SEMINAR NR. 4, REZOLVĂRI
Algebră liniară şi Geometrie analitică

2.5. Baze într-un spaţiu liniar

Definiţie: Fie $(\mathbb{X},+,\cdot,\mathbb{K})$ este un $\mathbb{K}$-spaţiu liniar. Un sistem de vectori $B=(\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n)\subseteq\mathbb{X}$ este *bază* în $\mathbb{X}$ dacă

(i) B este un sistem de vectori liniar independenţi;

(ii) B este sistem de generatori pentru $\mathbb{X}$, $[B]=\mathbb{X}$, adică

$\forall\mathbf{v}\in\mathbb{X},\exists\,(\lambda_1,...,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ a.î. $\mathbf{v}=\lambda_1\mathbf{v}_1+...+\lambda_n\mathbf{v}_n$.

Dacă B este bază în $\mathbb{X}$, scalarii unici $\lambda_1,...,\lambda_n$ se numesc *coordonatele vectorului* $\mathbf{v}$ *în baza* B.

Caracterizare 1: Fie $(\mathbb{X},+,\cdot,\mathbb{K})$ este un $\mathbb{K}$-spaţiu liniar. Un sistem de vectori $B=(\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n)\subseteq\mathbb{X}$ este bază în $\mathbb{X}$ $\Leftrightarrow$ orice vector din $\mathbb{X}$ se scrie în mod unic drept combinaţie liniară de vectori din B, adică

$\forall\mathbf{v}\in\mathbb{X},\exists^{*\text{-unică}}\,(\lambda_1,...,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ a.î. $\mathbf{v}=\lambda_1\mathbf{v}_1+...+\lambda_n\mathbf{v}_n$.

Teoremă. Fie $(\mathbb{X},+,\cdot,\mathbb{K})$ este un $\mathbb{K}$-spaţiu liniar şi fie $B=(\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n)\subseteq\mathbb{X}$ o bază în $\mathbb{X}$. Atunci:

a) Orice altă bază din $\mathbb{X}$ este formată din n vectori.

b) Orice sistem de vectori liniari independenţi format din n vectori este o bază în $\mathbb{X}$.

Definiţie: Fie $(\mathbb{X},+,\cdot,\mathbb{K})$ este un $\mathbb{K}$-spaţiu liniar, $\mathbb{X}\neq\{\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{X}}\}$. Spunem ca $\mathbb{X}$ este *finit dimensional* şi are *dimensiunea* $n\in\mathbb{N}^*$, ceea ce se notează $\dim_{\mathbb{K}}\mathbb{X}=n$, dacă în $\mathbb{X}$ există o bază formată din n vectori. Prin convenţie, $\dim_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{X}}\}=0$.

Caracterizare 2: Fie $(\mathbb{X},+,\cdot,\mathbb{K})$ este un $\mathbb{K}$-spaţiu liniar. Un sistem de vectori $B=(\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n)\subseteq\mathbb{X}$ este bază în $\mathbb{X}$ $\Leftrightarrow$

(i) $\dim_{\mathbb{K}}\mathbb{X}=\operatorname{card}B(=n)$.

(ii) B este un sistem de vectori liniar independenţi.

https://www.3blue1brown.com/essence-of-linear-algebra-page

Exemple de baze canonice în spaţiile liniare standard:

1. Fie $(\mathbb{K}^n,+,\cdot,\mathbb{K})$ spaţiu liniar peste $\mathbb{K}$. Atunci

$C=(\mathbf{e}_1=(1,...,0),...,\mathbf{e}_n=(0,...,1))$

este o bază în $\mathbb{K}^n$, numită *baza canonică*. $\dim_{\mathbb{K}}\mathbb{K}^n=n$.

Ex: În $\left(\mathbb{R}^3,+,\cdot,\mathbb{R}\right),C=(\mathbf{e}_1=(1,0,0),\mathbf{e}_2=(0,1,0),\mathbf{e}_3=(0,0,1))$ şi

$(2,3,7)=2\,(1,0,0)+3\,(0,1,0)+7\,(0,0,1)$.

2. Fie $(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),+,\cdot,\mathbb{K})$ spaţiu liniar peste $\mathbb{K}$. Atunci

$C=(\mathbf{E}_{11},...,\mathbf{E}_{mn})$

este o bază în $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, numită *baza canonică*. $\mathbf{E}_{ij}$ este matricea cu m linii şi n coloane ce are la intersecţia liniei i cu coloana j elementul $1_{\mathbb{K}}$ iar restul componentelor sunt $0_{\mathbb{K}}$. $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})=mn$.

Ex: În $(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}),+,\cdot,\mathbb{R}),C=(\mathbf{E}_{11},\mathbf{E}_{11},\mathbf{E}_{21},\mathbf{E}_{22})$ şi

$$\begin{pmatrix}1&2\\7&6\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

3. Fie $(\mathcal{F}(M,\mathbb{X}),+,\cdot,\mathbb{K})$ spaţiu liniar peste $\mathbb{K}$ (dacă $(\mathbb{X},+,\cdot\mathbb{K})$ este un $\mathbb{K}$-spaţiu liniar). Acest spaţiu nu este finit dimensional.

4. Fie $(\mathbb{K}_n[t],+,\cdot,\mathbb{K})$ spaţiu liniar peste $\mathbb{K}$. Atunci

$C=(\mathbf{p}_0=1,...,\mathbf{p}_n=t^n)$

este o bază în $\mathbb{K}_n[t]$, numită *baza canonică*. $\dim_{\mathbb{K}}\mathbb{K}_n[t]=n+1$.

Ex: În $(\mathbb{R}_3[t],+,\cdot,\mathbb{R})$, $C=\left(\mathbf{p}_0=1,\mathbf{p}_1=t,\mathbf{p}_2=t^2,\mathbf{p}_3=t^3\right)$ şi
$5t^2+11t=0\cdot 1+11\cdot t+5\cdot t^2+0\cdot t^3$.

Exerciţiul 4. Fie spaţiul liniar $\left(\mathbb{R}^4,+,\cdot,\mathbb{R}\right)$.
a) Să se arate că
$B=(\mathbf{v}_1=(1,1,2,1),\mathbf{v}_2=(1,-1,0,1),\mathbf{v}_3=(0,0,-1,1),\mathbf{v}_4=(1,2,2,0))$
este o bază în $\left(\mathbb{R}^4,+,\cdot,\mathbb{R}\right)$.
b) Să se determine coordonatele vectorului $\mathbf{v}=(1,1,1,1)$ în această bază.

