SEMINAR NR. 6, REZOLVĂRI
Algebră liniară şi Geometrie analitică

3. FUNCŢII LINIARE
3.1. Definiţii. Exemple

Definiţie. Fie $(\mathbb{X},+,\cdot,\mathbb{K})$ şi $(\mathbb{Y},+,\cdot,\mathbb{K})$ două $\mathbb{K}$-spaţii liniare. Funcţia $T:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ este *funcţie liniară* (sau *aplicaţie liniară* sau *transformare liniară* sau *operator liniar* sau *morfism de spaţii liniare*) dacă:

(i) $\forall(\mathbf{x},\widetilde{\mathbf{x}})\in\mathbb{X}^2 : T(\mathbf{x}+\widetilde{\mathbf{x}})=T(\mathbf{x})+T(\widetilde{\mathbf{x}})$.

(ii) $\forall(\alpha,\mathbf{x})\in\mathbb{K}\times\mathbb{X}, T(\alpha\mathbf{x})=\alpha T(\mathbf{x})$.

Se notează $\mathcal{L}(\mathbb{X};\mathbb{Y})=\{T;T:\mathbb{X}\to\mathbb{Y},\ T \text{ e aplicaţie liniară}\}$ şi
$\mathcal{L}(\mathbb{X})=\{T;T:\mathbb{X}\to\mathbb{X},\ T \text{ e aplicaţie liniară}\}$.

Teoremă. $(\mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y}),+,\cdot,\mathbb{K})$ este un $\mathbb{K}$-spaţiu liniar.

Caracterizare. $T\in\mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})\Leftrightarrow\forall(\alpha,\mathbf{x},\widetilde{\mathbf{x}})\in\mathbb{K}\times\mathbb{X}^2 : T(\alpha\mathbf{x}+\widetilde{\mathbf{x}})=\alpha T(\mathbf{x})+T(\widetilde{\mathbf{x}})$.

Observaţie. $T\in\mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})\Rightarrow T(\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{X}})=\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{Y}}$.
Dacă $T(\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{X}})\neq\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{Y}}$, atunci T nu este aplicaţie liniară. Într-adevăr,
$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3,\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3):T(\mathbf{x})=(2x_1+x_2+1,4x_3)$
are proprietatea că
$T(\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}^3})=T((0,0,0))=(1,0)\neq(0,0)=\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}^2}$.
Se poate demonstra că T nu verifică axiomele din definiţia transformării liniare.

Definiţie. Fie $(\mathbb{X},+,\cdot,\mathbb{K})$ şi $(\mathbb{Y},+,\cdot,\mathbb{K})$ două $\mathbb{K}$-spaţii liniare.
a) Funcţia $T:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ este *monomorfism*, *epimorfism*, *izomorfism* dacă este transformare liniară şi, în plus, este respectiv funcţie injectivă, surjectivă, bijectivă.
b) Funcţia $T:\mathbb{X}\to\mathbb{X}$ este *endomorfism* dacă este transformare liniară şi că este *automorfism* dacă este transformare liniară şi bijectivă.

Definiţie. $\mathbb{K}$-spaţiile liniare $(\mathbb{X},+,\cdot,\mathbb{K})$ şi $(\mathbb{Y},+,\cdot,\mathbb{K})$ se numesc *spaţii liniare izomorfe* dacă există un izomorfism $T\in\mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$. Se notează $\mathbb{X}\simeq\mathbb{Y}$.

Observaţie. a) Fie $(\mathbb{X},+,\cdot,\mathbb{R})$ şi $(\mathbb{Y},+,\cdot,\mathbb{R})$ spaţii liniare. $\mathbb{X}\simeq\mathbb{Y}\Leftrightarrow\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{X}=\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{Y}$.
b) Fie $(\mathbb{X},+,\cdot,\mathbb{R})$ spaţiu liniar cu $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{X}=n$. Atunci $\mathbb{X}\simeq\mathbb{R}^n$.
c) Fie $(\mathbb{X},+,\cdot,\mathbb{R})$ spaţiu liniar cu $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{X}=n$ şi $(\mathbb{Y},+,\cdot,\mathbb{R})$ spaţiu liniar cu $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{Y}=m$. Atunci $\mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})\simeq\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.
https://www.3blue1brown.com/essence-of-linear-algebra-page
https://www.youtube.com/watch?v=IrggOvOSZr4&t=365s

Exerciţiul 1. **h)** Fie spaţiile liniare $(\mathbb{R}^3,+,\cdot,\mathbb{R})$ şi $(\mathbb{R}^2,+,\cdot,\mathbb{R})$ şi funcţia
$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ \forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3,\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3):T(\mathbf{x})=(2x_1+x_2,4x_3)$
Să se studieze dacă T este aplicaţie liniară.

