SEMINAR NR. 2, REZOLVĂRI
Algebră liniară şi Geometrie analitică

1.2. **Sisteme de ecuaţii liniare**

Notaţii 1. Fie $a_{ij} \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), $\forall i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ şi $b_i \in \mathbb{K}, \forall i = \overline{1,m}$. Un sistem de m ecuaţii liniare cu n necunoscute este de forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

a_{ij} sunt *coeficienţii* sistemului, b_i sunt *termenii liberi* ai sistemului, $x_j, j = \overline{1,n}$ sunt *necunoscutele* sistemului.

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ se numeşte *matricea coeficienţilor* (cu m-nr. de linii=nr. de ecuaţii şi n-nr. de coloane=nr. de necunoscute).

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$-se numeşte *matricea termenilor liberi.*

$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ -se numeşte *matricea necunoscutelor* (devine *matricea soluţie*).

Atunci $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ se numeşte *forma matriceală* a sistemului.

Pentru alte definiţii şi notaţii-vezi curs.

Exerciţiul 1. Să se rezolve următoarele sisteme şi să se interpreteze geometric rezultatul:

a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ -x + y = 0 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ 2x - 4y = 8 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ -x + 3y = 3 \end{cases}$ R. $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x,y) = (3,2)\}$, drepte concurente.

e) $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 4x - 8y = 2 \end{cases}$ R. $S = \emptyset$, drepte paralele.

f) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$ R. $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x = 2y + 3\}$, drepte confundate.

g) $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$ R. $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x,y) = (2,-1)\}$, drepte concurente.

h) $\begin{cases} x - y = 6 \\ -2x + 2y = 1 \end{cases}$ R. $S = \emptyset$, drepte paralele.

i) $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ -x + 3y = 3 \end{cases}$ R. $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x = -\frac{5}{2}y - \frac{1}{2}\}$, drepte confundate.

Rezolvare. a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ -x + y = 0 \end{cases}$

Este un sistem de 2 ecuaţii liniare cu 2 necunoscute, neomogen, cu matricea sistemului

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ şi matricea termenilor liberi $B = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\begin{cases} x + y = 10 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (5,5)$.

Sistemul este *compatibil* (are soluţie) *unic determinat* (unică soluţie), cu mulţimea soluţiilor $S = \left\{ \left(\underbrace{5}_{x}, \underbrace{5}_{y} \right) \right\}$.

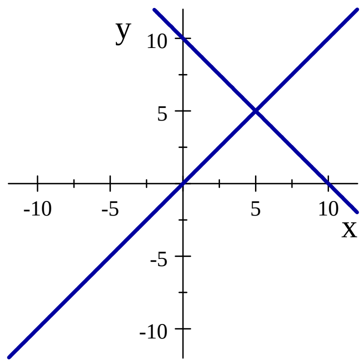
<u>Interpretare geometrică</u>: Fie xOy un reper ortonormat în plan. Atunci

(d_1) $x + y = 10$ şi (d_2) $-x + y = 0$

sunt ecuaţiile a două drepte în plan. Sistemul are soluţie unică$\Rightarrow$

$(d_1) \cap (d_2) = \{(5,5)\}$,

adică cele două drepte se intersectează (sunt concurente) în punctul de coordonate $(5,5)$.



b) $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ 2x - 4y = 8 \end{cases}$

Este un sistem de 2 ecuaţii liniare cu 2 necunoscute, neomogen, cu matricea sistemului

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ şi matricea termenilor liberi $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

$\begin{cases} x - 2y = -3 \\ 2x - 4y = 8 \,|: 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -3 \\ x - 2y = 4 \end{cases} \overset{-3 \neq 4}{\Rightarrow} \nexists\, (x,y)$ care să verifice.

Sistemul este *incompatibil* (nu are soluţii), cu mulţimea soluţiilor $S = \emptyset$.

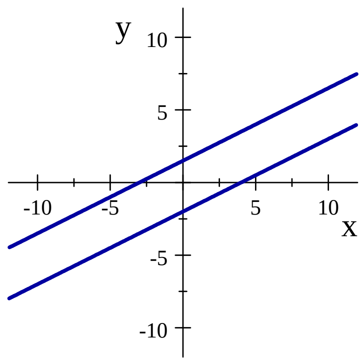
<u>Interpretare geometrică</u>: Fie xOy un reper ortonormat în plan. Atunci

(d_1) $x - 2y = -3$ şi (d_2) $2x - 4y = 8$

sunt ecuaţiile a două drepte în plan. Sistemul este incompatibil$\Rightarrow$

$(d_1) \cap (d_2) = \emptyset$,

adică cele două drepte nu se intersectează, sunt paralele.



c) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$

Este un sistem de 2 ecuaţii liniare cu 2 necunoscute, neomogen, cu matricea sistemului

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ şi matricea termenilor liberi $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \,|: 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow (x+y=3)$

Sistemul este *compatibil* (are soluţii) *nedeterminat* (cu o infinitate de soluţii, mulţimea tuturor punctelor de pe dreapta albastră trasată), cu mulţimea soluţiilor

$S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x+y=3\right\}.$

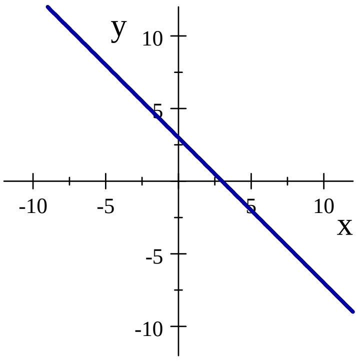
Interpretare geometrică: Fie xOy un reper ortonormat în plan. Atunci

$(d_1)\ x+y=3$ şi $(d_2)\ 2x+2y=6$

sunt ecuaţiile a două drepte în plan. Sistemul este compatibil nedeterminat$\Rightarrow$

$(d_1)\cap(d_2)=(d_1),$

adică cele două drepte se intersectează după (d_1), adică sunt confundate.



