SEMINAR NR. 3, REZOLVĂRI
Algebră liniară şi Geometrie analitică

2. SPAŢII LINIARE (VECTORIALE)
2.1. Spaţii liniare (vectoriale). Definiţii. Exemple

Elementele unui spaţiu vectorial pot fi modelări matematice ale unor entităţi diverse: forţe, viteze, semnale electrice, vectori geometrici, soluţii ale unor ecuaţii diferenţiale ş.a.

https://www.3blue1brown.com/essence-of-linear-algebra-page

Definiţie: Fie $(\mathbb{K},+,\cdot)$ un corp comutativ cu elementul unitate notat $1_{\mathbb{K}}$ şi elementul nul notat $0_{\mathbb{K}}$. Fie $\mathbb{X} \neq \emptyset$ o mulţime oarecare. Se numeşte *spaţiu liniar* (*vectorial*) peste $\mathbb{K}$ (sau $\mathbb{K}$-spaţiu liniar) cvadrupla ordonată $(\mathbb{X},\oplus,\odot,\mathbb{K})$ unde

$\oplus : \mathbb{X}\times\mathbb{X} \to \mathbb{X}, \forall (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{X}^2, (\mathbf{x},\mathbf{y}) \rightsquigarrow \mathbf{x}\oplus\mathbf{y}$

este o operaţie internă pe $\mathbb{X}$ (numită *adunarea vectorilor*) şi

$\odot : \mathbb{K}\times\mathbb{X} \to \mathbb{X}, \forall (\alpha,\mathbf{x}) \in \mathbb{K}\times\mathbb{X}, (\alpha,\mathbf{x}) \rightsquigarrow \alpha\odot\mathbf{x}$

este o operaţie externă pe $\mathbb{X}$ indusă de $\mathbb{K}$ (numită *înmulţirea vectorilor cu scalari*), ce verifică axiomele:

a) $(\mathbb{X},\oplus)$ este grup abelian , adică
(GA_1) $\forall (\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) \in \mathbb{X}^3 : (\mathbf{x}\oplus\mathbf{y})\oplus\mathbf{z} = \mathbf{x}\oplus(\mathbf{y}\oplus\mathbf{z})$;
(GA_2) $\exists\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{X}} \in \mathbb{X}$ (numit *vectorul nul*) astfel încât $\forall\mathbf{x}\in\mathbb{X} : \mathbf{x}\oplus\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{X}} = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{X}}\oplus\mathbf{x} = \mathbf{x}$;
(GA_3) $\forall\mathbf{x}\in\mathbb{X}, \exists(-\mathbf{x})\in\mathbb{X}$ (numit *opusul vectorului* $\mathbf{x}$) astfel încât $\mathbf{x}\oplus(-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x})\oplus\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{X}}$;
(GA_4) $\forall (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{X}^2 : \mathbf{x}\oplus\mathbf{y} = \mathbf{y}\oplus\mathbf{x}$.
b) (SL_1) $\forall (\alpha,\beta,\mathbf{x}) \in \mathbb{K}^2\times\mathbb{X} : \alpha\odot(\beta\odot\mathbf{x}) = (\alpha\cdot\beta)\odot\mathbf{x}$;
(SL_2) $\forall (\alpha,\beta,\mathbf{x}) \in \mathbb{K}^2\times\mathbb{X} : (\alpha+\beta)\odot\mathbf{x} = (\alpha\odot\mathbf{x})\oplus(\beta\odot\mathbf{x})$;
(SL_3) $\forall (\alpha,\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{K}\times\mathbb{X}^2 : \alpha\odot(\mathbf{x}\oplus\mathbf{y}) = (\alpha\odot\mathbf{x})\oplus(\alpha\odot\mathbf{y})$;
(SL_4) $\forall\mathbf{x}\in\mathbb{X} : 1_{\mathbb{K}}\odot\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Elementele din $\mathbb{K}$ se numesc *scalari*, iar cele din $\mathbb{X}$ se numesc *vectori.*

Corolar. Fie $(\mathbb{X},+,\cdot,\mathbb{K})$ un spaţiu liniar. Atunci
a) $\forall\mathbf{x}\in\mathbb{X} : 0_{\mathbb{K}}\odot\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{X}}$;
b) $\forall\alpha\in\mathbb{K} : \alpha\odot\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{X}} = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{X}}$;
c) $\forall\mathbf{x}\in\mathbb{X} : (-1)\odot\mathbf{x} = -\mathbf{x}$;
d) $\forall\alpha\in\mathbb{K}, \mathbf{x}\in\mathbb{X} : \alpha\odot\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{X}} \Rightarrow \alpha = 0_{\mathbb{K}}$ sau $\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{X}}$;
e) $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}, \mathbf{x}\in\mathbb{X}\setminus\{\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{X}}\} : \alpha\odot\mathbf{x} = \beta\odot\mathbf{x} \Rightarrow \alpha = \beta$;
f) $\forall\alpha\in\mathbb{K}\setminus\{0_{\mathbb{K}}\}, (\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbb{X}^2 : \alpha\odot\mathbf{x} = \alpha\odot\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Exerciţiul 1. Fie $(\mathbb{R},+,\cdot)$ corpul comutativ al numerelor reale şi $\mathbb{R}_+^* = \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}; \mathbf{x} > 0\}$. Se definesc operaţiile:

$\oplus : \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*, \forall (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 : \mathbf{x}\oplus\mathbf{y} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$

$\odot : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*, \forall (\alpha,\mathbf{x}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* : \alpha\odot\mathbf{x} = \mathbf{x}^\alpha$.

Să se arate că $\mathbb{R}_+^*$ are o structură de $\mathbb{R}$-spatiu liniar în raport cu operaţiile definite anterior.

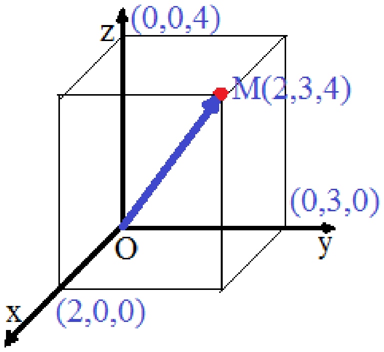
Rezolvare. $\mathbb{X} = \mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Se observă că $\oplus$, $\odot$ sunt operaţii corect definite. În plus, se verifică axiomele $(GA_1) - (SL_4)$.

a) $\left(\mathbb{R}_+^*,\oplus\right)$ este grup abelian , adică
(GA_1) $\forall (\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3 : (\mathbf{x}\oplus\mathbf{y})\oplus\mathbf{z} = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})\cdot\mathbf{z} = \mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}\cdot\mathbf{z}) = \mathbf{x}\oplus(\mathbf{y}\oplus\mathbf{z})$;
(GA_2) $\exists\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}_+^*} = \mathbf{1}\in\mathbb{R}_+^*$ (este *vectorul nul* pentru $\left(\mathbb{R}_+^*,\oplus\right)$) astfel încât $\forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}_+^* : \mathbf{x}\cdot\mathbf{1} = \mathbf{1}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{x}$;
(GA_3) $\forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}_+^*, \exists -\mathbf{x} = \mathbf{x}^{-1}\in\mathbb{R}_+^*$ (este *opusul vectorului* $\mathbf{x}$ relativ la $\left(\mathbb{R}_+^*,\oplus\right)$) astfel încât
$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}^{-1} = \mathbf{x}^{-1}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{1}$;
(GA_4) $\forall (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 : \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{y}\cdot\mathbf{x}$.
b) (SL_1) $\forall (\alpha,\beta,\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_+^* : \alpha\odot(\beta\odot\mathbf{x}) = \boxed{\left(\mathbf{x}^\beta\right)^\alpha = \mathbf{x}^{\alpha\cdot\beta}} = (\alpha\cdot\beta)\odot\mathbf{x}$;
(SL_2) $\forall (\alpha,\beta,\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_+^* : (\alpha+\beta)\odot\mathbf{x} = \boxed{\mathbf{x}^{\alpha+\beta} = \mathbf{x}^\alpha\cdot\mathbf{x}^\beta} = (\alpha\odot\mathbf{x})\oplus(\beta\odot\mathbf{x})$;
(SL_3) $\forall (\alpha,\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}\times\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 : \alpha\odot(\mathbf{x}\oplus\mathbf{y}) = \boxed{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^\alpha = \mathbf{x}^\alpha\cdot\mathbf{y}^\alpha} = (\alpha\odot\mathbf{x})\oplus(\alpha\odot\mathbf{y})$;
(SL_4) $\forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}_+^* : 1_{\mathbb{R}}\odot\mathbf{x} = \boxed{\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}}$.

În continuare, se va renota: $\oplus = +$ şi $\odot = \cdot$.

Exemplu de spaţiu liniar: Fie $(\mathbb{K},+,\cdot)$ un corp comutativ şi $(\mathbb{X},+,\cdot,\mathbb{K})$ un $\mathbb{K}$-spaţiu liniar.
$(\{\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{X}}\},+,\cdot,\mathbb{K})$ este $\mathbb{K}$-spaţiu liniar (vectorial), numit *spaţiu vectorial nul.*

Exemple de spaţii liniare standard: Fie $(\mathbb{K},+,\cdot)$ un corp comutativ.
1. $(\mathbb{K}^n,+,\cdot,\mathbb{K})$ este $\mathbb{K}$-spaţiu liniar (vectorial) standard, unde
$\mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K}\times\mathbb{K}\times ...\times\mathbb{K}}_{n \text{ ori}} = \left\{\mathbf{x};\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n), x_i\in\mathbb{K}, \forall i=\overline{1,n}\right\}$ −mulţime de n−uple.
S-a definit *egalitatea a două* n-uple prin
$\mathbf{x}=\mathbf{y} \Leftrightarrow (x_1,x_2,...,x_n)=(y_1,y_2,...,y_n) \Leftrightarrow [x_1=y_1,...,x_n=y_n]$.
Pe mulţimea $\mathbb{K}^n$ s-au definit operaţiile:
(*adunarea* n-uplelor)
$+:\mathbb{K}^n\times\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n, \forall(\mathbf{x},\mathbf{y})\in(\mathbb{K}^n)^2, (x_1,...,x_n)+(y_1,...,y_n)=(x_1+y_1,...,x_n+y_n)$.
(*înmulţirea* n-uplelor din $\mathbb{K}^n$ cu scalari din câmpul $\mathbb{K}$)
$\cdot:\mathbb{K}\times\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n, \forall(\alpha,\mathbf{x})\in\mathbb{K}\times\mathbb{K}^n, \alpha\cdot(x_1,...,x_n)=(\alpha x_1,...,\alpha x_n)$.
Demonstraţie pentru $n=3$ şi $\mathbb{K}=\mathbb{R}$:
Peste tot la disciplina Geometrie analitică se vor utiliza notaţiile (x,y,z) în locul notaţiilor (x_1,x_2,x_3) de la algebra liniară.