Rezolvare. a) modul 1: B este bază în $\left(\mathbb{R}^4,+,\cdot,\mathbb{R}\right) \overset{\text{Caracterizarea 2}}{\Leftrightarrow}$

(i) $\underbrace{\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4}_{C=(\mathbf{e}_1=(1,0,0,0),\mathbf{e}_2=(0,1,0,0),\mathbf{e}_3=(0,0,1,0),\mathbf{e}_4=(0,0,0,1)) \text{ în } (\mathbb{R}^4,+,\cdot,\mathbb{R}) \text{ are 4 vectori}} = 4 = \underbrace{\operatorname{card} B}_{B \text{ are 4 vectori}}$;

(ii) B este sistem liniar independent de vectori.

mod ii)-1: Direct, calculăm determinantul având pe coloane componentele cvadruplelor din B :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix} \overset{\text{dezv după linia 1}}{=}$$

$$= 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} =$$

$=-4\neq 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4$ sunt vectori liniar independenţi.

mod ii)-2: Detaliat, căutăm $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in\mathbb{R}^4$ astfel încât
$\lambda_1\mathbf{v}_1+\lambda_2\mathbf{v}_2+\lambda_3\mathbf{v}_3+\lambda_4\mathbf{v}_4=\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow$

$\lambda_1(1,1,2,1)+\lambda_2(1,-1,0,1)+\lambda_3(0,0,-1,1)+\lambda_4(1,2,2,0)=(0,0,0,0) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+0\lambda_3+\lambda_4=0\\ \lambda_1-\lambda_2+0\lambda_3+2\lambda_4=0\\ 2\lambda_1+0\lambda_2-1\lambda_3+2\lambda_4=0\\ \lambda_1+\lambda_2+1\lambda_3+0\lambda_4=0\end{cases}$$

Ultimul sistem este un sistem liniar omogen în necunoscutele $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$, care admite măcar soluţia nulă $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)=(0,0,0,0)$. Studiem dacă admite şi alte soluţii.

•sau calculăm $\det A=-4\neq 0 \Rightarrow$ sistemul este compatibil unic determinat şi admite soluţia nulă $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)=(0,0,0,0)$ drept unică soluţie $\Rightarrow \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4$ sunt vectori liniar independenţi.

•sau
$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right) \underset{\substack{l_1\\ -l_1+l_2\\ -2l_1+l_3\\ -l_1+l_4}}{\overset{pas1}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & \boxed{-2} & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\end{array}\right) \underset{\substack{l_1\\ l_2\\ -l_2+l_3\\ l_4}}{\overset{pas2}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\end{array}\right) \underset{\substack{l_1\\ l_2\\ l_3\\ l_3+l_4}}{\overset{pas2}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0\end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ sistemul este compatibil unic determinat şi admite soluţia nulă $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)=(0,0,0,0)$ drept

unică soluţie $\Rightarrow \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ sunt vectori liniar independenţi.
<u>modul 2○:</u> B este bază în $\left(\mathbb{R}^4, +, \cdot, \mathbb{R}\right) \overset{\text{Caracterizarea 1}}{\Leftrightarrow} \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^4, \exists^* (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ a.î. $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 + \lambda_4\mathbf{v}_4$.

Fie $\forall \mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ dat. Căutăm $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ a.î.

$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 + \lambda_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{v} \Leftrightarrow$

$\lambda_1 (1,1,2,1) + \lambda_2 (1,-1,0,1) + \lambda_3 (0,0,-1,1) + \lambda_4 (1,2,2,0) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \Leftrightarrow$

$(\lambda_1 - \lambda_2 + 0\lambda_3 + \lambda_4, \lambda_1 - \lambda_2 + 0\lambda_3 + \lambda_4, \lambda_1 - \lambda_2 + 0\lambda_3 + \lambda_4, \lambda_1 - \lambda_2 + 0\lambda_3 + \lambda_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 0\lambda_3 + \lambda_4 = x_1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 0\lambda_3 + 2\lambda_4 = x_2 \\ 2\lambda_1 + 0\lambda_2 - 1\lambda_3 + 2\lambda_4 = x_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 1\lambda_3 + 0\lambda_4 = x_4 \end{cases}$$

Ultimul sistem este un sistem liniar neomogen în necunoscutele $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, cu parametrii x_1, x_2, x_3, x_4.
•sau calculăm $\det A = -4 \neq 0 \Rightarrow$ sistemul este compatibil unic determinat. Se rezolvă cu regula lui Cramer$\Rightarrow$ $\mathbf{v}$ se scrie în mod unic drept combinaţie liniară de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \Rightarrow B$ e bază în $\left(\mathbb{R}^4, +, \cdot, \mathbb{R}\right)$.

•sau
$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & x_2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & x_4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \overset{pas1}{\sim} \\ l_1 \\ -l_1 + l_2 \\ -2l_1 + l_3 \\ -l_1 + l_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & x_3 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & x_4 - x_1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \overset{pas2}{\sim} \\ l_1 \\ l_2 \\ -l_2 + l_3 \\ l_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -1 & x_3 - x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & x_4 - x_1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \overset{pas3}{\sim} \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_3 + l_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & x_3 - x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & x_4 + x_3 - x_2 - 2x_1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ sistemul este compatibil unic determinat $\Rightarrow$ $\mathbf{v}$ se scrie în mod unic drept combinaţie liniară de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \Rightarrow B$ e bază în $\left(\mathbb{R}^4, +, \cdot, \mathbb{R}\right)$.

Mai mult din rezolvarea sistemului obţinem coordonatele vectorului $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ în baza B.

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 0\lambda_3 + \lambda_4 = x_1 \\ -2\lambda_2 + 0\lambda_3 + \lambda_4 = x_2 - x_1 \\ -\lambda_3 - \lambda_4 = x_3 - x_2 - x_1 \\ -2\lambda_4 = x_4 + x_3 - x_2 - 2x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -x_1 - \frac{1}{4}x_2 + \frac{3}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 \\ \lambda_2 = x_1 - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 \\ \lambda_3 = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ \lambda_4 = x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4. \end{cases}$$

Adică

$$\mathbf{v} = \left(-x_1 - \tfrac{1}{4}x_2 + \tfrac{3}{4}x_3 + \tfrac{3}{4}x_4\right)\mathbf{v}_1 + \left(x_1 - \tfrac{1}{4}x_2 - \tfrac{1}{4}x_3 - \tfrac{1}{4}x_4\right)\mathbf{v}_2 + \\ + \left(\tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{2}x_4\right)\mathbf{v}_3 + \left(x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}x_4\right)\mathbf{v}_4.$$

b) Fie $\mathbf{v} = (1,1,1,1) \in \mathbb{R}^4$ dat. Căutăm $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ a.î.

$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 + \lambda_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{v} \Leftrightarrow$

$\lambda_1 (1,1,2,1) + \lambda_2 (1,-1,0,1) + \lambda_3 (0,0,-1,1) + \lambda_4 (1,2,2,0) = (1,1,1,1) \Leftrightarrow$

$(\lambda_1 - \lambda_2 + 0\lambda_3 + \lambda_4, \lambda_1 - \lambda_2 + 0\lambda_3 + \lambda_4, \lambda_1 - \lambda_2 + 0\lambda_3 + \lambda_4, \lambda_1 - \lambda_2 + 0\lambda_3 + \lambda_4) = (1,1,1,1) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 0\lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 0\lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 0\lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 0\lambda_3 + \lambda_4 = 1 \end{cases}$$

Ultimul sistem este un sistem liniar neomogen în necunoscutele $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$.
•sau calculăm $\det A = -4 \neq 0 \Rightarrow$ Se rezolvă cu regula lui Cramer.
•sau

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{l_1 \\ -l_1+l_2 \\ -2l_1+l_3 \\ -l_1+l_4}}{\overset{pas1}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{l_1 \\ l_2 \\ -l_2+l_3 \\ l_4}}{\overset{pas2}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_3+l_4}}{\overset{pas3}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Din rezolvarea sistemului obţinem coordonatele vectorului $\mathbf{v} = (1,1,1,1)$ în baza B.