Exerciţiul 2. Să se rezolve următoarele sisteme liniare şi să se interpreteze geometric rezultatul

a) $\begin{cases} x-y-z=-1 \\ x-y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x-y-z=-1 \\ x-y+z=1 \\ -x+y+z=3 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x-y-z=2 \\ x-y+z=8 \\ x-y-3z=-4 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x-2y+z=4 \\ 2y-8z=8 \\ 2x-3y+4z=0 \end{cases}$; R. $S=\{(2,-4,-2)\}$; **e)** $\begin{cases} x-2y+z=4 \\ 2y-8z=8 \\ x-4y+9z=0 \end{cases}$; R. $S=\emptyset$;

f) $\begin{cases} x-2y+z=4 \\ 2y-8z=8 \\ x-4y+9z=-4 \end{cases}$; R. Sist compatibil nedeterminat.

Rezolvare. a) $\begin{cases} x-y-z=-1 \\ x-y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

Este un sistem de 3 ecuaţii liniare cu 3 necunoscute, neomogen, cu matricea sistemului

$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi matricea termenilor liberi $B=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Metoda liceu-schiţă

$\det A=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-4\neq 0\Rightarrow$sistem compatibil unic determinat

$\Delta_1=\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0;\ \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0;\ \Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-4.$

Un determinant cu 2 linii (coloane) egale (proporţionale) este nul.

$\boxed{x=\dfrac{\Delta_1}{\det A}}=0;\ \boxed{y=\dfrac{\Delta_2}{\det A}}=0;\ \boxed{z=\dfrac{\Delta_3}{\det A}}=1.$

Deci $(x,y,z)=(0,0,1)$ este unica soluţie.

Metoda Gauss:

Etapa 1. Se transformă sistemul iniţial într-un sistem echivalent, de formă superior triunghiulară, efectuând transformări elementare asupra *liniilor* matricei extinse (adunări de linii, înmulţirea unei linii cu un scalar nenul, permutări de linii), după algoritmul:
pasul 1. Se păstrează prima linie a matricei extinse şi se face zero pe prima coloană, sub diagonala principală a matricei A ;
pasul 2. Se păstrează prima şi a doua linie şi se face zero pe a doua coloană, sub diagonala principală a matricei de la pasul 1 ;
ş.a.m.d.
Dacă la unul din paşi, la intersecţia dintre diagonala principală a primului bloc şi linia corespunzătoare pasului apare elementul 0, atunci se introduce un pas intermediar, in care se permută între ele linia cu elementul 0 cu o linie situată sub ea.

Menţionăm că $A_1 \sim A_2$ va însemna că matricele A_1 şi A_2 vor genera sisteme de ecuaţii liniare echivalente.

$$\left(\underbrace{\begin{array}{ccc} \boxed{1} & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}}_{A} \left| \underbrace{\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 1 \end{array}}_{B}\right.\right) \begin{array}{c} \overset{pas1}{\sim} \\ \boxed{l_1} \\ -l_1+l_2 \\ -l_1+l_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{0} & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \overset{pas\ intermediar}{\sim} \\ l_1 \\ l_3 \\ l_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{\text{nu este necesar}}{\overset{pas2}{\sim}}$$

Etapa 2. S-a obţinut sistemul superior triunghiular echivalent cu cel iniţial

$$\begin{cases} x - y - z = -1 \\ \quad 2y + 2z = 2 \quad \uparrow \\ \qquad 2z = 2 \end{cases}$$

Se rezolvă recursiv sistemul anterior$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$.

Deci $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ este unica soluţie.

Metoda Gauss cu matrice eşalon-varianta 1

Valoarea unui determinant nu se schimbă dacă la elementele unei linii adunăm combinaţii liniare formate cu elementele altor linii. În unele probleme cu matrice e necesară aplicarea de transformări elementare asupra matricei pentru aducerea ei la o formă superior triunghiulară, încât în paşii intermediari să se păstreze determinantul. Metoda Gauss se poate folosi cu modificarea de mai jos:
Etapa 1. Se transformă sistemul iniţial într-un sistem echivalent, de formă superior triunghiulară cu coeficienţi 1 pe diagonală, efectuând transformări elementare asupra *liniilor* matricei extinse (adunări de linii, înmulţirea unei linii cu un scalar nenul, permutări de linii), după algoritmul:
pasul 1_p. Se face 1 la intersecţia dintre prima linie a matricei $(A|\ B)$ cu prima coloană.
pasul 1. Se păstrează prima linie a matricei de la pasul 1 şi se face zero pe prima coloană, sub diagonala principală a primului bloc;
pasul 2_p. Se face 1 la intersecţia dintre a doua linie a matricei de la pasul 1 cu a doua coloană.
pasul 2. Se păstrează prima şi a doua linie şi se face zero pe a doua coloană, sub diagonala principală a matricei de la pasul 2_p ;
pasul 3_p. Se face 1 la intersecţia dintre a treia linie a matricei de la pasul 2 cu a treia coloană.
ş.a.m.d. (dacă matricea este de ordin mai mare decât 3).
Dacă la unul din paşi, la intersecţia dintre diagonala principală a primului bloc şi linia corespunzătoare pasului apare elementul 0, atunci se introduce un pas intermediar, in care se permută între ele linia cu elementul 0 cu o linie situată sub ea.