Aici se demonstrează că $(\mathbb{R}^3,+,\cdot,\mathbb{R})$ este $\mathbb{R}$-spaţiu liniar (vectorial) standard.
$\mathbb{K}=\mathbb{R}$-mulţimea scalarilor (numere reale)
$\mathbb{X}=\mathbb{R}^3=\left\{\mathbf{x};\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3), x_i\in\mathbb{R}, \forall i=\overline{1,3}\right\}$-mulţimea vectorilor (triplete)
(*adunarea tripletelor*)
$+:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, \forall(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\left(\mathbb{R}^3\right)^2, (x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)$.
(*înmulţirea tripletelor* din $\mathbb{R}^3$ cu scalari din câmpul $\mathbb{R}$)
$\cdot:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, \forall(\alpha,\mathbf{x})\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3, \alpha\cdot(x_1,x_2,x_3)=(\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3)$.
Se observă că $\oplus \overset{\text{renotat}}{=} +$, $\odot \overset{\text{renotat}}{=} \cdot$ sunt operaţii corect definite. În plus, se verifică axiomele (GA_1) − (SL_4).
a) $(\mathbb{R}^3,+)$ este grup abelian , adică
(GA_1) $\forall(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})\in\left(\mathbb{R}^3\right)^3 : (\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$;
Într-adevăr, $\forall(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})\in\left(\mathbb{R}^3\right)^3$:

$$M_1=(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=((x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3))+(z_1,z_2,z_3) \overset{+ \text{ în } \mathbb{R}^3}{=}$$
$$=\left(\underbrace{x_1+y_1}_{\text{un } x_1 \text{ în def. } +}, x_2+y_2, x_3+y_3\right)+\left(\underbrace{z_1}_{\text{un } y_1 \text{ în def. } +}, z_2, z_3\right) \overset{+ \text{ în } \mathbb{R}^3}{=}$$
$$=\left(\underbrace{(x_1+y_1)+z_1}_{\text{prima comp a } M_1}, (x_2+y_2)+z_2, (x_3+y_3)_{\text{par. de adunare}}+z_3\right)_{\text{par. de triplet}}.$$

$$M_2 = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (x_1, x_2, x_3) + ((y_1, y_2, y_3) + (z_1, z_2, z_3)) \overset{+\text{ în }\mathbb{R}^3}{=}$$
$$= \left(\underbrace{x_1}_{\text{un } x_1 \text{ în def. } +}, x_2, x_3 \right) + \left(\underbrace{y_1 + z_1}_{\text{un } y_1 \text{ în def. } +}, y_2 + z_2, y_3 + z_3 \right) \overset{+\text{ în }\mathbb{R}^3}{=}$$
$$= \left(\underbrace{x_1 + (y_1 + z_1)}_{\text{prima comp a } M_2}, x_2 + (y_2 + z_2), x_3 + (y_3 + z_3) \right).$$

Se observă că se verifică $M_1 = M_2$ deoarece au componente egale, din asociativitatea adunării numerelor reale.

(GA_2) $\exists \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ (numit *vectorul nul*) astfel încât $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} + \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}^3} = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}^3} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$;

Într-adevăr, $\exists \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ a.î. $\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$:
$(x_1, x_2, x_3) + (0,0,0) = (0,0,0) + (x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \Leftrightarrow$
$(x_1 + 0, x_2 + 0, x_3 + 0) = (0 + x_1, 0 + x_2, 0 + x_3) = (x_1, x_2, x_3)$
se verifică din axioma de existenţă a elementului neutru în $(\mathbb{R}, +)$.

(GA_3) $\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \exists -\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, -x_3) \in \mathbb{R}^3$ (numit *opusul vectorului* $\mathbf{x}$) astfel încât $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}^3}$;

Într-adevăr, $\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \exists -\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, -x_3) \in \mathbb{R}^3$ a.î.
$(x_1, x_2, x_3) + (-x_1, -x_2, -x_3) = (-x_1, -x_2, -x_3) + (x_1, x_2, x_3) = (0,0,0) \Leftrightarrow$
$(x_1 + (-x_1), x_2 + (-x_2), x_3 + (-x_3)) = (-x_1 + x_1, -x_2 + x_2, -x_3 + x_3) = (0,0,0)$,
se verifică din axioma de existenţă a opusului în $(\mathbb{R}, +)$.

(GA_4) $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\mathbb{R}^3)^2 : \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$.

Într-adevăr, $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\mathbb{R}^3)^2$,
$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2, y_3) + (x_1, x_2, x_3) \Leftrightarrow$
$(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2, y_3 + x_3)$,
se verifică din comutativitatea în $(\mathbb{R}, +)$.

b) (SL_1) $\forall (\alpha, \beta, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 : \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{x}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{x}$;

Într-adevăr, $\forall (\alpha, \beta, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$:

$$M_1 = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{x}) = \alpha \cdot (\beta \cdot (x_1, x_2, x_3)) \overset{\text{def. înm. cu scalari}}{=} \alpha \cdot (\beta x_1, \beta x_2, \beta x_3) \overset{\text{def. înm. cu scalari}}{=}$$
$$= \Big(\alpha(\beta x_1), \alpha(\beta x_2), \alpha(\beta x_3)_{\text{par de înmulţire}}\Big)_{\text{par. de triplet}}.$$
$$M_2 = (\alpha \cdot_{\text{între scalari}} \beta) \cdot_{\text{între scalar şi vector}} \mathbf{x} = (\alpha\beta) \cdot (x_1, x_2, x_3) \overset{\text{def. înm. cu scalari}}{=}$$
$$= ((\alpha\beta) x_1, (\alpha\beta) x_2, (\alpha\beta) x_3).$$

Se observă că $M_1 = M_2$ deoarece au componente egale, din asociativitatea înmulţirii numerelor reale.

(SL_2) $\forall (\alpha, \beta, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 : (\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = (\alpha \cdot \mathbf{x}) + (\beta \cdot \mathbf{x})$;

Într-adevăr, $\forall (\alpha, \beta, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$:

$$M_1 = (\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = (\alpha +_{\text{între scalari}} \beta) \cdot_{\text{între scalar şi vector}} \mathbf{x} = (\alpha + \beta) \cdot (x_1, x_2, x_3) =$$
$$= ((\alpha + \beta) x_1, (\alpha + \beta) x_2, (\alpha + \beta) x_3).$$
$$M_2 = (\alpha \cdot \mathbf{x}) + (\beta \cdot \mathbf{x}) = \alpha \cdot (x_1, x_2, x_3) + \beta \cdot (x_1, x_2, x_3) =$$
$$= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) + (\beta x_1, \beta x_2, \beta x_3) \overset{\text{def. adunării vect}}{=} (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2, \alpha x_3 + \beta x_3)$$

Se observă că $M_1 = M_2$ deoarece au componente egale, din distributivitatea înmulţirii faţă de adunare numerelor reale.

(SL_3) $\forall (\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3)^2 : \alpha \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\alpha \cdot \mathbf{x}) + (\alpha \cdot \mathbf{y})$;

Analog cu (SL_2)

(SL_4) $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 1_{\mathbb{R}} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Într-adevăr, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$
$1_{\mathbb{R}} \cdot \mathbf{x} = 1_{\mathbb{R}} \cdot (x_1, x_2, x_3) = (1x_1, 1x_2, 1x_3) = (x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}$.

2. $\underline{(\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}), +_{\text{adunarea matricelor}}, \cdot_{\text{înm. matr. cu scalari}}, \mathbb{K})\text{ este }\mathbb{K}\text{-spaţiu liniar (vectorial) standard}}$, unde

$$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})=\left\{\mathbf{A};\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n}\\ ... & ... & ...\\ a_{m1} & ... & a_{mn}\end{pmatrix}, a_{ij}\in\mathbb{K},\forall i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}\right\}.$$

S-a definit egalitatea a două matrice **A** şi **B** prin

$\mathbf{A}=\mathbf{B}\Leftrightarrow\left[a_{ij}=b_{ij},\forall i=\overline{1,m},j=\overline{1,n}\right].$

Pe mulţimea $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ s-au definit operaţiile:

(adunarea matricelor)

$+:\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})\rightarrow\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),\forall(\mathbf{A},\mathbf{B})\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n}\\ ... & ... & ...\\ a_{m1} & ... & a_{mn}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & ... & b_{1n}\\ ... & ... & ...\\ b_{m1} & ... & b_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & ... & a_{1n}+b_{1n}\\ ... & ... & ...\\ a_{m1}+b_{m1} & ... & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}.$$

(înmulţirea matricelor din $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ cu scalari din câmpul $\mathbb{K}$)

$\cdot:\mathbb{K}\times\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})\rightarrow\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),\forall(\alpha,\mathbf{A})\in\mathbb{K}\times\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),$

$$\alpha\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n}\\ ... & ... & ...\\ a_{m1} & ... & a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & ... & \alpha a_{1n}\\ ... & ... & ...\\ \alpha a_{m1} & ... & \alpha a_{mn}\end{pmatrix}.$$

3. $(\mathcal{F}(M,\mathbb{X}),+,\cdot,\mathbb{K})$ este $\mathbb{K}$-spaţiu liniar (vectorial) standard, dacă $(\mathbb{X},+,\cdot,\mathbb{K})$ este un $\mathbb{K}$-spaţiu liniar, unde $\mathcal{F}(M,\mathbb{X})=\{\mathbf{f};\mathbf{f}:M\rightarrow\mathbb{X}\}.$

S-a definit egalitatea a două funcţii **f** şi **g** prin

$\mathbf{f}=\mathbf{g}\Leftrightarrow[\mathbf{f}(x)=\mathbf{g}(x),\forall x\in M].$

Pe mulţimea $\mathcal{F}(M,\mathbb{X})$ s-au definit operaţiile :

(adunarea funcţiilor)

$+:\mathcal{F}(M,\mathbb{X})\times\mathcal{F}(M,\mathbb{X})\rightarrow\mathcal{F}(M,\mathbb{X}),\forall(\mathbf{f},\mathbf{g})\in\mathcal{F}(M,\mathbb{X})\times\mathcal{F}(M,\mathbb{X}),$

$\mathbf{f}+\mathbf{g}:M\rightarrow\mathbb{X}$ e dată de $(\mathbf{f}+\mathbf{g})(x)=\mathbf{f}(x)+\mathbf{g}(x),\forall x\in M$ şi

(înmulţirea funcţiilor din $\mathcal{F}(M,\mathbb{X})$ cu scalari din câmpul $\mathbb{K}$)

$\cdot:\mathbb{K}\times\mathcal{F}(M,\mathbb{X})\rightarrow\mathcal{F}(M,\mathbb{X}),\forall(\alpha,\mathbf{f})\in\mathbb{K}\times\mathcal{F}(M,\mathbb{X}),$

$\alpha\cdot\mathbf{f}:M\rightarrow\mathbb{X}$ e dată de $(\alpha\cdot\mathbf{f})(x)=\alpha\mathbf{f}(x),\forall x\in M.$

4. **a)** $(\mathbb{K}_n[t],+,\cdot,\mathbb{K})$ este $\mathbb{K}$-spaţiu liniar (vectorial) standard, unde

$\mathbb{K}_n[t]=\left\{\mathbf{p};\mathbf{p}=a_0+a_1t+...+a_nt^n,a_i\in\mathbb{K},\forall i=\overline{0,n}\right\}.$

$t-$nedeterminata polinomului.