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 0\lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\ -2\lambda_2 + 0\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_3 - \lambda_4 = -1 \\ -2\lambda_4 = -1 \end{cases} \uparrow\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{4} \\ \lambda_2 = \frac{1}{4} \\ \lambda_3 = \frac{1}{2} \\ \lambda_4 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Atunci $(1,1,1,1) = \frac{1}{4}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{v}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_3 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_4$.

Dacă am rezolvat punctul **a)** cu modul $2^{\bigcirc}$, înlocuiam $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1,1,1,1)$.

Exerciţiul 3. Să se arate că vectorii

$$B = \left(\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

formează o bază în $(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$. Să se determine coordonatele vectorului $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ în această bază.

Rezolvare. a) <u>modul 1:</u> B este bază în $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R}) \overset{\text{Caracterizarea 2}}{\Leftrightarrow}$

(i) $\underbrace{\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}_{C=(\mathbf{E}_{11},,\mathbf{E}_{12},\mathbf{E}_{21},\mathbf{E}_{22}) \text{ în } (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot,\mathbb{R}) \text{ are 4 vectori}} = 4 = \underbrace{\operatorname{card} B}_{B \text{ are 4 vectori}}$;

(ii) B este sistem liniar independent de vectori.

<u>mod ii)-1:</u> Direct, calculăm determinantul având pe coloane componentele cvadruplelor din B :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{dezv după linia 1}}{=}$$

$$= 1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= -4 \neq 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ sunt vectori liniar independenţi.

b) Fie $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dat. Căutăm $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ a.î.

$\lambda_1 \mathbf{A}_1 + \lambda_2 \mathbf{A}_2 + \lambda_3 \mathbf{A}_3 + \lambda_4 \mathbf{A}_4 = \mathbf{A} \Leftrightarrow$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 0\lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 0\lambda_3 + 2\lambda_4 = 1 \\ 2\lambda_1 + 0\lambda_2 - \lambda_3 + 2\lambda_4 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 0\lambda_4 = 1 \end{cases}$$

Ultimul sistem este un sistem liniar neomogen în necunoscutele $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$.
•sau calculăm $\det A = -4 \neq 0 \Rightarrow$ Se rezolvă cu regula lui Cramer.
•sau

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{|1|} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \overset{pas1}{\sim} \\ l_1 \\ -l_1 + l_2 \\ -2l_1 + l_3 \\ -l_1 + l_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{|-2|} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \overset{pas2}{\sim} \\ l_1 \\ l_2 \\ -l_2 + l_3 \\ l_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{|-1|} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \overset{pas3}{\sim} \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_3 + l_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Din rezolvarea sistemului obţinem coordonatele vectorului $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ în baza B.

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 0\lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\ -2\lambda_2 + 0\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_3 - \lambda_4 = -1 \\ -2\lambda_4 = -1 \end{cases} \uparrow\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{4} \\ \lambda_2 = \frac{1}{4} \\ \lambda_3 = \frac{1}{2} \\ \lambda_4 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Atunci $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\mathbf{A}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{A}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{A}_3 + \frac{1}{2}\mathbf{A}_4.$

Exerciţiul 5. Să se arate că vectorii.$(1,0,0), (1,2,0), (1,2,3)$ formează o bază în $\left(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R}\right)$. Să se determine coordonatele vectorului $(2,0,1)$ în această bază.
Rezolvare. Fie $B = (\mathbf{v}_1 = (1,0,0), \mathbf{v}_2 = (1,2,0), \mathbf{v}_3 = (1,2,3))$.
a) Se studiază dacă B este o bază în $\left(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R}\right)$.

<u>modul 1:</u> B este bază în $\left(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R}\right) \overset{\text{Caracterizarea 2}}{\Leftrightarrow}$
(i) $\underbrace{\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3}_{C=(\mathbf{e}_1=(1,0,0),\mathbf{e}_2=(0,1,0),\mathbf{e}_3=(0,0,1)) \text{ în } (\mathbb{R}^3,+,\cdot,\mathbb{R}) \text{ are 3 vectori}} = 3 = \underbrace{\operatorname{card} B}_{B \text{ are 3 vectori}}$;
(ii) B este sistem liniar independent de vectori.
<u>mod ii)-1:</u> Direct, calculăm determinantul având pe coloane componentele tripletelor din B :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \neq 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \text{ sunt vectori liniar independenţi.}$$

Deci B este o bază în $\left(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R}\right)$, alta decât cea canonică.

b) Fie $\mathbf{v} = (2, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ dat. Căutăm $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ a.î.

$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{v} \Leftrightarrow$

$\lambda_1 (1, 0, 0) + \lambda_2 (1, 2, 0) + \lambda_3 (1, 2, 3) = (2, 0, 1) \Leftrightarrow$

$(1\lambda_1 + 1\lambda_2 + 1\lambda_3, 0\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3, 0\lambda_1 + 0\lambda_2 + 3\lambda_3) = (2, 0, 1) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 1\lambda_1 + 1\lambda_2 + 1\lambda_3 = 2 \\ 0\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 0\lambda_1 + 0\lambda_2 + 3\lambda_3 = 1 \end{cases}$$

Ultimul sistem este un sistem liniar neomogen cu 3 ecuaţii şi 3 necunoscute $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

•sau calculăm $\det A = 6 \neq 0 \Rightarrow$ Se rezolvă cu regula lui Cramer.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 12; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

$\lambda_1 = \frac{12}{6} = 2; \lambda_2 = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}; \lambda_3 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

•sau

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{nu sunt necesari}}{\overset{pas1,2,3}{\sim}}$$

Din rezolvarea sistemului obţinem coordonatele vectorului $\mathbf{v} = (2, 0, 1)$ în baza B.

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_3 = 1 \end{cases} \uparrow\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = \frac{-1}{3} \\ \lambda_3 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Atunci $(2, 0, 1) = 2\mathbf{v}_1 + \frac{-1}{3}\mathbf{v}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{v}_3$.

Exerciţiul 6. Să se expliciteze subspaţiul soluţiilor următoarelor sisteme liniare omogene şi să se precizeze o bază în ele:

a) $\{x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$, subspaţiu în $(\mathbb{R}^4, +, \cdot, \mathbb{R})$;

Rezolvare. Sistemul este un sistem liniar omogen cu 1 ecuaţie şi cu 4 necunoscute x_1, x_2, x_3, x_4. Conform unui exerciţiu din seminarul precedent, mulţimea soluţiilor sistemului este un subspaţiu liniar în $\mathbb{R}^4$.