Menţionăm că $A_1 \sim A_2$ va însemna că matricele A_1 şi A_2 vor genera sisteme de ecuaţii liniare echivalente.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{nu e necesar}}{\overset{pas1_p}{\sim}} \begin{array}{c} \overset{pas1}{\sim} \\ l_1 \\ -l_1+l_2 \\ -l_1+l_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \overset{pas\ intermediar}{\sim} \\ l_1 \\ l_3 \\ l_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \underset{\text{nu e necesar}}{\overset{pas2,3}{\sim}} \underset{\substack{l_1 \\ \frac{1}{2}l_2 \\ \frac{1}{2}l_3}}{\overset{pas2_p,3_p}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Etapa 2. S-a obţinut sistemul superior triunghiular cu 1 pe diagonală echivalent cu cel iniţial

$$\begin{cases} x - y - z = -1 \\ \quad\;\; y + z = 1 \quad \uparrow \\ \qquad\quad z = 1 \end{cases}$$

Se rezolvă recursiv sistemul anterior $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \quad \uparrow \\ z = 1 \end{cases}$

Metoda Gauss cu matrice eşalon-varianta 2-Se aplică pentru sisteme Cramer (cu $m = n$ şi matricea sistemului nesingulară)

Etapa 1. Aceeaşi cu Etapa 1 de la Varianta 1.

Etapa 1'. Se transformă matricea superior triunghiulară obţinută la Etapa 1 într-o matrice diagonală efectuând transformări elementare asupra *liniilor* după algoritmul:

pasul 1'. Se păstrează ultima linie şi se face zero pe ultima coloană a primului bloc, deasupra diagonalei principale a matricei de la Etapa1;

pasul 2'. Se păstrează ultima şi penultima linie şi se face zero pe penultima coloană a primului bloc, deasupra diagonalei principale a matricei de la pasul 1';

ş.a.m.d.

Aici$\Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{l_3 + l_1 \\ -l_3 + l_2 \\ l_3}}{\overset{pas1'}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{l_2 + l_1 \\ l_2 \\ l_3}}{\overset{pas2'}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Etapa 2. S-a obţinut sistemul diagonal cu 1 pe diagonală echivalent cu cel iniţial

$$\begin{cases} x \;\; = 0 \\ \;\; y = 0 \quad \uparrow \\ \;\; z = 1 \end{cases}$$

Indiferent de metodă, sistemul este compatibil unic determinat, cu mulţimea soluţiilor $S = \{(0,0,1)\}$.

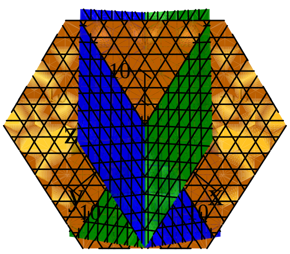
Interpretare geometrică: Fie $Oxyz$ un reper ortonormat în spaţiu. Atunci

$(\pi_1)\ x - y - z = -1$ şi $(\pi_2)\ x - y + z = 1$ şi $(\pi_3)\ x + y + z = 1$

sunt ecuaţiile a trei plane în spaţiu. Sistemul are soluţie unică$\Rightarrow$

$(\pi_1) \cap (\pi_2) \cap (\pi_3) = \{(0,0,1)\}$,

adică cele trei plane se intersectează în punctul de coordonate $(0,0,1)$.



b) $\begin{cases} x-y-z=-1 \\ x-y+z=1 \\ -x+y+z=3 \end{cases}$

Este un sistem de 3 ecuaţii liniare cu trei necunoscute (x,y şi z), neomogen, cu matricea sistemului

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ şi matricea termenilor liberi } B=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Metoda liceu-schiţă

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \text{sistem incompatibil sau compatibil nedeterminat}$$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=2;\text{rang}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)=3$$

Cum $2\neq 3 \overset{\text{Teorema Kronecker-Capelli}}{\Rightarrow}$ sistemul este incompatibil.

Metoda Gauss :

Etapa 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{\substack{l_1 \\ -l_1+l_2 \\ l_1+l_3}}{\overset{pas1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \underset{\text{nu e necesar}}{\overset{pas2}{\sim}}$$

Etapa 2. S-a obţinut sistemul superior triunghiular echivalent cu cel iniţial

$$\begin{cases} x-y-z=-1 \\ 2z=2 \\ 0=2 \end{cases}, \text{ care este incompatibil.}$$

Indiferent de metodă, sistemul este incompatibil, cu mulţimea soluţiilor $S=\emptyset$.

