceal $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, obţinuţi prin bordare cu elemente rămase din liniile şi coloanele matricei. Dacă toţi minorii de acest tip sunt nuli atunci $\operatorname{rang} A = 2$.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -13 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 3 & 5 & 11 \end{vmatrix} = 0.$$

$|(c_1,c_2,c_3)| = 0; |(c_1,c_2,c_4)| = 0.$

Deoarece toţi minorii de ordin 3 obţinuţi prin bordare cu elemente rămase din liniile şi coloanele matricei sunt nuli$\Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$.

Metoda Gauss. Rangul unei matrice nu se modifică dacă asupra *liniilor* sale se efectuează transformări elementare (adunări de linii, înmulţirea unei linii cu un scalar nenul, permutări de linii). Atunci se transformă matricea iniţială intr-o matrice cu acelaşi rang, de formă superior triunghiulară, efectuând transformări elementare asupra liniilor după algoritmul :

pasul 1. Se păstrează prima linie şi se face zero pe prima coloană sub diagonala principală a matricei (diagonala ce porneşte de la a_{11}) ;

pasul 2. Se păstrează prima linie şi a doua linie şi se face zero pe a doua coloană sub diagonala principală a matricei de la pasul 1 ; ş.a.m.d.

Rangul matricei iniţiale este egal cu rangul matricei finale de la algorimul anterior ($^\circ$egal cu numărul de pivoţi din matricea eşalon).

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & -5 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & -13 & 11 \end{pmatrix} \underset{\substack{\boxed{l_1} \\ -l_1+l_2 \\ -l_1+l_3}}{\overset{pas1}{\sim}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & \boxed{-3} & 8 & -7 \\ 0 & 3 & -8 & 7 \end{pmatrix} \underset{\substack{l_1 \\ \boxed{l_2} \\ l_2+l_3}}{\overset{pas2}{\sim}}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & -3 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}\, A = 2.$$

Un determinant care are o linie (sau o coloana) formată din elemente nule are valoarea 0

$|(c_1, c_2, c_3)| = 0; |(c_1, c_3, c_4)| = 0; |(c_1, c_2, c_4)| = 0; |(c_2, c_3, c_4)| = 0.$

$\exists \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) = -9 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}\, A = 2.$

Se reaminteşte ca determinantul unei matrice diagonale, superior / inferior triunghiulare este produsul elementelor de pe diagonala principală. De exemplu,

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 7 \cdot 5 = -35;$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2000 & 0 \\ 0 & 7 & -50 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 7 \cdot 5 = -35; \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 20 & 7 & 0 \\ -15 & -44 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 7 \cdot 5 = -35.$$

SAU

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & -13 & 11 \end{pmatrix} \text{ are matricea eşalon } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \text{rang}\, A =$nr. de pivoţi$= 2.$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$

Metoda Gauss:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{l_1 \\ -3l_1+l_2 \\ l_3 \\ -5l_1+l_4}}{\overset{pas1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \end{pmatrix} \underset{\substack{l_1 \\ l_2 \\ l_2+l_3 \\ -l_2+l_4}}{\overset{pas2}{\sim}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}\, A = 2.$$

SAU

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ are matricea eşalon } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}\, A = \text{nr. de pivoţi} = 2.$$