S-a definit egalitatea a două polinoame **p** şi **q** prin

$\mathbf{p}=\mathbf{q}\Leftrightarrow[a_0=b_0,...,a_n=b_n].$

Pe mulţimea $\mathbb{K}_n[t]$ s-au definit operaţiile:

(adunarea polinoamelor)

$+:\mathbb{K}_n[t]\times\mathbb{K}_n[t]\rightarrow\mathbb{K}_n[t],\forall(\mathbf{p},\mathbf{q})\in\mathbb{K}_n[t]\times\mathbb{K}_n[t],$

$\mathbf{p}+\mathbf{q}=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)t+...+(a_n+b_n)t^n$ şi

(înmulţirea polinoamelor din $\mathbb{K}_n[t]$ cu scalari din câmpul $\mathbb{K}$)

$\cdot:\mathbb{K}\times\mathbb{K}_n[t]\rightarrow\mathbb{K}_n[t],\forall(\alpha,\mathbf{p})\in\mathbb{K}\times\mathbb{K}_n[t],$

$\alpha\cdot\mathbf{p}=(\alpha a_0)+(\alpha a_1)t+...+(\alpha a_n)t^n.$

b) Analog $\left(\mathbb{K}_n^{\mathbb{I}}[t],+,\cdot,\mathbb{K}\right)$ este $\mathbb{K}$-spaţiu liniar (vectorial) standard, unde

$\mathbb{K}_n^{\mathbb{I}}[t]=\left\{\mathbf{f}:\mathbb{I}\rightarrow\mathbb{R};\mathbf{f}(t)=a_0+a_1t+...+a_nt^n,a_i\in\mathbb{K},\forall i=\overline{0,n}\right\}.$

$t-$variabila funcţiei polinomiale.

Exerciţiul 2. Să se precizeze care dintre următoarele perechi de operaţii definesc pe $\mathbb{R}^2$ o structură de spaţiu liniar real:

a) $+:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2,\forall(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\left(\mathbb{R}^2\right)^2:(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+x_2,0_{\mathbb{R}})$

$\cdot:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2,\forall(\alpha,\mathbf{x})\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2:\alpha\cdot(x_1,x_2)=(\alpha x_1,\alpha x_2).$

b) $+:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2,\forall(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\left(\mathbb{R}^2\right)^2:(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,y_1)$

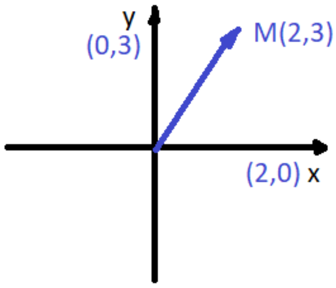
$\cdot:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2,\forall(\alpha,\mathbf{x})\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2:\alpha\cdot(x_1,x_2)=(\alpha x_1,\alpha x_2);$

c) $+:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2,\forall(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\left(\mathbb{R}^2\right)^2:(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)$

$\cdot:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2,\forall(\alpha,\mathbf{x})\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2:\alpha\cdot(x_1,x_2)=(0,\alpha x_2).$

Observaţie. pentru $n=2$ şi $\mathbb{K}=\mathbb{R}$:

Peste tot la disciplina Geometrie analitică se vor utiliza notaţiile (x, y) în locul notaţiilor (x_1, x_2) de la algebra liniară.



Aici $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R})$ este $\mathbb{R}$-spaţiu liniar (vectorial) standard, cu

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$-mulţimea scalarilor (numere reale)

$\mathbb{X} = \mathbb{R}^2 = \{\mathbf{x}; \mathbf{x} = (x_1, x_2), x_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1,2}\}$-mulţimea vectorilor (perechi)

(*adunarea perechilor*)

$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\mathbb{R}^2)^2, (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$.

(*înmulţirea perechilor* din $\mathbb{R}^2$ cu scalari din câmpul $\mathbb{R}$)

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \forall (\alpha, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \alpha \cdot (x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$.

Se observă că $\oplus \overset{\text{renotat}}{=} +$, $\odot \overset{\text{renotat}}{=} \cdot$ sunt operaţii corect definite. În plus, se verifică axiomele $(GA_1) - (SL_4)$.

Rezolvare. a) Se verifică axiomele $(GA_1) - (SL_4)$ şi se observă că $+$ nu e operaţie comutativă, adică $\exists (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{X}^2$ astfel încât

$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + x_2, 0_{\mathbb{R}}) \neq (y_1 + y_2, 0_{\mathbb{R}}) = (y_1, y_2) + (x_1, x_2)$.

De exemplu, pentru $\mathbf{x} = (2, 7)$ şi $\mathbf{y} = (5, 11)$.

$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (2 + 7, 0_{\mathbb{R}}) \neq (5 + 11, 0_{\mathbb{R}}) = \mathbf{y} + \mathbf{x}$.

2.2. Subspaţii liniare (vectoriale). Definiţii, exemple, operaţii

Definiţie: Fie $(\mathbb{X}, +, \cdot\mathbb{K})$ un $\mathbb{K}$-spaţiu liniar. Se numeşte *subspaţiu liniar al lui* $\mathbb{X}$ o submulţime $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{X}$ ce satisface axiomele:

(i) $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{V}^2 : \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{V}$;

(ii) $\forall (\alpha, \mathbf{x}) \in \mathbb{K} \times \mathbb{V} : \alpha \cdot \mathbf{x} \in \mathbb{V}$.

Observaţie. Fie $(\mathbb{X}, +, \cdot, \mathbb{K})$ un $\mathbb{K}$-spaţiu liniar. Mulţimile $\{\theta_{\mathbb{X}}\}$ şi $\mathbb{X}$ sunt subspaţii liniare ale lui $\mathbb{X}$, numite *subspaţii improprii*. Orice alt subspaţiu liniar al lui $\mathbb{X}$ se numeşte *subspaţiu propriu.*

Teoremă. Fie $(\mathbb{X}, +, \cdot, \mathbb{K})$ un $\mathbb{K}$-spaţiu liniar. O submulţime $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{X}, \mathbb{V} \neq \emptyset$ este subspaţiu liniar în $(\mathbb{X}, +, \cdot, \mathbb{K})$ dacă şi numai dacă

$\forall (\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{K} \times \mathbb{V}^2 : (\alpha \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{y} \in \mathbb{V}$.

(chiar $\forall (\alpha, \beta, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{K}^2 \times \mathbb{V}^2 : (\alpha \cdot \mathbf{x}) + (\beta \cdot \mathbf{y}) \in \mathbb{V}$; adică orice combinaţie liniară de vectori din $\mathbb{V}$ este un vector din $\mathbb{V}$)

Teoremă. Fie $(\mathbb{X}, +, \cdot, \mathbb{K})$ un $\mathbb{K}$-spaţiu liniar. O submulţime $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{X}, \mathbb{V} \neq \emptyset$ este subspaţiu liniar în $(\mathbb{X}, +, \cdot, \mathbb{K})$ dacă şi numai dacă $(\mathbb{V}, +, \cdot, \mathbb{K})$ este un $\mathbb{K}$-spaţiu liniar.

Observaţie. Dreptele şi planele din spaţiu (ca submulţimi de puncte-triplete din $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$) care trec prin origine (conţin $(0, 0, 0)$) sunt subspaţii liniare în $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$.

Observaţie. Fie $(\mathbb{X}, +, \cdot, \mathbb{K})$ un $\mathbb{K}$-spaţiu liniar şi $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$ două subspaţii liniare. Se definesc mulţimile:

$\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{X}; \mathbf{x} \in \mathbb{V}_1$ şi $\mathbf{x} \in \mathbb{V}_2\}$- *intersecţia* a două subspaţii liniare este subspaţiu liniar;

$\mathbb{V}_1 \cup \mathbb{V}_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{X}; \mathbf{x} \in \mathbb{V}_1$ sau $\mathbf{x} \in \mathbb{V}_2\}$- *reuniunea* a două supspaţii liniare nu este, în general, spaţiu liniar;

$\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{X}; \exists \mathbf{v}_1 \in \mathbb{V}_1$ şi $\exists \mathbf{v}_2 \in \mathbb{V}_2$ a.î. $\mathbf{x} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\}$- *suma* a două subspaţii liniare este subspaţiu liniar;

$\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$ se defineşte ca mulţimea $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$ cu proprietatea $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 = \{\theta_{\mathbb{X}}\}$- suma directă a două subspaţii liniare este un subspaţiu liniar; descompunerea $\mathbf{x} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ este unică.

Exerciţiul 3. Să se precizeze care dintre următoarele submulţimi ale $\mathbb{R}^n$ sunt subspaţii liniare ale $(\mathbb{R}^n,+,\cdot,\mathbb{R})$ standard:
a) $\mathbb{V}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n;\mathbf{x}=(x_1,...,x_n),x_1=0_{\mathbb{R}}\}$;
b) $\mathbb{V}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n;\mathbf{x}=(x_1,...,x_n),x_1=1_{\mathbb{R}}\}$;
c) $\mathbb{V}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n;\mathbf{x}=(x_1,...,x_n),x_1=x_2\}$;
d) $\mathbb{V}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n;\mathbf{x}=(x_1,...,x_n),x_1x_2=0_{\mathbb{R}}\}$;
e) $\mathbb{V}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n;\mathbf{x}=(x_1,...,x_n),x_1+...x_n=0_{\mathbb{R}}\}$;
f) $\mathbb{V}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n;\mathbf{x}=(x_1,...,x_n),x_1=0_{\mathbb{R}},x_2=0_{\mathbb{R}}\}$;
g) $\mathbb{V}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n;\mathbf{x}=(x_1,...,x_n),x_1\geq x_2\}$.
Rezolvare. a) $\mathbb{V}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n;\mathbf{x}=(x_1,...,x_n),x_1=0_{\mathbb{R}}\}$
$\mathbb{K}=\mathbb{R}$-mulţimea scalarilor; $\mathbb{X}=\mathbb{R}^n-$mulţimea vectorilor ($n-$uple);
$+,\cdot$ sunt cele de la exemple de spaţii standard.
$\mathbb{V}\subseteq\mathbb{X}$ ca submulţime.
Se verifică axiomele:
(i) $\forall(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbb{V}^2:\mathbf{x}+\mathbf{y}\in\mathbb{V}$.
Fie $\forall(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbb{V}^2\Rightarrow[\mathbf{x}=(x_1,...,x_n),x_1=0_{\mathbb{R}}$ şi $\mathbf{y}=(y_1,...,y_n),y_1=0_{\mathbb{R}}]\overset{\text{def. }+\ n-\text{uplelor}}{\Rightarrow}$
$[\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x_1+y_1,...,x_n+y_n),x_1+y_1=0_{\mathbb{R}}+0_{\mathbb{R}}=0_{\mathbb{R}}]\Rightarrow\mathbf{x}+\mathbf{y}\in\mathbb{V}$.
(ii) $\forall(\alpha,\mathbf{x})\in\mathbb{R}\times\mathbb{V}:\alpha\cdot\mathbf{x}\in\mathbb{V}$.
Fie $\forall(\alpha,\mathbf{x})\in\mathbb{R}\times\mathbb{V}\Rightarrow[\alpha\in\mathbb{R}$ şi $\mathbf{x}=(x_1,...,x_n),x_1=0_{\mathbb{R}}]\overset{\text{def. }\cdot\text{ cu scalari a }n-\text{uplelor}}{\Rightarrow}$
$[\alpha\mathbf{x}=(\alpha x_1,...,\alpha x_n),\alpha x_1=\alpha 0_{\mathbb{R}}=0_{\mathbb{R}}]\Rightarrow\alpha\mathbf{x}\in\mathbb{V}$.
$\mathbb{V}$ e subspaţiu liniar al $(\mathbb{R}^n,+,\cdot,\mathbb{R})$.
b) Nu se verifică (i) $(x_1+y_1=1_{\mathbb{R}}+1_{\mathbb{R}}=2_{\mathbb{R}}\neq 1_{\mathbb{R}})\Rightarrow\mathbb{V}$ nu e subspaţiu liniar al $(\mathbb{R}^n,+,\cdot,\mathbb{R})$.