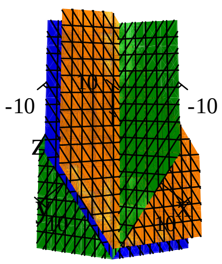
Interpretare geometrică: Fie $Oxyz$ un reper ortonormat în spaţiu. Atunci

$(\pi_1)\ x-y-z=-1$ şi $(\pi_2)\ x-y+z=1$ şi $(\pi_3)\ -x+y+z=3$

sunt ecuaţiile a trei plane în spaţiu. Sistemul nu are soluţie$\Rightarrow$

$(\pi_1)\cap(\pi_2)\cap(\pi_3)=\emptyset$,

adică cele trei plane nu au puncte comune.



c) $\begin{cases} x-y-z=2 \\ x-y+z=8 \\ x-y-3z=-4 \end{cases}$

Este un sistem de 3 ecuaţii liniare cu trei necunoscute (x,y şi z), neomogen, cu matricea sistemului

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \text{ şi matricea termenilor liberi } B=\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Metoda liceu-schiţă

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$sistem incompatibil sau compatibil nedeterminat

$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = 2; \text{rang}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & -3 & -4 \end{array}\right) = 2$

Cum $2 = 2 \overset{\text{Teorema Kronecker-Capelli}}{\Rightarrow}$ sistemul este compatibil nedeterminat, cu gradul de neterminare 3(nr. necunoscutelor)$-$2(rangul comun matricei A şi matricei extinse $A \mid B$)= 1.

Metoda Gauss:

Etapa 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & -3 & -4 \end{array}\right) \underset{\substack{l_1 \\ -l_1+l_2 \\ -l_1+l_3}}{\overset{pas1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Etapa 2. S-a obţinut sistemul superior triunghiular echivalent cu cel iniţial

$$\begin{cases} x - y - z = 2 \\ \qquad\quad 2z = 6 \\ \qquad\quad 0z = 0 \end{cases} \uparrow \Rightarrow \begin{cases} x - y \quad = 5 \\ \qquad z = 3 \end{cases} \uparrow \text{ care este compatibil nedeterminat.} \begin{cases} x = 5 + \alpha \\ y = \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 3 \end{cases}$$

Indiferent de metodă, sistemul este compatibil nedeterminat, cu mulţimea soluţiilor

$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y, z) = (5 + \alpha, \alpha, 3), \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$

De ex, $\alpha = -1 \Rightarrow (x, y, z) = (4, -1, 3)$ $-$o soluţie

$\alpha = 7 \Rightarrow (x, y, z) = (12, 7, 3) -$ o altă soluţie; mai sunt o infinitate, de tipul $(5 + \alpha, \alpha, 3)$.

Interpretare geometrică: Fie $Oxyz$ un reper ortonormat în spaţiu. Atunci

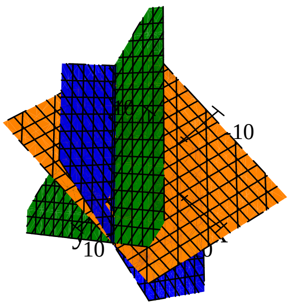
$(\pi_1)\ x - y - z = 2$ şi $(\pi_2)\ x - y + z = 8$ şi $(\pi_3)\ x - y - 3z = -4$

sunt ecuaţiile a trei plane în spaţiu. Sistemul este compatibil nedeterminat$\Rightarrow$

$(\pi_1) \cap (\pi_2) \cap (\pi_3) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y, z) = (5 + \alpha, \alpha, 3), \alpha \in \mathbb{R}\right\},$

adică cele trei plane se intersectează după dreapta de ecuaţii carteziene

$$\begin{cases} x - y - z = 2 \\ 2z = 6 \end{cases} \quad \text{sau parametrice} \begin{cases} x = 5 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = 3 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$$



Exerciţiul 7. Să se rezolve următoarele sisteme :

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8; \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2; \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_4 = -1. \end{cases}$

Rezolvare. a) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6\\ 2x_1-x_2-2x_3-3x_4=8\\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4\\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8; \end{cases}$

Este un sistem de 4 ecuaţii liniare cu 4 necunoscute (x_1,x_2,x_3,x_4), neomogen, cu matricea sistemului

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2\\ 2 & -1 & -2 & -3\\ 3 & 2 & -1 & 2\\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ şi matricea termenilor liberi } B=\begin{pmatrix} 6\\ 8\\ 4\\ -8 \end{pmatrix}.$$

Metoda liceu-schiţă

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2\\ 2 & -1 & -2 & -3\\ 3 & 2 & -1 & 2\\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=324\neq 0 \Rightarrow \text{sistem compatibil unic determinat}$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 & -2\\ 8 & -1 & -2 & -3\\ 4 & 2 & -1 & 2\\ -8 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=324;\ \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 & -2\\ 2 & 8 & -2 & -3\\ 3 & 4 & -1 & 2\\ 2 & -8 & 2 & 1 \end{vmatrix}=648;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & -2\\ 2 & -1 & 8 & -3\\ 3 & 2 & 4 & 2\\ 2 & -3 & -8 & 1 \end{vmatrix}=-324;\ \Delta_4=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6\\ 2 & -1 & -2 & 8\\ 3 & 2 & -1 & 4\\ 2 & -3 & 2 & -8 \end{vmatrix}=-648.$$

$$\boxed{x_1=\frac{\Delta_1}{\det A}}=1;\ \boxed{x_2=\frac{\Delta_2}{\det A}}=2;\ \boxed{x_3=\frac{\Delta_3}{\det A}}=-1;\ \boxed{x_4=\frac{\Delta_4}{\det A}}=-2;$$

Deci $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(1,2,-1,-2)$ este unica soluţie.