Se notează subspaţiul soluţiilor cu

$\mathbb{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4; \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4), x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ verifică sistemul}\}$.

$$\{x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \uparrow \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\alpha + \beta + \gamma \\ x_2 = \alpha \in \mathbb{R}\text{-nec. sec.} \\ x_3 = \beta \in \mathbb{R}\text{-nec. sec.} \\ x_4 = \gamma \in \mathbb{R}\text{-nec. sec.} \end{cases} \Rightarrow$$

$\mathbb{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4; \mathbf{x} = (-\alpha + \beta + \gamma, \alpha, \beta, \gamma), \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} =$

$= \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4; \mathbf{x} = \alpha(-1,1,0,0) + \beta(1,0,1,0) + \gamma(1,0,0,1), \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\} =$
$= [(\mathbf{v}_1 = (-1,1,0,0), \mathbf{v}_2 = (1,0,1,0), \mathbf{v}_3 = (1,0,0,1))]$

Mulţimea soluţiilor sistemului este subspaţiul liniar generat de $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, adică $\mathbb{V} = [S]$. Mai mult, din algoritm, $\mathbf{v}_1, , \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sunt vectori liniar independenţi. Atunci $B = S = (\mathbf{v}_1, , \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ este o bază în subspaţiul $\mathbb{V}$.

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V} = 3$.

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$, subspaţiu în $\left(\mathbb{R}^4, +, \cdot, \mathbb{R}\right)$;

Rezolvare. Sistemul este un sistem liniar omogen cu 2 ecuaţii şi cu 4 necunoscute x_1, x_2, x_3, x_4. Conform unui exerciţiu din seminarul precedent, mulţimea soluţiilor sistemului este un sbspaţiu liniar în $\mathbb{R}^4$. Se notează subspaţiul soluţiilor cu

$\mathbb{V} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4; \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4), x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ verifică sistemul}\right\}$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \overset{pas1}{\sim} \\ l_1 \\ l_2 - l_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ \quad -2x_2 \qquad\qquad = 0 \end{cases} \uparrow \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha + \beta \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \alpha \in \mathbb{R}\text{-nec. sec.} \\ x_4 = \beta \in \mathbb{R}\text{-nec. sec} \end{cases} \Rightarrow$$

$\mathbb{V} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4; \mathbf{x} = (\alpha + \beta, 0, \alpha, \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\} =$
$= \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4; \mathbf{x} = \alpha(1,0,1,0) + \beta(1,0,0,1), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\} =$
$= [(\mathbf{v}_1 = (1,0,1,0), \mathbf{v}_2 = (1,0,0,1))]$

Mulţimea soluţiilor sistemului este subspaţiul liniar generat de $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. Mai mult, din algoritm, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sunt vectori liniar independenţi. Atunci $B = (\mathbf{v}_1, , \mathbf{v}_2)$ este o bază în subspaţiul $\mathbb{V}$. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V} = 2$.

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$, subspaţiu în $\left(\mathbb{R}^4, +, \cdot, \mathbb{R}\right)$;

d) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$, subspaţiu în $\left(\mathbb{R}^4, +, \cdot, \mathbb{R}\right)$;

e) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$, subspaţiu în $\left(\mathbb{R}^4, +, \cdot, \mathbb{R}\right)$;

f) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$, subspaţiu în $\left(\mathbb{R}^5, +, \cdot, \mathbb{R}\right)$.

Exerciţiul 11$^{\bigcirc}$. Să se determine dimensiunile sumei şi intersecţiei subspaţiilor generate de sistemele de vectori

$S_1 = (\mathbf{u}_1 = (2,3,-1), \mathbf{u}_2 = (1,2,2), \mathbf{u}_3 = (1,1,-3))$ şi
$S_2 = (\mathbf{v}_1 = (1,2,1), \mathbf{v}_2 = (1,1,-1), \mathbf{v}_3 = (1,3,3))$.

Să se verifice teorema lui Grassmann.

Rezolvare. $\mathbb{X} = \mathbb{R}^3 . \mathbb{K} = \mathbb{R}$.

•Se determină $[S_1]$.

<u>modul 1.(detaliat, cu definiţia)</u>

$[S_1] = \left\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3; \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ a.î. } \mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3\right\}$.

Se caută $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ a.î. să existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ cu proprietatea
$(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 (2, 3, -1) + \lambda_2 (1, 2, 2) + \lambda (1, 1, -3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = x_1 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = x_2 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 - 3\lambda_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 1 & 1 & x_1 \\ 3 & 2 & 1 & x_2 \\ -1 & 2 & -3 & x_3 \end{array}\right) \overset{pas1}{\sim} \begin{array}{c} l_1 \\ -3l_1 + 2l_2 \\ l_1 + 2l_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -3x_1 + 2x_2 \\ 0 & 5 & -5 & x_1 + 2x_3 \end{array}\right) \overset{pas2}{\sim} \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \\ -5l_2 + l_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & -3x_1 + 2x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 16x_1 - 10x_2 + 2x_3 \end{array}\right)$$

Sistemul liniar neomogen în necunoscutele $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ este compatibil $\Leftrightarrow$ parametrii x_1, x_2, x_3 verifică $\{16x_1 - 10x_2 + 2x_3 = 0$. Atunci

$[S_1] = \{\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 16x_1 - 10x_2 + 2x_3 = 0\}$.

$$\{16x_1 - 10x_2 + 2x_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{8}(5\alpha - \beta) \\ x_2 = \alpha \in \mathbb{R} \\ x_3 = \beta \in \mathbb{R}. \end{cases} .$$

$$[S_1] = \left\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3; \mathbf{u} = \left(\tfrac{1}{8}(5\alpha - \beta), \alpha, \beta\right), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3; \mathbf{u} = \alpha \underbrace{\left(\frac{5}{8}, 1, 0\right)}_{\mathbf{w}_1} + \beta \underbrace{\left(\frac{-1}{8}, 0, 1\right)}_{\mathbf{w}_2}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = [(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)] .$$

Din algoritm$\Longrightarrow$ $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ este un sistem de vectori liniar independent.

În consecinţă $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ este o bază în $[S_1] \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} [S_1] = 2$.

<u>modul 2.</u>

$[S_1] = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3; \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ a.î. } \mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3\}$.

Se studiază dacă sistemul de vectori S_1 este liniar independent sau dependent.

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow S_1$ este sistem liniar dependent de vectori (între $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ există o relaţie de dependenţă liniară). Cum $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ sunt vectori liniar independenţi $\Rightarrow$ se poate alege $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ drept bază în $[S_1]$.

$\dim_{\mathbb{R}} [S_1] = 2$.

•Se determină $[S_2]$.

<u>modul 1.(detaliat, cu definiţia)</u>

$[S_2] = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3; \exists (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ a.î. } \mathbf{v} = \mu_1\mathbf{v}_1 + \mu_2\mathbf{v}_2 + \mu_3\mathbf{v}_3\}$.