Rezolvare. Se verifică axiomele:
(i) $\forall(\mathbf{x},\widetilde{\mathbf{x}})\in(\mathbb{R}^3)^2 : T(\mathbf{x}+\widetilde{\mathbf{x}})=T(\mathbf{x})+T(\widetilde{\mathbf{x}})$.
Fie $\forall(\mathbf{x},\widetilde{\mathbf{x}})\in(\mathbb{R}^3)^2\Rightarrow$
$$T(\mathbf{x}+\widetilde{\mathbf{x}})=T((x_1,x_2,x_3)+(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\widetilde{x}_3))=T((x_1+\widetilde{x}_1,x_2+\widetilde{x}_2,x_3+\widetilde{x}_3))=$$
$$=(2(x_1+\widetilde{x}_1)+(x_2+\widetilde{x}_2),4(x_3+\widetilde{x}_3))=M_1.$$
$$T(\mathbf{x})+T(\widetilde{\mathbf{x}})=T((x_1,x_2,x_3))+T((\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\widetilde{x}_3))=$$
$$=(2x_1+x_2,4x_3)+(2\widetilde{x}_1+\widetilde{x}_2,4\widetilde{x}_3)=M_2.$$
Se observă că $M_1=M_2\Rightarrow$ (i) esteste verificată.
(ii) $\forall(\alpha,\mathbf{x})\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3, T(\alpha\mathbf{x})=\alpha T(\mathbf{x})$.
Fie $\forall(\alpha,\mathbf{x})\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\Rightarrow$
$$T(\alpha\mathbf{x})=T(\alpha(x_1,x_2,x_3))=T((\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3))=$$
$$=(2(\alpha x_1)+(\alpha x_2),4(\alpha x_3))=M_1.$$
$$\alpha T(\mathbf{x})=\alpha T((x_1,x_2,x_3))=\alpha(2x_1+x_2,4x_3)=M_2.$$
Se observă că $M_1=M_2\Rightarrow$ (ii) este verificată.
Din (i) şi (ii) $\Rightarrow T$ este aplicaţie liniară, $T\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^2)$.

d) Fie spaţiul liniar $(\mathbb{R}^3,+,\cdot,\mathbb{R})$ şi funcţia

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) : T(\mathbf{x}) = \left(x_1, x_2, x_3^2\right)$
Să se studieze dacă T este aplicaţie liniară.
Rezolvare. Se verifică axiomele:
(i) $\forall (\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{x}}) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2 : T(\mathbf{x} + \widetilde{\mathbf{x}}) = T(\mathbf{x}) + T(\widetilde{\mathbf{x}})$.
Fie $\forall (\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{x}}) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2 \Rightarrow$
$T(\mathbf{x} + \widetilde{\mathbf{x}}) = T((x_1, x_2, x_3) + (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3)) = T((x_1 + \widetilde{x}_1, x_2 + \widetilde{x}_2, x_3 + \widetilde{x}_3)) =$
$= \left(x_1 + \widetilde{x}_1, x_2 + \widetilde{x}_2, (x_3 + \widetilde{x}_3)^2\right) = M_1.$
$T(\mathbf{x}) + T(\widetilde{\mathbf{x}}) = T((x_1, x_2, x_3)) + T((\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3)) =$
$= \left(x_1, x_2, x_3^2\right) + \left(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3^2\right) = \left(x_1 + \widetilde{x}_1, x_2 + \widetilde{x}_2, x_3^2 + \widetilde{x}_3^2\right) = M_2.$
Se observă că $\exists (\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{x}}) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2 : M_1 \neq M_2$, deoarece
$\exists (x_3, \widetilde{x}_3) \in \mathbb{R}^2$ astfel încât $(x_3 + \widetilde{x}_3)^2 \neq x_3^2 + \widetilde{x}_3^2$
$\Rightarrow$ (i) nu este verificată $\Rightarrow T$ nu este aplicaţie liniară, $T \notin \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$.

3.2. Matricea ataşată unei aplicaţii liniare într-o pereche de baze

Observaţie. Orice matrice $P \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ defineşte o transformare liniară, nu unică:
$T : \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K}), T(\mathbf{x}) = P\mathbf{x}^T$, adică

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 & ... & x_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} p_{11} & ... & p_{1n} \\ ... & ... & ... \\ p_{m1} & ... & p_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Se verifică şi că orice transformare liniară defineşte o matrice, chiar în mod unic.
Definiţie. Fie $(\mathbb{X}, +, \cdot, \mathbb{K})$ un $\mathbb{K}$-spaţiu liniar cu $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{X} = n$ şi cu $B_1 = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$ o bază.
Fie $(\mathbb{Y}, +, \cdot, \mathbb{K})$ un $\mathbb{K}$-spaţiu liniar cu $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{Y} = m$ şi cu $B_2 = (\mathbf{v}'_1, ..., \mathbf{v}'_m)$ o bază.
Fie $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ aplicaţie liniară ($T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$). Se poate arăta că $\exists^* P \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ a.î.