Metoda Gauss:

Etapa 1. Se aduce matricea extinsă a sistemului la formă superior triunghiulară (cu zero sub diagonala principală), folosind transformări elementare asupra liniilor:

$$\begin{array}{ccc|} -2 & -3 & -2\\ & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{array}\left(\underbrace{\begin{array}{cccc} \boxed{1} & 2 & 3 & -2\\ 2 & -1 & -2 & -3\\ 3 & 2 & -1 & 2\\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{array}}_{A}\middle|\underbrace{\begin{array}{c} 6\\ 8\\ 4\\ -8 \end{array}}_{B}\right)\begin{array}{c} \overset{pas1}{\sim}\\ l_1\\ -2l_1+l_2\\ -3l_1+l_3\\ -2l_1+l_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|} & \\ -7 & -4\\ & 5\\ 5 & \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6\\ 0 & \boxed{-5} & -8 & 1 & -4\\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14\\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right)\begin{array}{c} \overset{pas2}{\sim}\\ l_1\\ l_2\\ -4l_2+5l_3\\ -7l_2+5l_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6\\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4\\ 0 & 0 & \boxed{-18} & 36 & -54\\ 0 & 0 & 36 & 18 & -72 \end{array}\right)\begin{array}{c} pas\\ intermediar\\ \sim\\ l_1\\ l_2\\ (-1/18)\,l_3\\ (1/18)\,l_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} & \\ & \\ -2 & \\ 1 & \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \overset{pas3}{\sim} \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ -2l_3+l_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -10 \end{array}\right)$$

<u>Etapa 2.</u> S-a obţinut sistemul superior triunghiular echivalent cu cel iniţial

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6 \\ \quad -5x_2-8x_3+x_4=-4 \\ \qquad\qquad x_3-2x_4=3 \\ \qquad\qquad\quad 5x_4=-10 \end{cases} \uparrow$$

Se rezolvă recursiv sistemul anterior

$$\begin{cases} x_1=...=1 \\ x_2=...=2 \\ x_3=3+2x_4=-1 \\ x_4=-2 \end{cases} \uparrow$$

Metoda Gauss cu matrice eşalon:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right) \underset{\text{nu e necesar}}{\overset{pas1_p}{\sim}} \cdots \begin{array}{c} \overset{pas1}{\sim} \\ l_1 \\ -2l_1+l_2 \\ -3l_1+l_3 \\ -2l_1+l_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & \boxed{-5} & -8 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right) \begin{array}{c} \overset{pas2_p}{\sim} \\ \frac{1}{-5}l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{-8}{-5} & \frac{1}{-5} & \frac{-4}{-5} \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right) \begin{array}{c} \overset{pas2}{\sim} \\ l_1 \\ l_2 \\ 4l_2+l_3 \\ 7l_2+l_4 \end{array} \cdots$$

<u>Concluzie:</u> Indiferent de metodă, sistemul este compatibil unic determinat, cu mulţimea soluţiilor $S=\{(1,2,-1,-2)\}$.

b) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=1 \\ 2x_1+2x_2+2x_3-x_4=1 \\ 5x_1+5x_2+2x_3=2; \end{cases}$

Este un sistem de 5 ecuaţii liniare cu 4 necunoscute (x_1,x_2,x_3,x_4), neomogen, cu matricea sistemului

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ şi matricea termenilor liberi } B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Metoda liceu-schiţă

$\det A$ nu are sens să fie calculat!!! $(A\in\mathcal{M}_{5\times 4}(\mathbb{R}))$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}=3;\ \text{rang}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right)=3$$

$\text{rang}\,A=\text{rang}\,\overline{A}\Rightarrow$ sistemul este compatibil;

nr. necunoscutelor $=4$ şi $\text{rang}\,A=\text{rang}\,\overline{A}=3\Rightarrow$ sistemul este compatibil nedeterminat, cu gradul de neterminare $4-3=1$ (o necunoscută secundară).

Metoda Gauss:

Etapa 1.

$$\begin{array}{cccc|c}
-5 & -2 & -2 & -3 & \\
 & & & 1 & \\
 & & 1 & & \\
 & 1 & & & \\
1 & & & &
\end{array}
\left(\begin{array}{cccc|c}
\boxed{1} & 2 & 3 & -1 & 1\\
3 & 2 & 1 & -1 & 1\\
2 & 3 & 1 & 1 & 1\\
2 & 2 & 2 & -1 & 1\\
5 & 5 & 2 & 0 & 2
\end{array}\right)
\begin{array}{c}
\overset{pas1}{\sim}\\ l_1\\ -3l_1+l_2\\ -2l_1+l_3\\ -2l_1+l_4\\ -5l_1+l_5
\end{array}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & 3 & -1 & 1\\
0 & \boxed{-4} & -8 & 2 & -2\\
0 & -1 & -5 & 3 & -1\\
0 & -2 & -4 & 1 & -1\\
0 & -5 & -13 & 5 & -3
\end{array}\right)
\begin{array}{c}
\overset{pas2}{\sim}\\ l_1\\ l_2\\ -l_2+4l_3\\ -l_2+2l_4\\ -5l_2+4l_5
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & 3 & -1 & 1\\
0 & -4 & -8 & 2 & -2\\
0 & 0 & \boxed{-12} & 10 & -2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 12 & -10 & 2
\end{array}\right)
\begin{array}{c}
\overset{pas3}{\sim}\\ l_1\\ l_2\\ l_3\\ l_4\\ l_3+l_5
\end{array}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & 3 & -1 & 1\\
0 & -4 & -8 & 2 & -2\\
0 & 0 & -12 & 10 & -2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