Exerciţiul 4. Fie $a_{ij}\in\mathbb{R},i=\overline{1,m},j=\overline{1,n}$. Fie sistemul liniar omogen
$(*)\ \sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=0,i=\overline{1,m}.$
Să se arate că mulţimea soluţiilor acestui sistem formeaza un subspaţiu liniar real al spaţiului $(\mathbb{R}^n,+,\cdot,\mathbb{R})$ standard.
Rezolvare.

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases} i=1:\sum\limits_{j=1}^{n}a_{1j}x_j=0\\ i=2:\sum\limits_{j=1}^{n}a_{2j}x_j=0\\ ...\\ i=m:\sum\limits_{j=1}^{n}a_{mj}x_j=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=0\\ ...\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=0\end{cases}$$

Se notează
$\mathbb{V}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n;\mathbf{x}=(x_1,...,x_n),x_1,...,x_n$ verifică $(*)$ (m relaţii-ecuaţii între necunoscute)$\}$.
$\mathbb{K}=\mathbb{R}$-mulţimea scalarilor; $\mathbb{X}=\mathbb{R}^n-$mulţimea vectorilor ($n-$uple);
$+,\cdot$ sunt cele de la exemple de spaţii standard.
$\mathbb{V}\subseteq\mathbb{X}$ ca submulţime.
Se verifică axiomele:
(i) $\forall(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbb{V}^2:\mathbf{x}+\mathbf{y}\in\mathbb{V}$.
Fie $\forall(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbb{V}^2\Rightarrow$

$$\left[\mathbf{x}=(x_1,...,x_n),\begin{cases}a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n=0\\ ...\\ a_{m1}x_1+...+a_{mn}x_n=0.\end{cases}\text{ şi }\mathbf{y}=(y_1,...,y_n),\begin{cases}a_{11}y_1+...+a_{1n}y_n=0\\ ...\\ a_{m1}y_1+...+a_{mn}y_n=0.\end{cases}\right]$$

$$\underset{\text{se folosesc proprietăţi ale adunării şi înmulţirii numerelor reale}}{\overset{\text{se adună ecuaţie cu ecuaţie cele două sisteme,}}{\Rightarrow}}$$

$$\left[\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x_1+y_1,...,x_n+y_n),\begin{cases} a_{11}(x_1+y_1)+...+a_{1n}(x_n+y_n)=0\\ ...\\ a_{m1}(x_1+y_1)+...+a_{mn}(x_n+y_n)=0.\end{cases}\right]$$

$\Rightarrow \mathbf{x}+\mathbf{y}\in\mathbb{V}$.

(ii) $\forall(\alpha,\mathbf{x})\in\mathbb{R}\times\mathbb{V}:\alpha\cdot\mathbf{x}\in\mathbb{V}$.

Fie $\forall(\alpha,\mathbf{x})\in\mathbb{R}\times\mathbb{V}\Rightarrow$

$$\left[\alpha\in\mathbb{R}\text{ şi }\mathbf{x}=(x_1,...,x_n),\begin{cases} a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n=0\\ ...\\ a_{m1}x_1+...+a_{mn}x_n=0.\end{cases}\right]$$

$$\underset{\text{se folosesc proprietăţi ale adunării şi înmulţirii numerelor reale}}{\overset{\text{se adună înmulţeşte fiecare ecuaţie cu scalarul nenul, se verifică şi pentru cel nul,}}{\Rightarrow}}$$

$$\left[\alpha\mathbf{x}=(\alpha x_1,...,\alpha x_n),\begin{cases} a_{11}(\alpha x_1)+...+a_{1n}(\alpha x_n)=0\\ ...\\ a_{m1}(\alpha x_1)+...+a_{mn}(\alpha x_n)=0.\end{cases}\right]$$

$\Rightarrow \alpha\mathbf{x}\in\mathbb{V}$.

Observaţie. La examen, se poate păstra acelaşi enunţ pentru sisteme particulare, ca de exemplu:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=0\\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4=0\\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=0\end{cases}$$

(un sistem omogen cu $m=3$ ecuaţii liniare şi $n=4$ necunoscute), iar rezolvarea exerciţiului poate fi ca anterior, fără a explicita soluţiile sistemului.

Se notează $\mathbb{V}=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4;\mathbf{x}=(x_1,...,x_4)\text{ verifică }(*)\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=0\\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4=0\\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=0\end{cases}\right\}$.

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$-mulţimea scalarilor; $\mathbb{X}=\mathbb{R}^4-$mulţimea vectorilor ($n-$uple);

$+,\cdot$ sunt cele de la exemple de spaţii standard.

$\mathbb{V}\subseteq\mathbb{X}$ ca submulţime.

Se verifică axiomele:

(i) $\forall(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbb{V}^2:\mathbf{x}+\mathbf{y}\in\mathbb{V}$.

Fie $\forall(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbb{V}^2\Rightarrow$

$$\left[\mathbf{x}=(x_1,...,x_4),\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=0\\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4=0\\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=0\end{cases}\text{ şi }\mathbf{y}=(y_1,...,y_4),\begin{cases} y_1+2y_2+3y_3-y_4=0\\ 3y_1+2y_2+y_3-y_4=0\\ 2y_1+3y_2+y_3+y_4=0\end{cases}\right]$$

$$\underset{\text{se folosesc proprietăţi ale adunării şi înmulţirii numerelor reale}}{\overset{\text{se adună ecuaţie cu ecuaţie cele două sisteme,}}{\Rightarrow}}$$

$$\left[\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x_1+y_1,...,x_4+y_4),\begin{cases} (x_1+y_1)+2(x_2+y_2)+3(x_3+y_3)-(x_4+y_4)=0\\ 3(x_1+y_1)+2(x_2+y_2)+(x_3+y_3)-(x_4+y_4)=0\\ 2(x_1+y_1)+3(x_2+y_2)+(x_3+y_3)+(x_4+y_4)=0\end{cases}\right]$$

$\Rightarrow \mathbf{x}+\mathbf{y}\in\mathbb{V}$.

(ii) $\forall(\alpha,\mathbf{x})\in\mathbb{R}\times\mathbb{V}:\alpha\cdot\mathbf{x}\in\mathbb{V}$.

Fie $\forall(\alpha,\mathbf{x})\in\mathbb{R}\times\mathbb{V}\Rightarrow$

$$\left[\alpha\in\mathbb{R}\text{ şi }\mathbf{x}=(x_1,...,x_4),\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=0\\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4=0\\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=0\end{cases}\right]$$

$$\underset{\text{se folosesc proprietăţi ale adunării şi înmulţirii numerelor reale}}{\overset{\text{se adună înmulţeşte fiecare ecuaţie cu scalarul nenul, se verifică şi pentru cel nul,}}{\Rightarrow}}$$

$$\left[\alpha\mathbf{x}=(\alpha x_1,...,\alpha x_4),\begin{cases} (\alpha x_1)+2(\alpha x_2)+3(\alpha x_3)-(\alpha x_4)=0\\ 3(\alpha x_1)+2(\alpha x_2)+(\alpha x_3)-(\alpha x_4)=0\\ 2(\alpha x_1)+3(\alpha x_2)+(\alpha x_3)+(\alpha x_4)=0\end{cases}\right]$$

$\Rightarrow \alpha\mathbf{x}\in\mathbb{V}$.

Exerciţiul 5. Fie $\mathbb{K}$ un corp comutativ de caracteristică diferită de doi ($\mathbb{K}$ poate fi considerat $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$). Se notează cu $\mathcal{M}_n^s(\mathbb{K})$ mulţimea matricelor pătratice simetrice cu elemente din $\mathbb{K}$ şicu $\mathcal{M}_n^a(\mathbb{K})$ mulţimea matricelor pătratice antisimetrice cu elemente din $\mathbb{K}$. Să se arate că ele sunt subspaţii liniare ale lui $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot, \mathbb{K})$ şi că orice matrice pătratică se poate descompune în mod unic ca suma dintre două matrice, una simetrică şi una antisimetrică, adică

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n^s(\mathbb{K}) + \mathcal{M}_n^a(\mathbb{K})$, iar descompunerea este unică.

(sau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n^s(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{M}_n^a(\mathbb{K})$-sumă directă)

Rezolvare. Fie

$$\mathcal{M}_n^s(\mathbb{K}) = \left\{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); \mathbf{A}^T = \mathbf{A}\right\} = \left\{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); \mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}, a_{ji} = a_{ij}, \forall i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}\right\},$$

$$\mathcal{M}_n^a(\mathbb{K}) = \left\{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); \mathbf{A}^T = -\mathbf{A}\right\} = \left\{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); \mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}, a_{ji} = -a_{ij}, \forall i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}\right\}.$$

•Se arată că $\mathcal{M}_n^s(\mathbb{K})$ este subspaţiu liniar al lui $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot, \mathbb{K})$. Se verifică axiomele:

(i) $\forall (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in (\mathcal{M}_n^s(\mathbb{K}))^2 : \mathbf{A} + \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n^s(\mathbb{K})$.

Fie $\forall (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in (\mathcal{M}_n^s(\mathbb{K}))^2 \Rightarrow [\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ şi $\mathbf{B}^T = \mathbf{B}] \Rightarrow [(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = \mathbf{A} + \mathbf{B}] \Rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n^s(\mathbb{K})$.

(ii) $\forall (\alpha, \mathbf{x}) \in \mathbb{K} \times \mathcal{M}_n^s(\mathbb{K}) : \alpha \cdot \mathbf{A} \in \mathcal{M}_n^s(\mathbb{K})$.