Se caută $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ a.î. să existe μ_1, μ_2, μ_3 cu proprietatea
$(y_1, y_2, y_3) = \mu_1 (1, 2, 1) + \mu_2 (1, 1, -1) + \mu (1, 3, 3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = y_1 \\ 2\mu_1 + \mu_2 + 3\mu_3 = y_2 \\ \mu_1 - \mu_2 + 3\mu_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & y_1 \\ 2 & 1 & 3 & y_2 \\ 1 & -1 & 3 & y_3 \end{array}\right) \underset{\substack{l_1 \\ -2l_1+l_2 \\ -l_1+l_3}}{\overset{pas1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & -2y_1+y_2 \\ 0 & -2 & 2 & -y_1+y_3 \end{array}\right) \underset{\substack{l_1 \\ l_2 \\ -2l_2+l_3}}{\overset{pas2}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & -1 & 1 & -2y_1+y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 3y_1-2y_2+y_3 \end{array}\right)$$

Sistemul liniar neomogen în necunoscutele μ_1, μ_2, μ_3 este compatibil $\Leftrightarrow$ parametrii y_1, y_2, y_3 verifică $\{3y_1 - 2y_2 + y_3 = 0$. Atunci

$[S_2] = \left\{\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3; 3y_1 - 2y_2 + y_3 = 0\right\}$.

$$\{3y_1 - 2y_2 + y_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{1}{3}(2\gamma - \delta) \\ y_2 = \gamma \in \mathbb{R} \\ y_3 = \delta \in \mathbb{R}. \end{cases}.$$

$[S_2] = \left\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3; \mathbf{v} = \left(\frac{1}{3}(2\gamma - \delta), \gamma, \delta\right), \gamma, \delta \in \mathbb{R}\right\}$

$$= \left\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3; \mathbf{v} = \gamma \underbrace{\left(\frac{2}{3}, 1, 0\right)}_{\mathbf{w}_3} + \delta \underbrace{\left(\frac{-1}{3}, 0, 1\right)}_{\mathbf{w}_4}, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\right\} = [(\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)].$$

Din algoritm$\Longrightarrow$ $(\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ este un sistem de vectori liniar independent.

În consecinţă $(\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ este o bază în $[S_2] \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} [S_2] = 2$.

<u>modul 2.</u> $[S_2] = \left\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3; \exists (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ a.î. } \mathbf{v} = \mu_1 \mathbf{v}_1 + \mu_2 \mathbf{v}_2 + \mu_3 \mathbf{v}_3\right\}$.

Se studiază dacă sistemul de vectori S_2 este liniar independent sau dependent.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow S_2$ este sistem liniar dependent de vectori (între $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ există o relaţie de dependenţă liniară). Cum $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ sunt vectori liniar independenţi $\Rightarrow$ se poate alege $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ drept bază în $[S_2]$.

$\dim_{\mathbb{R}} [S_2] = 2$.

•Se determină $[S_1] + [S_2]$.

$[S_1] + [S_2] = \left\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3; \exists \mathbf{u} \in [S_1] \text{ şi } \exists \mathbf{v} \in [S_2] \text{ a.î. } \mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}\right\}$.

••Cum $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ este o bază în $[S_1] \Rightarrow \exists^* (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ a.î. $\mathbf{u} = \alpha \mathbf{w}_1 + \beta \mathbf{w}_2$.

Cum $(\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ este o bază în $[S_2] \Rightarrow \exists^* (\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ a.î. $\mathbf{v} = \gamma \mathbf{w}_3 + \delta \mathbf{w}_4$.

Deci $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ generează $[S_1] + [S_2]$.

$[S_1] + [S_2] \subseteq \mathbb{R}^3 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} ([S_1] + [S_2]) \leq 3$.

Cum

$\text{rang} \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{-1}{8} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \left(\begin{vmatrix} \frac{5}{8} & \frac{-1}{8} & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{24} \neq 0 \right) \Rightarrow (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ este sistem liniar dependent de vectori. Dar $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ sunt vectori liniar independenţi $\Rightarrow$ putem alege $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ drept bază în $[S_1] + [S_2] = \mathbb{R}^3$.

$\dim_{\mathbb{R}} ([S_1] + [S_2]) = 3$.

sau

••Cum $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ este o bază în $[S_1] \Rightarrow \exists^* \left(\alpha', \beta'\right) \in \mathbb{R}^2$ a.î. $\mathbf{u} = \alpha' \mathbf{u}_1 + \beta' \mathbf{u}_2$.

Cum $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ este o bază în $[S_2] \Rightarrow \exists^* \left(\gamma', \delta'\right) \in \mathbb{R}^2$ a.î. $\mathbf{v} = \gamma' \mathbf{v}_1 + \delta' \mathbf{v}_2$.

Deci $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ generează $[S_1] + [S_2]$.

$[S_1]+[S_2]\subseteq\mathbb{R}^3\Rightarrow\dim_{\mathbb{R}}([S_1]+[S_2])\leq 3.$

Cum

rang $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 1 & -1\end{pmatrix}=3\left(\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0\right)\Rightarrow(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ este sistem liniar dependent de vectori. Dar $(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{v}_1)$ sunt vectori liniar independenţi $\Rightarrow$ se poate alege $(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{v}_1)$ drept bază în $[S_1]+[S_2]=\mathbb{R}^3$.

$\dim_{\mathbb{R}}([S_1]+[S_2])=3.$

•Determinăm $[S_1]\cap[S_2]$.

$[S_1]\cap[S_2]=\left\{\widetilde{\mathbf{w}}\in\mathbb{R}^3;\widetilde{\mathbf{w}}\in[S_1]\text{ şi }\exists\widetilde{\mathbf{w}}\in[S_2]\right\}.$

••Cum $(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2)$ este o bază în $[S_1]\Rightarrow\exists^*\left(\alpha'',\beta''\right)\in\mathbb{R}^2$ a.î. $\widetilde{\mathbf{w}}=\alpha''\mathbf{w}_1+\beta''\mathbf{w}_2$.

Cum $(\mathbf{w}_3,\mathbf{w}_4)$ este o bază în $[S_2]\Rightarrow\exists^*\left(\gamma'',\delta''\right)\in\mathbb{R}^2$ a.î. $\widetilde{\mathbf{w}}=\gamma''\mathbf{w}_3+\delta''\mathbf{w}_4$.

$\alpha''\mathbf{w}_1+\beta''\mathbf{w}_2=\gamma''\mathbf{w}_3+\delta''\mathbf{w}_4\Leftrightarrow$

$\alpha''\left(\frac{5}{8},1,0\right)+\beta''\left(\frac{-1}{8},0,1\right)-\gamma''\left(\frac{2}{3},1,0\right)-\delta''\left(\frac{-1}{3},0,1\right)=(0,0,0)\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\frac{5}{8}\alpha''+\frac{-1}{8}\beta''-\frac{2}{3}\gamma''-\frac{-1}{3}\delta''=0\\ 1\alpha''+0\beta''-1\gamma''-0\delta''=0\\ 0\alpha''+1\beta''-0\gamma''-1\delta''=0\end{cases}$$

Cum

rang $\begin{pmatrix}\frac{5}{8} & \frac{-1}{8} & -\frac{2}{3} & -\frac{-1}{3}\\ 1 & 0 & -1 & -0\\ 0 & 1 & -0 & -1\end{pmatrix}=3\left(\begin{vmatrix}\frac{5}{8} & \frac{-1}{8} & -\frac{2}{3}\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -0\end{vmatrix}=-\frac{1}{24}\neq 0\right)\Rightarrow$sistemul liniar omogen în necunoscutele $\alpha'',\beta'',\gamma'',\delta''$ este compatibil simplu nedeterminat$\Rightarrow$

$$\begin{cases}\alpha''=5\lambda\\ \beta''=\lambda\\ \gamma''=5\lambda\\ \delta''=\lambda\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Deci

$$[S_1]\cap[S_2]=\left\{\widetilde{\mathbf{w}}\in\mathbb{R}^3;\widetilde{\mathbf{w}}=5\lambda\left(\tfrac{5}{8},1,0\right)+\lambda\left(\tfrac{-1}{8},0,1\right),\lambda\in\mathbb{R}\right\}$$
$$=\left\{\widetilde{\mathbf{w}}\in\mathbb{R}^3;\widetilde{\mathbf{w}}=\lambda\underbrace{(3,5,1)}_{\mathbf{w}_5},\lambda\in\mathbb{R}\right\}=[(\mathbf{w}_5)].$$

Dar $(\mathbf{w}_5)$ este sistem vectori liniar independenţi (deoarece $\mathbf{w}_5\neq\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}^3}$) $\Rightarrow$ se poate alege $(\mathbf{w}_5)$ drept bază în $[S_1]\cap[S_2]$.