Etapa 2. S-a obţinut sistemul superior triunghiular echivalent cu cel iniţial

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=1\\ \quad -4x_2-8x_3+2x_4=-2\\ \quad\quad -12x_3+10x_4=-2 \end{cases} \uparrow$$

Se rezolvă recursiv sistemul anterior. Cum $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot(-6) = -12 \neq 0$, se aleg corespunzător coloanelor c_1, c_2, c_3 ale determinantului anterior necunoscutele x_1, x_2, x_3 ca necunoscute principale şi $x_4=\alpha\in\mathbb{R}$ ca necunoscută secundară şi se obţine

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3 = 1+\alpha\\ \quad -4x_2-8x_3 = -2-2\alpha\\ \quad\quad -12x_3 = -2-10\alpha\\ \quad\quad\quad x_4=\alpha\in\mathbb{R} \end{cases} \uparrow \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{1}{6}(1+5\alpha)\\ x_2=\frac{1}{6}(1-7\alpha)\\ x_3=\frac{1}{6}(1+5\alpha)\\ x_4=\alpha \end{cases}, \alpha\in\mathbb{R}.$$

Mulţimea soluţiilor sistemului este

$S=\left\{x\in\mathbb{R}^4 \mid x=\left(\frac{1}{6}(1+5\alpha), \frac{1}{6}(1-7\alpha), \frac{1}{6}(1+5\alpha), \alpha\right), \alpha\in\mathbb{R}\right\}.$

c) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1\\ 2x_1-x_2+x_3-x_4=2\\ x_1-2x_2-2x_4=-1. \end{cases}$

Este un sistem de 3 ecuaţii liniare cu 4 necunoscute (x_1, x_2, x_3, x_4), neomogen, cu matricea sistemului

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ şi matricea termenilor liberi $B=\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ -1 \end{pmatrix}$.

Metoda liceu-schiţă

$\det A$ nu are sens să fie calculat!!! $(A\in\mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R}))$

$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}=2; \operatorname{rang}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 1 & -2 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right)=3$

$\operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang}\overline{A} \Rightarrow$ sistemul este incompatibil;

Metoda Gauss (a eliminării) relaxată:

Etapa 1.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 1 & -2 & 0 & -2 & -1\end{array}\right) \underset{\substack{l_1\\ -2l_1+l_2\\ -l_1+l_3}}{\overset{pas1}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & \boxed{-3} & -1 & -3 & 0\\ 0 & -3 & -1 & -3 & -2\end{array}\right) \underset{\substack{l_1\\ l_2\\ -l_2+l_3}}{\overset{pas2}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -3 & -1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\end{array}\right)$$

Etapa 2. S-a obţinut sistemul superior triunghiular echivalent cu cel iniţial

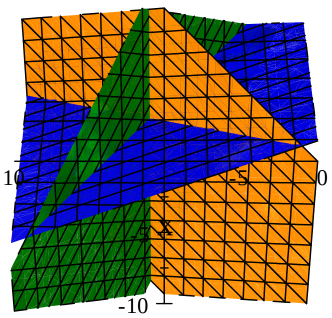
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\\ -3x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \qquad \uparrow\\ 0x_4 = -2\end{cases}$$

Sistemul anterior este incompatibil. Mulţimea soluţiilor sistemului este $S = \emptyset$.

Exerciţiul 4. Folosind metoda eliminării (Gauss), să se rezolve următorul sistem şi, dacă există, să se determine inversa matricei sistemului

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14\\ 2x - y + z = 3\\ x + y - z = 0.\end{cases}$$

Rezolvare.



Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dacă $\det A \neq 0$ atunci $\exists A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix} = 15 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Sistemul este un sistem Cramer, cu $m = n = 3$ şi matricea sistemului nesingulară.

Metoda Gauss cu matrice eşalon-Varianta 2.

Etapa 1.

$$\left(\underbrace{\begin{matrix}\boxed{1} & 2 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{matrix}}_{A} \middle| \underbrace{\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}}_{I_3} \middle| \underbrace{\begin{matrix}14\\ 3\\ 0\end{matrix}}_{\text{col. term. lib.}}\right) \underset{\substack{l_1\\ -2l_1+l_2\\ -l_1+l_3}}{\overset{pas1_p-1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 14\\ 0 & \boxed{-5} & -5 & -2 & 1 & 0 & -25\\ 0 & -1 & -4 & -1 & 0 & 1 & -14\end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{l_1\\ \frac{-1}{5}l_2\\ \frac{1}{5}l_2+l_3}}{\overset{pas2_p-2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 14\\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} & 0 & 5\\ 0 & 0 & -3 & \frac{-3}{5} & \frac{-1}{5} & 1 & -9\end{array}\right) \underset{\substack{l_1\\ l_2\\ \frac{-1}{3}l_3}}{\overset{pas3_p}{\sim}}$$

Etapa 1'.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & \frac{-1}{3} & 3 \end{array}\right) \underset{\substack{-3l_3+l_1 \\ -l_3+l_2 \\ l_3}}{\overset{pas1'}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 2 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{-1}{15} & \frac{1}{3} & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{-4}{15} & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & \frac{-1}{3} & 3 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{-2l_2+l_1 \\ l_2 \\ l_3}}{\overset{pas2'}{\sim}} \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{I_3} \middle| \underbrace{\begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & -\frac{1}{3} \end{array}}_{A^{-1}} \middle| \underbrace{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}}_{\text{col.soluţie}}\right)$$