Fie $\forall (\alpha, \mathbf{x}) \in \mathbb{K} \times \mathcal{M}_n^s(\mathbb{K}) \Rightarrow [\alpha \in \mathbb{K}$ şi $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}] \Rightarrow [(\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T = \alpha\mathbf{A}]$

$\Rightarrow \alpha\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n^s(\mathbb{K})$.

•Se arată că $\mathcal{M}_n^a(\mathbb{K})$ este subspaţiu liniar al lui $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot, \mathbb{K})$. Se verifică axiomele:

(i) $\forall (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in (\mathcal{M}_n^a(\mathbb{K}))^2 : \mathbf{A} + \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n^a(\mathbb{K})$.

Fie $\forall (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in (\mathcal{M}_n^a(\mathbb{K}))^2 \Rightarrow [\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ şi $\mathbf{B}^T = -\mathbf{B}] \Rightarrow [(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = -(\mathbf{A} + \mathbf{B})]$

$\Rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n^a(\mathbb{K})$.

(ii) $\forall (\alpha, \mathbf{x}) \in \mathbb{K} \times \mathcal{M}_n^a(\mathbb{K}) : \alpha \cdot \mathbf{A} \in \mathcal{M}_n^a(\mathbb{K})$.

Fie $\forall (\alpha, \mathbf{x}) \in \mathbb{K} \times \mathcal{M}_n^a(\mathbb{K}) \Rightarrow [\alpha \in \mathbb{K}$ şi $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}] \Rightarrow [(\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T = -(\alpha\mathbf{A})]$

$\Rightarrow \alpha\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n^a(\mathbb{K})$.

•Fie $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se caută o matrice $\mathbf{A}_s \in \mathcal{M}_n^s(\mathbb{K})$ şi o matrice $\mathbf{A}_a \in \mathcal{M}_n^a(\mathbb{K})$ astfel încât $\mathbf{A} = \mathbf{A}_s + \mathbf{A}_a$. Cum

$\mathbf{A} = \mathbf{A}_s + \mathbf{A}_a|^T \Rightarrow \mathbf{A}^T = \mathbf{A}_s - \mathbf{A}_a$

se obţine

$\mathbf{A}_s = (2_{\mathbb{K}})^{-1}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right)$ şi $\mathbf{A}_a = (2_{\mathbb{K}})^{-1}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right)$.

Se observă că pentru $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$\mathbf{A}_s = (2_{\mathbb{K}})^{-1}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right) \in \mathcal{M}_n^s(\mathbb{K})$ (deoarece $\mathbf{A}_s^T = \mathbf{A}_s$) şi

$\mathbf{A}_a = (2_{\mathbb{K}})^{-1}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right) \in \mathcal{M}_n^a(\mathbb{K})$ (deoarece $\mathbf{A}_a^T = -\mathbf{A}_a$).

Mai mult, descompunerea este unică. În adevar, fie $\widetilde{\mathbf{A}_s} \in \mathcal{M}_n^s(\mathbb{K})$ şi $\widetilde{\mathbf{A}_a} \in \mathcal{M}_n^a(\mathbb{K})$ astfel încât $\mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{A}_s} + \widetilde{\mathbf{A}_a}$. Urmând acelaşi procedeu ca în paragraful anterior, se obţine

$\widetilde{\mathbf{A}_s} = (2_{\mathbb{K}})^{-1}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right) = \mathbf{A}_s$ şi $\widetilde{\mathbf{A}_a} = (2_{\mathbb{K}})^{-1}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right) = \mathbf{A}_a$.

Se poate demonstra unicitatea şi din afirmaţia că unica matrice simultan simetrică şi antisimetrică este matricea nulă. Adică

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n^s(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{M}_n^a(\mathbb{K})$-este sumă directă, deoarece

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n^s(\mathbb{K}) + \mathcal{M}_n^a(\mathbb{K})$ şi $\mathcal{M}_n^s(\mathbb{K}) \cap \mathcal{M}_n^a(\mathbb{K}) = \left\{\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\right\}$

<u>Observaţie.</u> La examen, poate apărea un exerciţiu de tipul

Fie $\mathbb{V}_1 = \left\{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}); \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$ şi

$\mathbb{V}_2 = \left\{\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}); \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p & q & r \end{pmatrix}, p, q, r \in \mathbb{R}\right\}$.

a) Să se arate că $\mathbb{V}_1$ şi $\mathbb{V}_2$ sunt subspaţii liniare ale lui $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

○**b)** Să se arate că $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) = \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$ şi că descompunerea este unică.

(sau $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$).

Rezolvare. $\mathbb{V}_1 = \left\{ \mathbf{A} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) ; \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$-mulţimea scalarilor; $\mathbb{X} = \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ −mulţimea vectorilor (matrice);

$+, \cdot$ sunt cele de la exemple de spaţii standard.

$\mathbb{V}_1 \subseteq \mathbb{X}$ ca submulţime.

Se verifică axiomele:

(i) $\forall (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) \in \mathbb{V}_1^2 : \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 \in \mathbb{V}_1$.

Fie $\forall (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) \in \mathbb{V}_1^2 \Rightarrow \left[\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ şi } \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \overset{\text{def. + matricelor}}{\Rightarrow}$

$\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 \in \mathbb{V}_1$.

(ii) $\forall (\alpha, \mathbf{A}_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{V}_1 : \alpha \cdot \mathbf{A}_1 \in \mathbb{V}_1$.

Fie $\forall (\alpha, \mathbf{A}_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{V}_1 \Rightarrow \left[\alpha \in \mathbb{R} şi \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \overset{\text{def. } \cdot \text{ cu scalari a matricelor}}{\Rightarrow}$

$\alpha \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 & \alpha c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha \mathbf{A}_1 \in \mathbb{V}_1$.

$\mathbb{V}_1$ este subspaţiu liniar al $(\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$.

Analog $\mathbb{V}_2$ este subspaţiu liniar al $(\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$.

Exerciţiul 6. Fie $(\mathcal{F}([a,b], \mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$ spaţiul liniar real al funcţiilor $\mathbf{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$. Care din mulţimile de mai jos au o structură de subspaţiu liniar al spaţiului dat:

a) mulţimea funcţiilor mărginite pe $[a,b]$;
b) mulţimea funcţiilor pozitive pe $[a,b]$;
c) mulţimea funcţiilor cu proprietatea $\mathbf{f}(a) = 0$;
d) mulţimea funcţiilor cu proprietatea $\mathbf{f}(a) = 1$;
e) mulţimea funcţiilor monoton crescătoare pe $[a,b]$;
f) mulţimea funcţiilor monotone pe $[a,b]$;
g) mulţimea funcţiilor continue pe $[a,b]$.

Rezolvare. **a)** Se reaminteşte că funcţia $\mathbf{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ este *mărginită* pe $[a,b]$ dacă $\exists M > 0$ astfel încât

$|\mathbf{f}(x)| \leq M, \forall x \in [a,b]$.

Se notează $\mathbb{V} = \{\mathbf{f} \in \mathcal{F}([a,b], \mathbb{R}) ; \mathbf{f} \text{ e mărginită pe } [a,b]\}$.

Arătăm ca $\mathbb{V}$ este subspaţiu liniar al lui $(\mathcal{F}([a,b], \mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$. Se verifică axiomele:

(i) $\forall (\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \mathbb{V}^2 : \mathbf{f} + \mathbf{g} \in \mathbb{V}$.

Fie $\forall (\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \mathbb{V}^2 \Rightarrow$

$[\exists M_1 > 0$ astfel încât $|\mathbf{f}(x)| \leq M_1, \forall x \in [a,b]$ şi $\exists M_2 > 0$ astfel încât $|\mathbf{g}(x)| \leq M_2, \forall x \in [a,b]] \Rightarrow$

$[\exists M = M_1 + M_2 > 0$ astfel încât

$|(\mathbf{f} + \mathbf{g})(x)| = |\mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)| \leq |\mathbf{f}(x)| + |\mathbf{g}(x)| \leq M_1 + M_2 = M, \forall x \in [a,b]] \Rightarrow \mathbf{f} + \mathbf{g} \in \mathbb{V}$.

(ii) $\forall (\alpha, \mathbf{f}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{V} : \alpha \cdot \mathbf{f} \in \mathbb{V}$.

Fie $\forall (\alpha, \mathbf{f}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{V} \Rightarrow$

$[\alpha \in \mathbb{R}$ şi $\exists M > 0$ astfel încât $|\mathbf{f}(x)| \leq M_1, \forall x \in [a,b]] \Rightarrow$

$[\alpha \in \mathbb{R}$şi $\exists M' = |\alpha| M > 0$ astfel încât

$|(\alpha \mathbf{f})(x)| = |\alpha \cdot \mathbf{f}(x)| = |\alpha| |\mathbf{f}(x)| \leq |\alpha| M, \forall x \in [a,b]] \Rightarrow \alpha \mathbf{f} \in \mathbb{V}$.

2.3. Dependenţă şi independenţă liniară pentru un sistem de vectori

Definiţie: Fie $(\mathbb{X}, +, \cdot, \mathbb{K})$ este un $\mathbb{K}$-spaţiu liniar şi $S = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n) \subseteq \mathbb{X}$ (notaţie: $() = \{\} +$ordine) un sistem de vectori din $\mathbb{X}$.

a) S se numeşte *sistem de vectori liniar dependent* ($\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ sunt *vectori liniar dependenţi*) dacă $\exists (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{\theta_{\mathbb{K}^n}\}$ astfel încât

$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + ... + \lambda_n \mathbf{v}_n = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{X}}$-relaţie de dependenţă liniară.

b) S se numeşte *sistem de vectori liniar independent* ($\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ sunt *vectori liniar independenţi*) dacă

$\lambda_1\mathbf{v}_1 + ... + \lambda_n\mathbf{v}_n = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{X}} \Rightarrow (\lambda_1, ..., \lambda_n) = \theta_{\mathbb{K}^n}$ ca şi unică soluţie.

Teoremă. Fie $(\mathbb{X}, +, \cdot, \mathbb{K})$ este un $\mathbb{K}$-spaţiu liniar şi $S = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n) \subseteq \mathbb{X}$ un sistem de vectori din $\mathbb{X}$. Condiţia necesară şi suficientă ca S să fie liniar dependent este ca cel puţin unul din vectori să se poată exprima ca o combinaţie liniară de ceilalţi vectori.

Exerciţiul 7. Să se studieze dependenţa sau independenţa liniară pentru sistemele de vectori din spaţiile liniare specificate:

a) $((2,3,-1), (0,-2,1), (-1,-1,-1))$ în $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$;

Rezolvare. $\mathbb{X} = \mathbb{R}^3$-mulţimea vectorilor; $\mathbb{K} = \mathbb{R}$-mulţimea scalarilor.