$\dim_{\mathbb{R}}([S_1]\cap[S_2])=1.$

sau

••Cum $(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)$ este o bază în $[S_1]\Rightarrow\exists^*\left(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\right)\in\mathbb{R}^2$ a.î. $\widetilde{\mathbf{w}}=\widetilde{\alpha}\mathbf{w}_1+\widetilde{\beta}\mathbf{w}_2$.

Cum $(\mathbf{w}_3,\mathbf{w}_4)$ este o bază în $[S_2]\Rightarrow\exists^*\left(\widetilde{\gamma},\delta''\right)\in\mathbb{R}^2$ a.î. $\widetilde{\mathbf{w}}=\widetilde{\gamma}\mathbf{w}_3+\widetilde{\delta}\mathbf{w}_4$.

$\widetilde{\alpha}\mathbf{w}_1+\widetilde{\beta}\mathbf{w}_2=\widetilde{\gamma}\mathbf{w}_3+\widetilde{\delta}\mathbf{w}_4\Leftrightarrow$

$\widetilde{\alpha}(2,3,-1)+\widetilde{\beta}(1,2,2)-\widetilde{\gamma}(1,2,1)-\widetilde{\delta}(1,1,-1)=(0,0,0)\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}2\widetilde{\alpha}+1\widetilde{\beta}-1\widetilde{\gamma}-1\widetilde{\delta}=0\\ 3\widetilde{\alpha}+2\widetilde{\beta}-2\widetilde{\gamma}-1\widetilde{\delta}=0\\ -1\widetilde{\alpha}+2\widetilde{\beta}-1\widetilde{\gamma}-(-1)\widetilde{\delta}=0\end{cases}$$

Cum

rang $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1\\ 3 & 2 & -2 & -1\\ -1 & 2 & -1 & -(-1)\end{pmatrix}=3\left(\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1\\ 3 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0\right)\Rightarrow$sistemul liniar omogen în necunoscutele $\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma},\widetilde{\delta}$ este compatibil simplu nedeterminat$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \widetilde{\alpha}=\widetilde{\lambda} \\ \widetilde{\beta}=\widetilde{\lambda} \\ \widetilde{\gamma}=2\widetilde{\lambda} \\ \widetilde{\delta}=\widetilde{\lambda}\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Deci

$$[S_1]\cap[S_2]=\left\{\widetilde{\mathbf{w}}\in\mathbb{R}^3;\widetilde{\mathbf{w}}=\widetilde{\lambda}\,(2,3,-1)+\widetilde{\lambda}\,(1,2,2)\,,\widetilde{\lambda}\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\{\widetilde{\mathbf{w}}\in\mathbb{R}^3;\widetilde{\mathbf{w}}=\widetilde{\lambda}\underbrace{(3,5,1)}_{\mathbf{w}_5},\widetilde{\lambda}\in\mathbb{R}\right\}=[(\mathbf{w}_5)]\,.$$

Dar $(\mathbf{w}_5)$ este sistem vectori liniar independenţi (deoarece $\mathbf{w}_5\neq\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}^3}$) $\Rightarrow$ se poate alege $(\mathbf{w}_5)$ drept bază în $[S_1]\cap[S_2]$.

$\dim_{\mathbb{R}}([S_1]\cap[S_2])=1$.

2.6. Schimbarea coordonatelor unui vector la o schimbare de baze într-un spaţiu liniar (vectorial)

Definiţie: Fie $(\mathbb{X},+,\cdot\mathbb{K})$ este un $\mathbb{K}$-spaţiu liniar cu $\dim_{\mathbb{K}}\mathbb{X}=n$ şi $B_1=(\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n)$ şi $B_2=(\mathbf{v}'_1,...,\mathbf{v}'_n)$ două baze în $\mathbb{X}$. Se arată că $\exists^* A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a.î.

$$\begin{pmatrix}\mathbf{v}'_1\\ ...\\ \mathbf{v}'_n\end{pmatrix}=A^T\begin{pmatrix}\mathbf{v}_1\\ ...\\ \mathbf{v}_n\end{pmatrix}.$$

Mai mult, fie $\forall\mathbf{u}\in\mathbb{X}$. Atunci

$\exists^*(\alpha_1,...,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n$ a.î. $\mathbf{u}=\alpha_1\mathbf{v}_1+...+\alpha_n\mathbf{v}_n$ şi

$\exists^*(\beta_1,...,\beta_n)\in\mathbb{K}^n$ a.î. $\mathbf{u}=\beta_1\mathbf{v}'_1+...+\beta_n\mathbf{v}'_n$.

Atunci $\begin{pmatrix}\beta_1\\ ...\\ \beta_n\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ ...\\ \alpha_n\end{pmatrix}$.

a) Matricea A se numeşte *matrice de trecere* de la baza B_1 la baza B_2 sau *matrice de schimbare de baze* şi o se notează $A={}_{B_1}A_{B_2}$.

b) Se spune că bazele B_1 şi B_2 sunt *la fel orientate* dacă $\det A>0$ şi *contrar orientate* dacă $\det A<0$.

Exerciţiul 8. **a)** Să se determine coordonatele vectorului $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$ în baza canonică dacă în baza $B'=(\mathbf{e}'_1=(1,1,1)\,,\mathbf{e}'_2=(1,1,0)\,,\mathbf{e}'_3=(1,0,0))$ are coordonatele $1,2,3$.

b) Să se determine coordonatele vectorului $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^3$ în baza B' dacă în baza $B''=(\mathbf{e}''_1=(1,-1,1)\,,\mathbf{e}''_2=(3,2,1)\,,\mathbf{e}''_3=(0,1,0))$ are coordonatele $3,1,4$.

c) Să se stabilească dacă bazele B' şi B'' sunt la fel sau contrar orientate.