<u>Etapa 2.</u> S-a obţinut sistemul diagonal echivalent cu cel iniţial

$$\begin{cases} x \qquad = 1 \\ \quad y \quad = 2 \\ \qquad z = 3 \end{cases} \quad \text{şi matricea inversă } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Exerciţiul 5. Folosind metoda eliminării (Gauss), să se rezolve următorul sistem şi, dacă există, să se determine inversa matricei sistemului. Să se folosească şi factorizarea LU.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Rezolvare.a) Este un sistem de 3 ecuaţii liniare cu 3 necunoscute, neomogen, cu matricea sistemului

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ şi matricea termenilor liberi } B = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

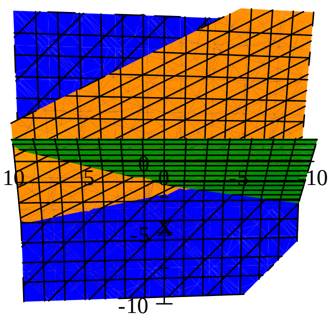
Metoda liceu-schiţă

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \Rightarrow \text{sistem compatibil unic determinat}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -8 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -24;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 8 & -8 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -48;\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -24.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\det A} = -2;\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\det A} = -4;\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\det A} = -2.$$

Deci $(x, y, z) = (-2, -4, -2)$ este unica soluţie.



Metoda liceu pentru A^{-1}. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Dacă $\det A = 12 \neq 0$ atunci $\exists A^{-1} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{5}{12} & \frac{7}{6} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Sistemul este un sistem Cramer, cu $m = n = 3$ şi matricea sistemului nesingulară.

<u>**Metoda eliminării (Gauss)**</u> .

<u>Etapa 1.</u>

$$\left(\underbrace{\begin{matrix}\boxed{1} & -2 & 1\\ 0 & 2 & -8\\ 2 & -3 & 4\end{matrix}}_{A}\left|\underbrace{\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}}_{I_3}\right|\underbrace{\begin{matrix}4\\ 8\\ 0\end{matrix}}_{\text{col. term. lib.}}\right)\underset{\substack{l_1\\ 0l_1+l_2\\ -2l_1+l_3}}{\overset{pas1_p-1}{\sim}}\left(\begin{matrix}1 & -2 & 1\\ 0 & \boxed{2} & -8\\ 0 & 1 & 2\end{matrix}\left|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{matrix}\right|\begin{matrix}4\\ 8\\ -8\end{matrix}\right)$$

$$\underset{\substack{l_1\\ \frac{1}{2}l_2\\ \frac{-1}{2}l_2+l_3}}{\overset{pas2_p-2}{\sim}}\left(\begin{matrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 6\end{matrix}\left|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ -2 & \frac{-1}{2} & 1\end{matrix}\right|\begin{matrix}4\\ 4\\ -12\end{matrix}\right)\underset{\substack{l_1\\ l_2\\ \frac{1}{6}l_3}}{\overset{pas3_p}{\sim}}$$

<u>Etapa 1'.</u>

$$\left(\begin{matrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & \boxed{1}\end{matrix}\left|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{12} & \frac{1}{6}\end{matrix}\right|\begin{matrix}4\\ 4\\ -2\end{matrix}\right)\underset{\substack{-l_3+l_1\\ 4l_3+l_2\\ l_3}}{\overset{pas1'}{\sim}}\left(\begin{matrix}1 & -2 & 0\\ 0 & \boxed{1} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\left|\begin{matrix}\frac{4}{3} & \frac{1}{12} & \frac{-1}{6}\\ \frac{-4}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3}\\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{12} & \frac{1}{6}\end{matrix}\right|\begin{matrix}6\\ -4\\ -2\end{matrix}\right)$$

$$\underset{\substack{2l_2+l_1\\ l_2\\ l_3}}{\overset{pas2'}{\sim}}\left(\underbrace{\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}}_{I_3}\left|\underbrace{\begin{matrix}\frac{-4}{3} & \frac{5}{12} & \frac{7}{6}\\ \frac{-4}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3}\\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{12} & \frac{1}{6}\end{matrix}}_{A^{-1}}\right|\underbrace{\begin{matrix}-2\\ -4\\ -2\end{matrix}}_{\text{col.soluţie}}\right)$$

<u>Etapa 2.</u> S-a obţinut sistemul diagonal echivalent cu cel iniţial

$$\begin{cases}x_1 = -2\\ x_2 = -4\\ x_3 = -2\end{cases} \quad \text{şi matricea inversă } A^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{-4}{3} & \frac{5}{12} & \frac{7}{6}\\ \frac{-4}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3}\\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{12} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}.$$

<u>**mod cu factorizare** LU</u>

$$\bullet A = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & -8\\ 2 & -3 & 4\end{pmatrix}$$

$$L_1A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & -8\\ 2 & -3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & -8\\ 2 & -3 & 4\end{pmatrix}$$

$$L_2\left(L_1A\right) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & -8\\ 2 & -3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & -8\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$L_3\left(L_2\left(L_1A\right)\right) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & -8\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & -8\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix} = U$$

$$L_3L_2L_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

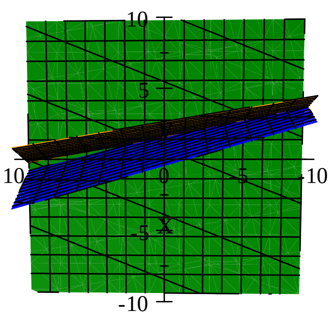
$$L = \left(L_3L_2L_1\right)^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}.$$

Atunci $\left(L_3L_2L_1\right)A = U \Rightarrow A = LU$

Într-adevăr, $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & -8\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & -8\\ 2 & -3 & 4\end{pmatrix}$!!