$$\begin{pmatrix} T(\mathbf{v}_1) \\ ... \\ T(\mathbf{v}_n) \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} \mathbf{v}'_1 \\ ... \\ \mathbf{v}'_m \end{pmatrix}$$

Mai mult, fie $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{X} \Rightarrow$
$\exists^* (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ a.î. $\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + ... + \alpha_n \mathbf{v}_n$ şi
$\exists^* (\beta_1, ..., \beta_m) \in \mathbb{K}^m$ a.î. $T(\mathbf{u}) = \beta_1 \mathbf{v}'_1 + ... + \beta_m \mathbf{v}'_m$.
Atunci

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ ... \\ \beta_m \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Matricea P se numeşte *matricea asociată aplicaţiei liniare* T în raport cu perechea de baze (B_1, B_2) şi se notează $P = {}_{B_1}(T)_{B_2}$.
Teoremă. (Legea de schimbare a matricei unei aplicaţii liniare la o schimbare de baze) Fie $(\mathbb{X}, +, \cdot, \mathbb{K})$ şi $(\mathbb{Y}, +, \cdot, \mathbb{K})$ două $\mathbb{K}$-spaţii liniare cu $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{X} = n$ şi $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{Y} = m$. Fie $B_1 = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$, $\widetilde{B}_1 = (\widetilde{\mathbf{v}}_1, ..., \widetilde{\mathbf{v}}_n)$ două baze în $\mathbb{X}$ şi $B_2 = (\mathbf{v}'_1, ..., \mathbf{v}'_n)$, $\widetilde{B}_2 = (\widetilde{\mathbf{v}}'_1, ..., \widetilde{\mathbf{v}}'_n)$ două baze în $\mathbb{Y}$. Fie ${}_{B_1}A_{\widetilde{B}_1}$ şi ${}_{B_2}A_{\widetilde{B}_2}$ matricele de trecere între bazele B_1 şi $\widetilde{B}_1$, respectiv B_2 şi $\widetilde{B}_2$. Fie $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ o aplicaţie liniară ($T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$). Atunci

$$\boxed{{}_{\widetilde{B}_1}(T)_{\widetilde{B}_2} = \left({}_{B_2}A_{\widetilde{B}_2}\right)^{-1} \cdot {}_{B_1}(T)_{B_2} \cdot {}_{B_1}A_{\widetilde{B}_1}.}$$

Definiţie. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Matricele A şi B sunt *matrice asemenea* şi se notează $A \sim B$ dacă $\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ cu $\det M \neq 0$ astfel încât
$A = M^{-1} \cdot B \cdot M.$
Observaţie. Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$. Deoarece $\exists M = {}_{B_1}A_{\widetilde{B}_1} \in M_n(\mathbb{K})$ cu $\det M \neq 0$ astfel încât

$$\boxed{{}_{\widetilde{B}_1}(T)_{\widetilde{B}_1} = \left({}_{B_1}A_{\widetilde{B}_1}\right)^{-1} \cdot {}_{B_1}(T)_{B_1} \cdot {}_{B_1}A_{\widetilde{B}_1}}$$

$\Rightarrow {}_{B_1}(T)_{B_1}$ şi ${}_{\widetilde{B}_1}(T)_{\widetilde{B}_1}$ sunt matrice asemenea, ${}_{B_1}(T)_{B_1} \sim {}_{\widetilde{B}_1}(T)_{\widetilde{B}_1}$.
Teoremă. Fie $(\mathbb{X}, +, \cdot, \mathbb{K})$ şi $(\mathbb{Y}, +, \cdot, \mathbb{K})$ două $\mathbb{K}$-spaţii liniare cu $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{X} = n$ şi $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{Y} = m$. Fie $B_1 =$

$(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$ o bază oarecare în $\mathbb{X}$ şi $B_2 = (\mathbf{v}'_1, ..., \mathbf{v}'_m)$, o bază oarecare în $\mathbb{Y}$. Fie $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ o aplicaţie liniară ($T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$). Atunci
a) T este injectivă (monomorfism) $\Leftrightarrow \text{rang}_{B_1}(T)_{B_2} = n, n \le m$ (n este şi nr. de coloane ale matricei);
b) T este surjectivă (epimorfism) $\Leftrightarrow \text{rang}_{B_1}(T)_{B_2} = m, m \le n$ (m este şi nr. de linii ale matricei);
c) T este bijectivă (izomorfism) $\Leftrightarrow \text{rang}_{B_1}(T)_{B_2} = n, n = m$ (matricea este pătratică nesingulară).