Rezolvare. Fie $C=(\mathbf{e}_1=(1,0,0)\,,\mathbf{e}_2=(0,1,0)\,,\mathbf{e}_3=(0,0,1))$ baza canonică în $\left(\mathbb{R}^3,+,\cdot,\mathbb{R}\right)$.

a) Se dau $\alpha_1=1,\alpha_2=2,\alpha_3=3$ coordonatele vectorului $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$ în baza B', adică $\mathbf{x}=1\cdot\mathbf{e}'_1+2\cdot\mathbf{e}'_2+3\cdot\mathbf{e}'_3$. Se cer β_1,β_2,β_3 coordonatele vectorului $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$ în baza C, adică $\mathbf{x}=\beta_1\cdot\mathbf{e}_1+\beta_2\cdot\mathbf{e}_2+\beta_3\cdot\mathbf{e}_3$.

<u>mod direct</u> $\mathbf{x}=1\cdot\mathbf{e}'_1+2\cdot\mathbf{e}'_2+3\cdot\mathbf{e}'_3=1\cdot(1,1,1)+2\cdot(1,1,0)+3\cdot(1,0,0)=$

$(6,3,1)=6\,(1,0,0)+3\,(0,1,0)+1\,(0,0,1)=6\cdot\mathbf{e}_1+3\cdot\mathbf{e}_2+1\cdot\mathbf{e}_3$.

<u>mod detaliat</u> (cu explicaţii legate de determinarea matricei de trecere de la baza canonică la o altă bază)

Conform formulelor de schimbare a coordonatelor unui vector la o schimbare de baze, se obţine

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = ({}_{B'}A_C)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Se determină ${}_{B'}A_C$. Se exprimă vectorii din baza C în funcţie de baza B', şi determinăm matricea de trecere de la B' la C scriind pe coloane coeficienţii de pe linie ai vectorilor $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$.

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_1 = 0\mathbf{e}'_1 + 0\mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}_2 = 0\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2 - \mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}'_1 - \mathbf{e}'_2 + 0\mathbf{e}'_3 \end{cases}$$

$${}_{C}A_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow {}_{B'}A_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se observă că $({}_{B'}A_C)^{-1} = {}_C A_{B'}$. În general, se poate arăta că

$$\boxed{({}_{B_1}A_{B_2})^{-1} = {}_{B_2} A_{B_1}.}$$

Atunci

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = ({}_{B'}A_C)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = {}_C A_{B'} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

adică $\mathbf{x} = 6 \cdot \mathbf{e}_1 + 3 \cdot \mathbf{e}_2 + 1 \cdot \mathbf{e}_3$.

b) Se dau $\gamma_1 = 3, \gamma_2 = 1, \gamma_3 = 4$ coordonatele vectorului $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ în baza B'', adică $\mathbf{y} = 3 \cdot \mathbf{e}''_1 + 1 \cdot \mathbf{e}''_2 + 4 \cdot \mathbf{e}''_3$. Se cer $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ coordonatele vectorului $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ în baza B', adică $\mathbf{y} = \delta_1 \cdot \mathbf{e}'_1 + \delta_2 \cdot \mathbf{e}'_2 + \delta_3 \cdot \mathbf{e}'_3$.

Conform formulelor de schimbare a coordonatelor unui vector la o schimbare de baze, obţinem

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} = ({}_{B''}A_{B'})^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \overset{\text{punctul a)}}{=} {}_{B'} A_{B''} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Se determină ${}_{B'}\mathbf{A}_{B''}$.

<u>mod detaliat</u> (cu explicaţii legate de determinarea matricei de trecere de la o bază la alta, prin intermediul matricei de trecere de la baza canonică la o altă bază) Se exprimă vectorii din baza B'' în funcţie de baza B', şi se determină matricea de trecere de la B' la B'' scriind pe coloane coeficienţii de pe linie ai vectorilor $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$.

$$\begin{cases} \mathbf{e}''_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \overset{\text{punctul a)}}{=} \mathbf{e}'_3 - (\mathbf{e}'_2 - \mathbf{e}'_3) + (\mathbf{e}'_1 - \mathbf{e}'_2) = \mathbf{e}'_1 - 2\mathbf{e}'_2 + 2\mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}''_2 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \overset{\text{punctul a)}}{=} 3\mathbf{e}'_3 + 2(\mathbf{e}'_2 - \mathbf{e}'_3) + (\mathbf{e}'_1 - \mathbf{e}'_2) = \mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}''_3 = \mathbf{e}_2 \overset{\text{punctul a)}}{=} \mathbf{e}'_2 - \mathbf{e}'_3 = 0\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2 - \mathbf{e}'_3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$${}_{C}A_{B''} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, {}_{B'} A_C \overset{\text{punctul a)}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, {}_{B'} A_{B''} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se observă că ${}_{B'}A_{B''} = {}_{B'} A_C \cdot {}_C A_{B''}$. În general se poate arăta că

$$\boxed{{}_{B_1}A_{B_2} = {}_{B_1} A_B \cdot {}_B A_{B_2}.}$$

<u>mod direct</u> (cu explicaţii legate de determinarea în mod direct a matricei de trecere de la o bază la alta) Conform formulelor, se putea căuta direct matricea de trecere de la B' la B'', căutând ${}_{B'}A_{B''} = (a_{ij})$ astfel încât

$$\begin{cases} \mathbf{e}''_1 = a_{11}\mathbf{e}'_1 + a_{21}\mathbf{e}'_2 + a_{31}\mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}''_2 = a_{12}\mathbf{e}'_1 + a_{22}\mathbf{e}'_2 + a_{32}\mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}''_3 = a_{13}\mathbf{e}'_1 + a_{23}\mathbf{e}'_2 + a_{33}\mathbf{e}'_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1,-1,1) = a_{11}(1,1,1) + a_{21}(1,1,0) + a_{31}(1,0,0) \\ (3,2,1) = a_{12}(1,1,1) + a_{22}(1,1,0) + a_{32}(1,0,0) \\ (0,1,0) = a_{13}(1,1,1) + a_{23}(1,1,0) + a_{33}(1,0,0) \end{cases}$$

Sistemul anterior este echivalent cu 3 sisteme liniare neomogene (sistemul 1 cu necunoscutele a_{11}, a_{21}, a_{31}, sistemul 2 cu necunoscutele a_{12}, a_{22}, a_{32},sistemul 3 cu necunoscutele a_{13}, a_{23}, a_{33}), sisteme cu aceeaşi coeficienţi, provenind din componentele vectorilor $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$, cu termeni liberi diferiţi, ce provin respectiv din componentele vectorilor $\mathbf{e}_1'', \mathbf{e}_2'', \mathbf{e}_3''$. Se rezolvă simultan.