$S = (\mathbf{v}_1 = (2,3,-1), \mathbf{v}_2 = (0,-2,1), \mathbf{v}_3 = (-1,-1,-1))$-sistemul de vectori pentru care se studiază liniar dependenţa/ independenţa.

Se caută $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ (numărul de scalari λ = numărul de vector din S, indiferent din ce spaţiu sunt vectorii) astfel încât

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{X}=\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1(2,3,-1) + \lambda_2(0,-2,1) + \lambda_3(-1,-1,-1) = (0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$(2\lambda_1, 3\lambda_1, -1\lambda_1) + (0\lambda_2, -2\lambda_2, 1\lambda_2) + (-1\lambda_3, -1\lambda_3, -1\lambda_3) = (0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$(2\lambda_1 + 0\lambda_2 - \lambda_3, 3\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3, -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) = (0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 0\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Ultimul sistem este un sistem liniar omogen cu $m = 3$ ecuaţii (cât este dimensiunea lui $\mathbb{X}$) cu $n = 3$ necunoscute, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$(câţi vectori conţine S), care admite măcar soluţia nulă $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0)$. Se studiază dacă admite şi alte soluţii.

modul 1: (liceu) Se calculează:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow$$ sistemul este compatibil unic determinat (sistem Cramer, $m = n = r$) şi admite soluţia nulă $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \left(\frac{\Delta_1}{\det A} = 0, \frac{\Delta_2}{\det A} = 0, \frac{\Delta_3}{\det A} = 0\right)$ drept unică soluţie

$\Rightarrow \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sunt vectori liniar independenţi.

modul 2: (Gauss)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{l_1 \\ -3l_1 + 2l_2 \\ l_1 + 2l_3}}{\overset{pas1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{-4} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{l_1 \\ l_2 \\ l_2 + 2l_3}}{\overset{pas2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + 0\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -4\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

sistemul este compatibil unic determinat şi admite soluţia nulă $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0)$ drept unică soluţie

$\Rightarrow \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sunt vectori liniar independenţi.

b) $((2,1,3,1), (1,2,0,1), (-1,1,-3,0))$ în $(\mathbb{R}^4, +, \cdot, \mathbb{R})$;

Rezolvare. $\mathbb{X} = \mathbb{R}^4-$mulţimea vectorilor; $\mathbb{K} = \mathbb{R}-$mulţimea scalarilor;

$S = (\mathbf{v}_1 = (2,1,3,1), \mathbf{v}_2 = (1,2,0,1), \mathbf{v}_3 = (-1,1,-3,0))$ $-$sistemul de vectori pentru care se studiază dependenţa/ independenţa.

Se caută $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ astfel încât

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1(2,1,3,1) + \lambda_2(1,2,0,1) + \lambda_3(-1,1,-3,0) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$(2\lambda_1, 1\lambda_1, 3\lambda_1, 1\lambda_1) + (1\lambda_2, 2\lambda_2, 0\lambda_2, 1\lambda_2) + (-1\lambda_3, 1\lambda_3, -3\lambda_3, 0\lambda_3) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$(2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3, 3\lambda_1 + 0\lambda_2 - 3\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 + 0\lambda_3) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 0\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 0\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Ultimul sistem este un sistem liniar omogen cu $m=4$ ecuaţii (cât este dimensiunea lui $\mathbb{X}$) cu $n=3$ necunoscute $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ (câţi vectori sunt în S), care admite măcar soluţia nulă $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(0,0,0)$. Se studiază dacă admite şi alte soluţii.

modul 2: (Gauss) $\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\begin{array}{c} l_1 \\ -l_1+2l_2 \\ -3l_1+2l_3 \\ -l_1+2l_4 \end{array}}{\overset{pas1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \\ l_2+l_3 \\ -l_2+3l_4 \end{array}}{\overset{pas2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow$ rang $A=2<3$ =nr. necunoscutelor$\Rightarrow$ sistemul este compatibil simplu ($n-r=3-2=1-$gradul de nedeterminare) nedeterminat şi admite şi alte soluţii decât soluţia nulă $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(0,0,0) \Rightarrow \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ sunt vectori liniar dependenţi.

Mai mult, din rezolvarea sistemului se poate obţine şi o relaţie de dependenţă liniară între vectori.

$\begin{cases} 2\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0 \\ \quad 3\lambda_2+3\lambda_3=0 \end{cases} \uparrow ; \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 = 6 \neq 0 \Rightarrow$se aleg drept necunoscute principale pe cele corespunzătoare coloanelor determinantului λ_1,λ_2 şi se alege λ_3 necunoscută secundară$\Rightarrow$

$\begin{cases} \lambda_1=\alpha \\ \lambda_2=-\alpha \\ \lambda_3=\alpha\in\mathbb{R} \end{cases}$

$\Rightarrow (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(\alpha,-\alpha,\alpha)\,,\alpha\in\mathbb{R}$-o infinitate de soluţii.

Sunt o infinitate simplă de relaţii de dependenţă liniară între $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$,

$\alpha\mathbf{v}_1-\alpha\mathbf{v}_2+\alpha\mathbf{v}_3=\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}^4},\alpha\in\mathbb{R}.$

În particular, pentru $\alpha=1$, obţinem o relaţie de dependenţă liniară,

$\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3=\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}^4}.$

c) Analog

cu a), $((1,2,2,-1)\,,(4,9,9,-4)\,,(5,8,9,-5))$ sunt liniar independenţi în $\left(\mathbb{R}^4,+,\cdot,\mathbb{R}\right)$;

cu b) $((1,-2,3)\,,(5,6,-1)\,,(3,2,1))$ sunt liniar dependenţi în $\left(\mathbb{R}^3,+,\cdot,\mathbb{R}\right)$;

d) $\left(8-t+7t^2,2-t+3t^2,1+t-t^2\right)$ in $(\mathbb{R}_2\,[t]\,,+,\cdot,\mathbb{R})$;

Rezolvare. $\mathbb{X}=\mathbb{R}_2\,[t]$-mulţimea vectorilor (polinoame de grad cel mult 2 în nedeterminata t, având coeficienţi din $\mathbb{R}$); $\mathbb{K}=\mathbb{R}$-mulţimea scalarilor;

$S=\left(\mathbf{v}_1=8-t+7t^2,\mathbf{v}_2=2-t+3t^2,\mathbf{v}_3=1+t-t^2\right).$

Se caută $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ astfel încât

$\lambda_1\mathbf{v}_1+\lambda_2\mathbf{v}_2+\lambda_3\mathbf{v}_3=\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}_2[t]} \Leftrightarrow$

$\lambda_1\left(8-t+7t^2\right)+\lambda_2\left(2-t+3t^2\right)+\lambda_3\left(1+t-t^2\right)=\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}_2[t]},\forall t \Leftrightarrow$

$\left(8\lambda_1-\lambda_1t+7\lambda_1t^2\right)+\left(2\lambda_2-\lambda_2t+3\lambda_2t^2\right)+\left(1\lambda_3+\lambda_3t-\lambda_3t^2\right)=\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}_2[t]},\forall t \Leftrightarrow$

$(8\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3)+(-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)\,t+(7\lambda_1+3\lambda_2-\lambda_3)\,t^2=0\cdot 1+0\cdot t+0\cdot t^2,\forall t \Leftrightarrow$

$\begin{cases} t^0: & 8\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=0 \\ t^1: & -\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0 \\ t^2: & 7\lambda_1+3\lambda_2-\lambda_3=0 \end{cases}$

Ultimul sistem este un sistem liniar omogen cu $m=3$ ecuaţii (cât este dimensiunea lui $\mathbb{R}_2\,[t]$) cu $n=3$ necunoscute $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ (câţi vectori sunt în S), care admite măcar soluţia nulă $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(0,0,0)$. Se studiază dacă admite şi alte soluţii.

modul 1: (liceu) Se calculează

$\det A = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$ Se observă că $\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow$ sistemul este compatibil simplu nedeterminat ($n-r=3-2=1$-gradul de nedeterminare) şi admite şi alte soluţii decât soluţia nulă $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(0,0,0)$

$\Rightarrow \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ sunt vectori liniar dependenţi.

Mai mult, din rezolvarea sistemului se poate obţine şi o relaţie de dependenţă liniară între vectori. Se alege $\lambda_3=2\alpha\in\mathbb{R}$ drept necunoscută secundară$\Rightarrow$

$$\begin{cases} 8\lambda_1 + 2\lambda_2 = -2\alpha \\ -\lambda_1 - \lambda_2 = -2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\alpha \\ \lambda_2 = 3\alpha \\ \lambda_3 = 2\alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-\alpha, 3\alpha, 2\alpha), \alpha \in \mathbb{R}$.

Sunt o infinitate simplă de relaţii de dependenţă liniară între $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$,

$-\alpha\mathbf{v}_1 + 3\alpha\mathbf{v}_2 + 2\alpha\mathbf{v}_3 = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}_2[t]}, \alpha \in \mathbb{R}$.

În particular, pentru $\alpha = -1$, se obţine o relaţie de dependenţă liniară,

$\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3 = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}_2[t]}$.

<u>modul 2:</u> (Gauss) $\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{8} & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{l_1 \\ l_1 + 8l_2 \\ -7l_1 + 8l_3}}{\overset{pas1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-6} & 9 & 0 \\ 0 & 10 & -15 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{l_1 \\ l_2 \\ 5l_2 + 3l_3}}{\overset{pas2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \operatorname{rang} A = 2 < 3 \Rightarrow$ sistemul este compatibil simplu nedeterminat şi admite şi alte soluţii decât soluţia nulă $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$

$\Rightarrow \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sunt vectori liniar dependenţi.

Mai mult, din rezolvarea sistemului se poate obţine şi o relaţie de dependenţă liniară între vectori.

$$\begin{cases} 8\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \quad -6\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0 \end{cases} \uparrow \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\alpha \\ \lambda_2 = 3\alpha \\ \lambda_3 = 2\alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-\alpha, 3\alpha, 2\alpha), \alpha \in \mathbb{R}$.

Sunt o infinitate simplă de relaţii de dependenţă liniară între $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$,

$-\alpha\mathbf{v}_1 + 3\alpha\mathbf{v}_2 + 2\alpha\mathbf{v}_3 = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}_2[t]}, \alpha \in \mathbb{R}$.

În particular, pentru $\alpha = -1$, se poate o relaţie de dependenţă liniară,

$\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3 = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}_2[t]}$.

e) $\left(\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}\right)$ în $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$;

Rezolvare. $\mathbb{X} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$-mulţimea vectorilor; $\mathbb{K} = \mathbb{R}$-mulţimea scalarilor.

Fie $S = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3)$.