•Mai mult, rezolvarea sistemului cu ajutorul factorizării este:
$AX = B \Leftrightarrow (LU)\,X = B \Leftrightarrow L\,(UX) = B$, adică
$UX = Y$, cu $LY = B$.
Atunci:
$$\begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = 8 \\ 2y_1 + \frac{1}{2}y_2 + y_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ 6x_3 = -12 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Exerciţiul 6. Folosind metoda eliminării (Gauss), să se rezolve următorul sistem şi, dacă există, să se determine inversa matricei sistemului. Să se folosească şi factorizarea LU.
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 14x_3 = 14 \\ 2x_1 + 17x_2 - 5x_3 = -101 \\ 14x_1 - 5x_2 + 83x_3 = 155. \end{cases}$$
Rezolvare.a) Este un sistem de 3 ecuaţii liniare cu trei necunoscute (x_1,x_2 şi x_3), neomogen, cu matricea sistemului
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 14 \\ 2 & 17 & -5 \\ 14 & -5 & 83 \end{pmatrix} \text{ şi matricea termenilor liberi } B = \begin{pmatrix} 14 \\ -101 \\ 155 \end{pmatrix}.$$
Metoda liceu-schiţă
$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 14 \\ 2 & 17 & -5 \\ 14 & -5 & 83 \end{vmatrix} = 1600 \neq 0 \Rightarrow \text{sistem compatibil unic determinat}$$
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 14 & 2 & 14 \\ -101 & 17 & -5 \\ 155 & -5 & 83 \end{vmatrix} = 4800;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 14 & 14 \\ 2 & -101 & -5 \\ 14 & 155 & 83 \end{vmatrix} = -9600;\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 14 \\ 2 & 17 & -101 \\ 14 & -5 & 155 \end{vmatrix} = 1600.$$
$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\det A} = 3;\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\det A} = -6;\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\det A} = 1.$$
Deci $(x, y, z) = (3, -6, 1)$ este unica soluţie.



Metoda liceu pentru A^{-1}. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Dacă $\det A = 12 \neq 0$ atunci $\exists A^{-1} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 14 \\ 2 & 17 & -5 \\ 14 & -5 & 83 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{693}{800} & -\frac{59}{400} & -\frac{31}{200} \\ -\frac{59}{400} & \frac{17}{200} & \frac{3}{100} \\ -\frac{31}{200} & \frac{3}{100} & \frac{1}{25} \end{pmatrix}$$
Sistemul este un sistem Cramer, cu $m = n = 3$ şi matricea sistemului nesingulară.
<u>**Metoda eliminării (Gauss)**</u> **TEMĂ**.
<u>**mod factorizare** LU</u>
$$\bullet A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 14 \\ 2 & 17 & -5 \\ 14 & -5 & 83 \end{pmatrix}$$

$$L_1A=\begin{pmatrix}1&0&0\\ \frac{-2}{4}&1&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&14\\ 2&17&-5\\ 14&-5&83\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2&14\\ 0&16&-12\\ 14&-5&83\end{pmatrix}$$

$$L_2\left(L_1A\right)=\begin{pmatrix}1&0&0\\ 0&1&0\\ \frac{-14}{4}&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&14\\ 0&16&-12\\ 14&-5&83\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2&14\\ 0&16&-12\\ 0&-12&34\end{pmatrix}$$

$$L_3\left(L_2\left(L_1A\right)\right)=\begin{pmatrix}1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&\frac{12}{16}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&14\\ 0&16&-12\\ 0&-12&34\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2&14\\ 0&16&-12\\ 0&0&25\end{pmatrix}=U$$

$$L_3L_2L_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&\frac{12}{16}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\ 0&1&0\\ \frac{-14}{4}&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\ \frac{-2}{4}&1&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\ -\frac{1}{2}&1&0\\ -\frac{31}{8}&\frac{3}{4}&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$L=\left(L_3L_2L_1\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\ -\frac{1}{2}&1&0\\ -\frac{31}{8}&\frac{3}{4}&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\ \frac{1}{2}&1&0\\ \frac{7}{2}&-\frac{3}{4}&1\end{pmatrix}.$$

Atunci $\left(L_3L_2L_1\right)A=U\Rightarrow A=LU$

Într-adevăr, $\begin{pmatrix}1&0&0\\ \frac{1}{2}&1&0\\ \frac{7}{2}&-\frac{3}{4}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&14\\ 0&16&-12\\ 0&0&25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2&14\\ 2&17&-5\\ 14&-5&83\end{pmatrix}$!!

•Mai mult, rezolvarea sistemului cu ajutorul factorizării este:

$AX=B\Leftrightarrow\left(LU\right)X=B\Leftrightarrow L\left(UX\right)=B$, adică

$UX=Y$, cu $LY=B$.

Atunci:

$$\begin{cases}y_1=14\\ \frac{1}{2}y_1+y_2=-101\\ \frac{7}{2}y_1-\frac{3}{4}y_2+y_3=155\end{cases}\Rightarrow Y=\begin{pmatrix}14\\ -108\\ 25\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}4x_1+2x_2+14x_3=14\\ 16x_2-12x_3=-108\\ 25x_3=25\end{cases}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}3\\ -6\\ 1\end{pmatrix}$$