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} \underbrace{\begin{matrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}}_{\mathbf{e}_1' \ \ \mathbf{e}_2' \ \ \mathbf{e}_3'} & \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}}_{\mathbf{e}_1''} & \underbrace{\begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}}_{\mathbf{e}_2''} & \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}}_{\mathbf{e}_3''} \end{array}\right) \underset{\substack{l_1 \\ l_2 - l_1 \\ l_3 - l_1}}{\overset{pas1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{l_1 \\ l_3 \\ l_2}}{\overset{\substack{pas \\ intermediar}}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{nu e necesar}}{\overset{pas2}{\sim}} \underset{\substack{l_1 + l_3 \\ l_2 - l_3 \\ l_3}}{\overset{pas1'}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{l_1 + l_2 \\ l_2 \\ l_3}}{\overset{pas2'}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{l_1 \\ -l_2 \\ -l_3}}{\overset{\text{pas final}}{\sim}} \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_3} & \underbrace{\begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{array}}_{{}_{B'}A_{B''}} \end{array}\right)$$

Se găsesc soluţiile celor 3 sisteme

$$\begin{cases} a_{11} = 1 \\ a_{21} = -2 \\ a_{31} = 2 \end{cases}, \begin{cases} a_{12} = 1 \\ a_{22} = 1 \\ a_{32} = 1 \end{cases}, \begin{cases} a_{13} = 0 \\ a_{23} = 1 \\ a_{33} = -1 \end{cases}$$

adică ${}_{B'}A_{B''} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Atunci, conform formulelor de schimbare a coordonatelor unui vector la o schimbare de baze, se obţine

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

adică $\mathbf{y} = 4 \cdot \mathbf{e}_1' - 1 \cdot \mathbf{e}_2' + 3 \cdot \mathbf{e}_3'$.

c) $\det({}_{C}A_{B'}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \Rightarrow$ bazele C şi B' sunt contrar orientate.

$\det({}_{C}A_{B''}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 > 0 \Rightarrow$ bazele C şi B'' sunt la fel orientate.

$\det({}_{B'}A_{B''}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 < 0 \Rightarrow$ bazele B' şi B'' sunt contrar orientate.

2.7. Completarea unui sistem de vectori până la o bază într-un spaţiu liniar

Teoremă: Fie $(\mathbb{X}, +, \cdot\mathbb{K})$ este un $\mathbb{K}$-spaţiu liniar cu $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{X} = n$. Oricare ar fi sistemul de $p \leq n$

vectori liniar independenţi $(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_p) \subseteq \mathbb{X}$, există un sistem de $q = n - p$ vectori, $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_q) \subseteq \mathbb{X}$ astfel încât $(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_p, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_q)$ să fie bază în $\mathbb{X}$.

Exerciţiul 10. Să se completeze următoarele sisteme de vectori la o bază în spaţiile liniare specificate

b) $S = (\mathbf{v}_1 = (2, -1, 3), \mathbf{v}_2 = (4, 1, 1))$ în $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$;

Rezolvare. Se arată că $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ este sistem liniar indepenent în $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$.

$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow ... \Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$ e unica soluţie în $\mathbb{R}^2$.

<u>modul 1:</u> Se ştie că $C = (\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1))$ este baza canonică în $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$ cu $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$. A completa S pană la o bază în $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$, care să conţină S, revine la a determina $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, adică $\mathbf{v}_3$, astfel încât B să fie sistem liniar independent.

Se încearcă dacă $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1)$ este sistem liniar independent.

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_1 = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow ... \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow$$

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$ e unica soluţie în $\mathbb{R}^3$.

Atunci $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1)$ este sistem liniar independent în $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$ cu $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow B$ e bază în $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$ ce conţine S.

<u>modul 2:</u> Deoarece $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$ admite baza canonică

$C = (\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1))$

se poate completa cu vectori din această bază sistemul S. Pentru aceasta se construieşte matricea

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

şi prin transformări elementare se formează primele 2 din coloanele matricei unitate

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -10 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 10 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 6 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 10 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{-4}{6} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 10 & 1 \end{array}\right)$$

deci completarea se poate face cu vectorul $\mathbf{e}_3$. O bază în $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$ ce conţine vectorii $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ va fi

$B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_3)$.

Se observă ca există mai multe baze în $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$ ce conţin vectorii $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$.

c) $S = (\mathbf{v}_1 = t, \mathbf{v}_2 = t^2 + 4)$ în $(\mathbb{R}_3[t], +, \cdot, \mathbb{R})$;

Rezolvare. Se arată că $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ este sistem liniar indepenent în $(\mathbb{R}_3[t], +, \cdot, \mathbb{R})$.

$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}_3[t]} \Rightarrow ... \Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$ e unica soluţie în $\mathbb{R}^2$.

<u>modul 1:</u> Se ştie că $C = \left(\mathbf{e}_1 = 1, \mathbf{e}_2 = t, \mathbf{e}_3 = t^2, \mathbf{e}_4 = t^3\right)$ este baza canonică în $(\mathbb{R}_3[t], +, \cdot, \mathbb{R})$ cu $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_3[t] = 4$. A completa S pană la o bază în $(\mathbb{R}_3[t], +, \cdot, \mathbb{R})$, care să conţină S, revine la a determina $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$, adică $\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$, astfel încât B să fie sistem liniar independent.

•Se încearcă dacă $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ este sistem liniar independent. Răspuns - nu, deoarece $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_2$.

•Se încearcă dacă $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ este sistem liniar independent. Răspuns - nu, deoarece $\mathbf{v}_2 = 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$.

•Se încearcă dacă $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4)$ este sistem liniar independent.

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{e}_1 + \lambda_4\mathbf{e}_4 = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow ... \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (0, 0, 0, 0)$ e unica soluţie în $\mathbb{R}^4$.

Atunci $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4)$ este sistem liniar independent în $\left(\mathbb{R}^4, +, \cdot, \mathbb{R}\right)$ cu $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 = 4 \Rightarrow B$ e bază în $\left(\mathbb{R}^4, +, \cdot, \mathbb{R}\right)$ ce conţine S.

<u>modul 2:</u> Deoarece $(\mathbb{R}_3[t], +, \cdot, \mathbb{R})$ admite baza canonică

$C = \left(\mathbf{e}_1 = 1, \mathbf{e}_2 = t, \mathbf{e}_3 = t^2, \mathbf{e}_4 = t^3\right)$

se poate completa cu vectori din această bază sistemul S. Pentru aceasta se construieşte matricea

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

şi prin transformări elementare se formează primele 2 din coloanele matricei unitate

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

deci completarea se poate face cu vectorii $\mathbf{e}_2$ şi $\mathbf{e}_4$. O bază în $(\mathbb{R}_3[t], +, \cdot, \mathbb{R})$ ce conţine vectorii $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ va fi

$B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4)$.

Se observă ca există mai multe baze în $(\mathbb{R}_3[t], +, \cdot, \mathbb{R})$ ce conţin vectorii $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$.

e) $S = (\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1, 1), \mathbf{v}_2 = (1, 1, 1, -1))$ în $\left(\mathbb{R}^4, +, \cdot, \mathbb{R}\right)$.

Rezolvare. Se arată că $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ este sistem liniar indepenent în $\left(\mathbb{R}^4, +, \cdot, \mathbb{R}\right)$.

$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow ... \Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$ e unica soluţie în $\mathbb{R}^2$.

<u>modul 2:</u> Deoarece $\left(\mathbb{R}^4, +, \cdot, \mathbb{R}\right)$ admite baza canonică

$C = (\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 0), \mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 1))$,

se poate completa cu vectori din această bază sistemul S. Pentru aceasta se construieşte matricea

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

şi prin transformări elementare se formează primele 2 din coloanele matricei unitate

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

deci completarea se poate face cu vectorii $\mathbf{e}_3$ şi $\mathbf{e}_4$. O bază în $\left(\mathbb{R}^4, +, \cdot, \mathbb{R}\right)$ ce conţine vectorii $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ va fi

$$B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4).$$