Se caută $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ astfel încât

$\lambda_1\mathbf{A}_1 + \lambda_2\mathbf{A}_2 + \lambda_3\mathbf{A}_3 = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \Leftrightarrow$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2\lambda_1 & -2\lambda_1 \\ 4\lambda_1 & -6\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1\lambda_2 & -4\lambda_2 \\ 5\lambda_2 & 3\lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0\lambda_3 & -4\lambda_3 \\ 4\lambda_3 & 8\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 0\lambda_3 & -2\lambda_1 - 4\lambda_2 - 4\lambda_3 \\ 4\lambda_1 + 5\lambda_2 + 4\lambda_3 & -6\lambda_1 + 3\lambda_2 + 8\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 0\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 - 4\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 + 5\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ -6\lambda_1 + 3\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Ultimul sistem este un sistem liniar <u>omogen</u> cu $m = 4$ ecuaţii (cât este dimensiunea lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$) cu $n = 3$ necunoscute $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (câţi vectori sunt în S), care admite măcar soluţia nulă $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$. Se studiază dacă admite şi alte soluţii.

<u>modul 2:</u> (Gauss) $\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & 4 & 0 \\ -6 & 3 & 8 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{l_1 \\ l_2 + l_1 \\ l_3 - 2l_1 \\ l_4 + 3l_1}}{\overset{pas1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-3} & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 8 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{l_1 \\ l_2 \\ l_3 + l_2 \\ l_4 + 2l_2}}{\overset{pas2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \operatorname{rang} A = 2 < 3 \Rightarrow$ sistemul este compatibil simplu nedeterminat şi admite şi alte soluţii decât soluţia nulă $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$

$\Rightarrow \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sunt vectori liniar dependenţi.

Mai mult, din rezolvarea sistemului se poate obţine şi o relaţie de dependenţă liniară între vectori.

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 0\lambda_3 = 0 \\ \quad -3\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \end{cases} \uparrow \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2\alpha \\ \lambda_2 = -4\alpha \\ \lambda_3 = 3\alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (2\alpha, -4\alpha, 3\alpha), \alpha \in \mathbb{R}.$

Sunt o infinitate simplă de relaţii de dependenţă liniară între $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$,

$2\alpha\mathbf{A}_1 - 4\alpha\mathbf{A}_2 + 3\alpha\mathbf{A}_3 = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}, \alpha \in \mathbb{R}.$

În particular, pentru $\alpha = 1$, se obţine o relaţie de dependenţă liniară,

$2\mathbf{A}_1 - 4\mathbf{A}_2 + 3\mathbf{A}_3 = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}.$

○**f)** Analog cu a), $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x; g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \cos x; h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = x \sin x$

(f, g, h) este sistem liniar independent în $(\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$.

○**g)** Analog cu b), $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin^2 x; g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \cos^2 x; h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = \cos 2x$

(f, g, h) este sistem liniar dependent în $(\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$.$(\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x)$.

Exerciţiul 8. Se consideră vectorii $\mathbf{v}_1 = \left(3 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v}_2 = \left(7, 1 + 2\sqrt{2}\right) \in \mathbb{R}^2$. Să se arate că $\mathbf{v}_1$ si $\mathbf{v}_2$ sunt liniar dependenţi dacă se consideră $\mathbb{R}^2$ spaţiu liniar peste corpul comutativ $\mathbb{R}$ şi liniar independenţi dacă se consideră $\mathbb{R}^2$ spaţiu liniar peste corpul comutativ $\mathbb{Q}$.

Rezolvare. Fie $S = \left(\mathbf{v}_1 = \left(3 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right), \mathbf{v}_2 = \left(7, 1 + 2\sqrt{2}\right)\right)$.

•Se studiază dacă S este sistem liniar dependend de vectori în $\left(\mathbb{X} = \mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{K} = \mathbb{R}\right)$. Se caută $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ astfel încât

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow$$
$$\lambda_1\left(3 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right) + \lambda_2\left(7, 1 + 2\sqrt{2}\right) = (0, 0) \Leftrightarrow$$
$$\left(\left(3 + \sqrt{2}\right)\lambda_1 + 7\lambda_2, \left(1 + \sqrt{2}\right)\lambda_1 + \left(1 + 2\sqrt{2}\right)\lambda_2\right) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} \left(3 + \sqrt{2}\right)\lambda_1 + 7\lambda_2 = 0 \\ \left(1 + \sqrt{2}\right)\lambda_1 + \left(1 + 2\sqrt{2}\right)\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Ultimul sistem este un sistem liniar omogen în necunoscutele λ_1, λ_2, care admite măcar soluţia nulă $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$. Se studiază dacă admite şi alte soluţii.

<u>modul 1:</u> se calculează $\det A = \begin{vmatrix} 3 + \sqrt{2} & 7 \\ 1 + \sqrt{2} & 1 + 2\sqrt{2} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ sistemul este compatibil simplu nedeterminat şi admite şi alte soluţii decât soluţia nulă $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$

$\Rightarrow \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sunt vectori liniar dependenţi în $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R}\right)$.

<u>modul 2:</u> greoi;

Indiferent de mod, se va rezolva sistemul, pentru a obţine o relaţie de dependenţă liniară.

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{7}{3+\sqrt{2}}\alpha \\ \lambda_2 = \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

S-a găsit $(\lambda_1, \lambda_2) = \left(-\frac{7}{3+\sqrt{2}}\alpha, \alpha\right) \in \mathbb{R}^2$ asfel încât

$-\frac{7}{3+\sqrt{2}}\alpha\mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}^2}, \alpha \in \mathbb{R}.$

În particular, pentru $\alpha = 1$, se obţine o relaţie de dependenţă liniară,

$-\frac{7}{3+\sqrt{2}}\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}^2}, \alpha \in \mathbb{R}.$

•Se studiază dacă S este sistem liniar independent de vectori în $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{Q}\right)$. Se caută $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Q}^2$ astfel încât

$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}^2}.$

Se găseşte $\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{7}{3+\sqrt{2}}\alpha \\ \lambda_2 = \alpha. \end{cases}$ Se observă că $\forall\lambda_2 = \alpha \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow \lambda_1 \notin \mathbb{Q}$. Atunci $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$ este unica soluţie a sistemului în $\mathbb{Q}^2 \Rightarrow$ sistemul este compatibil unic determinat în $\mathbb{Q}^2$ şi admite soluţia nulă $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$ drept unică soluţie $\Rightarrow \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sunt vectori liniar independenţi în $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{Q}\right)$.

Exerciţiul 9. Se dau vectorii liniar independenţi $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ în spaţiul liniar $\mathbb{X}$ peste corpul comuativ $\mathbb{R}$ şi se cere:

a) să se arate că vectorii $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, $\mathbf{v}+\mathbf{w}$, $\mathbf{u}+\mathbf{w}$ sunt liniar independenţi;
Rezolvare. Fie $S=(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{v}+\mathbf{w},\mathbf{u}+\mathbf{w})$. Se caută $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ astfel încât

$$\lambda_1(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\lambda_2(\mathbf{v}+\mathbf{w})+\lambda_3(\mathbf{u}+\mathbf{w})=\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{X}}\Leftrightarrow$$
$$(\lambda_1+0\lambda_2+\lambda_3)\,\mathbf{u}+(\lambda_1+\lambda_2+0\lambda_3)\,\mathbf{v}+(0\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\,\mathbf{w}=\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{X}}$$
$$\underset{\text{în }(\mathbb{X},+,\cdot,\mathbb{R})}{\overset{(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})\text{ sunt liniar independenţi}}{\Leftrightarrow}}\begin{cases}\lambda_1+0\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_2+0\lambda_3=0\\ 0\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}$$

Ultimul sistem este un sistem liniar omogen în necunoscutele $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, care admite măcar soluţia nulă $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(0,0,0)$. Se studiază dacă admite şi alte soluţii.

<u>modul 1:</u> se calculează $\det A=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq0\Rightarrow$ sistemul este compatibil unic determinat şi admite soluţia nulă $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(0,0,0)$ drept unică soluţie

$\Rightarrow \mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{v}+\mathbf{w},\mathbf{u}+\mathbf{w}$ sunt vectori liniar independenţi.

<u>modul 2:</u> $$\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&0&1&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\end{array}\right)\underset{\substack{l_1\\-l_1+l_2\\l_3}}{\overset{pas1}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&\boxed{1}&-1&0\\0&1&1&0\end{array}\right)\underset{\substack{l_1\\l_2\\-l_2+l_3}}{\overset{pas2}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&2&-1&0\\0&0&-2&0\end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ sistemul este compatibil unic determinat şi admite soluţia nulă $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(0,0,0)$ drept unică soluţie

$\Rightarrow \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ sunt vectori liniar independenţi.

b) să se arate că vectorii $\mathbf{u}+\mathbf{v}-3\mathbf{w}$, $\mathbf{u}+3\mathbf{v}-\mathbf{w}$, $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ sunt liniar dependenţi;
Rezolvare. Fie $S=(\mathbf{u}+\mathbf{v}-3\mathbf{w},\mathbf{u}+3\mathbf{v}-\mathbf{w},\mathbf{v}+\mathbf{w})$. Se caută $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ astfel încât

$$\lambda_1(\mathbf{u}+\mathbf{v}-3\mathbf{w})+\lambda_2(\mathbf{u}+3\mathbf{v}-\mathbf{w})+\lambda_3(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{X}}\Leftrightarrow$$
$$(\lambda_1+\lambda_2+0\lambda_3)\,\mathbf{u}+(\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3)\,\mathbf{v}+(-3\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)\,\mathbf{w}=\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{X}}$$
$$\underset{\text{în }(\mathbb{X},+,\cdot,\mathbb{R})}{\overset{(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})\text{ sunt liniar independenţi}}{\Leftrightarrow}}\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+0\lambda_3=0\\ \lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3=0\\ -3\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}$$

Ultimul sistem este un sistem liniar omogen în necunoscutele $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, care admite măcar soluţia nulă $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(0,0,0)$. Se studiază dacă admite şi alte soluţii.

<u>modul 1:</u> Calculăm $\det A=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&3&1\\-3&-1&1\end{vmatrix}=0$. Se observă că $\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}=2\neq0\Rightarrow$ sistemul este compatibil simplu nedeterminat şi admite şi alte soluţii decât soluţia nulă $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(0,0,0)\Rightarrow\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ sunt vectori liniar dependenţi.

<u>modul 2:</u> $$\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&1&0&0\\1&3&1&0\\-3&-1&1&0\end{array}\right)\underset{\substack{l_1\\-l_1+l_2\\3l_1+l_3}}{\overset{pas1}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&\boxed{2}&1&0\\0&2&1&0\end{array}\right)\underset{\substack{l_1\\l_2\\-l_2+l_3}}{\overset{pas2}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$\Rightarrow \operatorname{rang}A=2<3\Rightarrow$ sistemul este compatibil simplu nedeterminat şi admite şi alte soluţii decât soluţia nulă $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(0,0,0)$

$\Rightarrow \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ sunt vectori liniar dependenţi.

Mai mult, din rezolvarea sistemului se poate obţine şi o relaţie de dependenţă liniară între vectori.

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+0\lambda_3=0\\ \qquad 2\lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=\alpha\\ \lambda_2=-\alpha\\ \lambda_3=2\alpha\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$\Rightarrow(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(\alpha,-\alpha,2\alpha)\,,\alpha\in\mathbb{R}$.

Sunt o infinitate simplă de relaţii de dependenţă liniară între $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$,

$$\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v}-3\mathbf{w})-\alpha(\mathbf{u}+3\mathbf{v}-\mathbf{w})+2\alpha(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{X}},\alpha\in\mathbb{R}.$$

În particular, pentru $\alpha=1$, se obţine o relaţie de dependenţă liniară,

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v}-3\mathbf{w})-(\mathbf{u}+3\mathbf{v}-\mathbf{w})+2(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{X}}.$$

2.4. Sisteme de generatori într-un spaţiu liniar (vectorial)

Definiţie. Fie $(\mathbb{X},+,\cdot,\mathbb{K})$ este un $\mathbb{K}$-spaţiu liniar şi $S=(\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n)\subseteq\mathbb{X}$ (notaţie: $()=\{\}$ +ordine) un sistem de vectori din $\mathbb{X}$.

a) Un vector $\mathbf{v}\in\mathbb{X}$ este *combinaţie liniară* a sistemului de vectori S dacă
$\exists(\lambda_1,...,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ a.î. $\mathbf{v}=\lambda_1\mathbf{v}_1+...+\lambda_n\mathbf{v}_n$.

b) Se numeşte *subspaţiu liniar generat de sistemul de vectori* S mulţimea
$[S]=\{\mathbf{v}\in\mathbb{X};\exists(\lambda_1,...,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ a.î. $\mathbf{v}=\lambda_1\mathbf{v}_1+...+\lambda_n\mathbf{v}_n\}$ - este subspaţiu liniar în $(\mathbb{X},+,\cdot,\mathbb{K})$.

c) Sistemul de vectori S se numeşte *sistem de generatori pentru* $\mathbb{X}$ sau S *generează pe* $\mathbb{X}$ dacă
$[S]=\mathbb{X}$, adică $\forall\mathbf{v}\in\mathbb{X},\exists(\lambda_1,...,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ a.î. $\mathbf{v}=\lambda_1\mathbf{v}_1+...+\lambda_n\mathbf{v}_n$.

d) Un $\mathbb{K}$-spaţiu liniar $\mathbb{X}$ se numeşte *finit generat* dacă pentru $\mathbb{X}$ există un sistem finit de generatori.

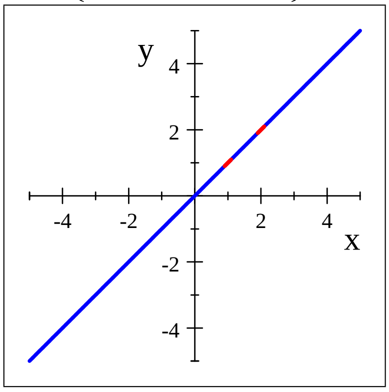
Observaţie. În $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\cdot,\mathbb{R})$, care este $\mathbb{R}$-spaţiu liniar (vectorial) standard al funcţiilor $\mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se consideră sistemul de funcţii:

$S=\left\{\mathbf{f}_{1,2,3}:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\mathbf{f}_1(t)=1,\mathbf{f}_2(t)=t,\mathbf{f}_3(t)=t^2\right\}$.

Orice funcţie polinomială de grad mai mic sau egal cu 2 poate fi scrisă ca o combinaţie liniară de funcţii din S, adică $\mathbf{p}:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\mathbf{p}(t)=a_0 1+a_1t+a_2t^2$.

Dar funcţia exponenţială $\mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\mathbf{f}(t)=e^t$ nu poate fi scrisă ca o combinaţie liniară de funcţii din S.

Observaţie. În $(\mathbb{R}^2,+,\cdot,\mathbb{R})$ sistemul de vectori $S=(\mathbf{v}_1=(1,1),\mathbf{v}_2=(2,2))$ generează dreapta
$[S]=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;y=x\right\}$.



Observaţie. a) Fie $\mathbf{A}\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n}\\ ... & ... & ... & ...\\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn}\end{pmatrix}$.

Fie $L(\mathbf{A})=\left(\mathbf{l}_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\end{pmatrix},...,\mathbf{l}_m=\begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn}\end{pmatrix}\right)$ submulţimea din $\mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$. Se poate demonstra că *subspaţiul liniilor matricei* $\mathbf{A}$, adică cel generat de vectorii linii, este subspaţiu liniar în $(\mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{R}),+,\cdot,\mathbb{R})$.

Fie $C(\mathbf{A})=\left(\mathbf{c}_1=\begin{pmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ ...\\ a_{m1}\end{pmatrix},...,\mathbf{c}_n=\begin{pmatrix} a_{1n}\\ a_{2n}\\ ...\\ a_{mn}\end{pmatrix}\right)$ submulţimea din $\mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$. Se poate demonstra că *subspaţiul coloanelor matricei* $\mathbf{A}$, adică cel generat de vectorii coloană, este subspaţiu liniar în $(\mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R}),+,\cdot,\mathbb{R})$.

De exemplu, fie $\mathbf{A}\in\mathcal{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$, $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5\\ -2 & -4 & 0 & 4 & -2\\ 1 & 2 & 2 & 4 & 9\end{pmatrix}$.

$L(\mathbf{A})=\left(\mathbf{l}_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5\end{pmatrix},\mathbf{l}_2=\begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 & 4 & -2\end{pmatrix},\mathbf{l}_3=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 9\end{pmatrix}\right)$.

$[L(\mathbf{A})]=\left\{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^5;\mathbf{v}=\lambda_1\mathbf{l}_1+\lambda_2\mathbf{l}_2+\lambda_3\mathbf{l}_3\right\}$ este subspaţiu liniar în $(\mathcal{M}_{1\times 5}(\mathbb{R}),+,\cdot,\mathbb{R})$.

$$C(\mathbf{A}) = \left(\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$$

$[C(\mathbf{A})] = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}_3; \mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{c}_1 + \lambda_2\mathbf{c}_2 + \lambda_3\mathbf{c}_3 + \lambda_4\mathbf{c}_4 + \lambda_5\mathbf{c}_5\}$ este subspaţiu liniar în $(\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$.

b) Fie $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \mathbf{b} \in \mathcal{M}_{m\times1}(\mathbb{R})$. Sistemul $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$ este compatibil dacă şi numai dacă $\mathbf{b}$ aparţine spaţiului generat de coloanele matricei $\mathbf{A}$, $\mathbf{b} \in [C(\mathbf{A})]$.

Exerciţiul 10. **a)** Fie spaţiul liniar $(\mathbb{R}_3[t], +, \cdot, \mathbb{R})$. Să se determine care dintre polinoamele $t^2, t-1, 2t^2-1$ aparţin subspaţiului liniar generat de $(t^3 - t + 1, 3t^2 + 2t, t^3)$. (enunţ echivalent: Să se determine care dintre polinoamele $t^2, t-1, 2t^2-1$ se pot scrie drept combinaţii liniare de vectorii $t^3 - t + 1, 3t^2 + 2t, t^3$.)
b) Fie spaţiul liniar $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$. Să se studieze dacă vectorul $(1, 2, -3)$ este în spaţiul generat de vectorii $(1, 2, 3), (0, -1, 3), (0, 0, 6)$.
Rezolvare. a) $\mathbb{X} = \mathbb{R}_3[t]$-mulţimea vectorilor; $\mathbb{K} = \mathbb{R}$-mulţimea scalarilor;

$S = (\mathbf{v}_1 = t^3 - t + 1, \mathbf{v}_2 = 3t^2 + 2t, \mathbf{v}_3 = t^3)$.

$[S] = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}_3[t]; \exists(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ a.î. } \mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3\}$

•Se studiază dacă $\mathbf{u}_1 = t^2 \in [S]$. Se caută $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ astfel încât

$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_1 \Leftrightarrow$

$\lambda_1(t^3 - t + 1) + \lambda_2(3t^2 + 2t) + \lambda_3(t^3) = t^2 \Leftrightarrow$

$\lambda_1 + (-\lambda_1 + 2\lambda_2)t + 3\lambda_2 t^2 + (\lambda_1 + \lambda_3)t^3 = t^2 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 & = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 & = 0 \\ 3\lambda_2 & = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

Ultimul sistem este un sistem liniar neomogen în necunoscutele $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Se observă că este incompatibil $\Rightarrow$ $\mathbf{u}_1 = t^2 \notin [S]$, adică $\mathbf{u}_1 = t^2$ nu se poate scrie drept combinaţie liniară de polinoamele $\mathbf{v}_1 = t^3 - t + 1, \mathbf{v}_2 = 3t^2 + 2t, \mathbf{v}_3 = t^3$.

•Se studiază dacă $\mathbf{u}_2 = t - 1 \in [S]$. Se caută $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ astfel încât

$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_2 \Leftrightarrow$

$\lambda_1(t^3 - t + 1) + \lambda_2(3t^2 + 2t) + \lambda_3(t^3) = t - 1, \forall t \Leftrightarrow$

$\lambda_1 + (-\lambda_1 + 2\lambda_2)t + 3\lambda_2 t^2 + (\lambda_1 + \lambda_3)t^3 = t - 1, \forall t \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 & = -1 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 & = 1 \\ 3\lambda_2 & = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

Ultimul sistem este un sistem liniar neomogen în necunoscutele $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Se observă că $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-1, 0, 1)$ este unica soluţie, adică

$\mathbf{u}_2 = t - 1 = -\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \in [S]$, adică $\mathbf{u}_2 = t - 1$ se poate scrie drept combinaţie liniară de polinoamele $\mathbf{v}_1 = t^3 - t + 1, \mathbf{v}_2 = 3t^2 + 2t, \mathbf{v}_3 = t^3$.

b) $\mathbb{X} = \mathbb{R}^3$-mulţimea vectorilor; $\mathbb{K} = \mathbb{R}$-mulţimea scalarilor;

$S = (\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3), \mathbf{v}_2 = (0, -1, 3), \mathbf{v}_3 = (0, 0, 6))$.

$[S] = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3; \exists(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ a.î. } \mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3\}$

•Se studiază dacă $\mathbf{u}_1 = (1, 2, -6) \in [S]$. Se caută $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ astfel încât

$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_1 \Leftrightarrow$

$\lambda_1(1, 2, 3) + \lambda_2(0, -1, 3) + \lambda_3(0, 0, 6) = (1, 2, -3) \Leftrightarrow$

$\lambda_1 + (-\lambda_1 + 2\lambda_2)t + 3\lambda_2 t^2 + (\lambda_1 + \lambda_3)t^3 = t^2 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 = 1 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + 0\lambda_3 = 2 \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3 = -3 \end{cases} \downarrow \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases}$$

Ultimul sistem este un sistem liniar neomogen în necunoscutele $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Se observă că este compatibil $\Rightarrow$

$\mathbf{u}_1 = (1, 2, -6) = 1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 - 1\mathbf{v}_3 \in [S]$, adică $\mathbf{u}_1 = (1, 2, -6)$ se poate scrie drept combinaţie liniară de vectorii $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.