Exerciţiul 2. Fie funcţia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,definită prin $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$:
$T(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 3x_2 - x_3, x_1 - x_3)$.
a) Să se demonstreze că T este o aplicaţie liniară.
b) Fie $C = (\mathbf{e}_1 = (1,0,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0), \mathbf{e}_3 = (0,0,1))$ baza canonică şi $B = (\mathbf{v}_1 = (0,1,1), \mathbf{v}_2 = (1,0,1), \mathbf{v}_3 = (1,1,0))$ o altă bază în $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$. Să se determine matricele aplicaţiei liniare în raport cu perechile de baze propuse ${}_C(T)_C$, ${}_B(T)_C$, ${}_B(T)_B$.
Rezolvare. a) Se verifică axiomele:
(i) $\forall (\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{x}}) \in (\mathbb{R}^3)^2 : T(\mathbf{x} + \widetilde{\mathbf{x}}) = T(\mathbf{x}) + T(\widetilde{\mathbf{x}})$.
Fie $\forall (\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{x}}) \in (\mathbb{R}^3)^2 \Rightarrow$

$$T(\mathbf{x} + \widetilde{\mathbf{x}}) = T((x_1, x_2, x_3) + (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3)) = T((x_1 + \widetilde{x}_1, x_2 + \widetilde{x}_2, x_3 + \widetilde{x}_3)) =$$
$$= ((x_1 + \widetilde{x}_1) + (x_2 + \widetilde{x}_2), 2(x_1 + \widetilde{x}_1) + 3(x_2 + \widetilde{x}_2) - (x_3 + \widetilde{x}_3), (x_1 + \widetilde{x}_1) - (x_3 + \widetilde{x}_3)) = M_1.$$
$$T(\mathbf{x}) + T(\widetilde{\mathbf{x}}) = T((x_1, x_2, x_3)) + T((\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3)) =$$
$$= (x_1 + x_2, 2x_1 + 3x_2 - x_3, x_1 - x_3) + (\widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2, 2\widetilde{x}_1 + 3\widetilde{x}_2 - \widetilde{x}_3, \widetilde{x}_1 - \widetilde{x}_3) = M_2.$$

Se observă că $M_1 = M_2 \Rightarrow$ (i) este verificată.
(ii) $\forall (\alpha, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, T(\alpha\mathbf{x}) = \alpha T(\mathbf{x})$.
Fie $\forall (\alpha, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \Rightarrow$

$$T(\alpha\mathbf{x}) = T(\alpha(x_1, x_2, x_3)) = T((\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)) =$$
$$= ((\alpha x_1) + (\alpha x_2), 2(\alpha x_1) + 3(\alpha x_2) - (\alpha x_3), (\alpha x_1) - (\alpha x_3)) = M_1.$$
$$\alpha T(\mathbf{x}) = \alpha T((x_1, x_2, x_3)) = \alpha(x_1 + x_2, 2x_1 + 3x_2 - x_3, x_1 - x_3) = M_2.$$

Se observă că $M_1 = M_2 \Rightarrow$ (ii) este verificată.
Din (i) şi (ii) $\Rightarrow T$ este aplicaţie liniară, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ (este endomorfism).
b) •Se determină ${}_C(T)_C$.
<u>modul 1:</u> Se calculează T aplicat în vectorii bazei $B_1 = C \subseteq \mathbb{X} = \mathbb{R}^3$ şi se exprimă în raport cu vectorii bazei $B_2 = C \subseteq \mathbb{Y} = \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} T(\mathbf{e}_1) = T((1,0,0)) = (1,2,1) = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3; \\ T(\mathbf{e}_2) = T((0,1,0)) = (1,3,0) = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3; \\ T(\mathbf{e}_3) = T((0,0,1)) = (0,-1,-1) = 0\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3; \end{cases}$$

Se scriu pe coloană coeficienţii pe linie ai descompunerilor de mai sus, obţinând

$${}_C(T)_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>modul 2:</u> (se aplică numai dacă bazele din $\mathbb{X}$, respectiv $\mathbb{Y}$ sunt bazele canonice) Se descompune un vector oarecare $\mathbf{x}$ în raport cu vectorii bazei $B_1 = C \subseteq \mathbb{X} = \mathbb{R}^3$, respectiv $T(\mathbf{x})$ în raport cu vectorii bazei $B_2 = C \subseteq \mathbb{Y} = \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3;$$
$$T(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 3x_2 - x_3, x_1 - x_3) =$$
$$= (x_1 + x_2)\mathbf{e}_1 + (2x_1 + 3x_2 - x_3)\mathbf{e}_2 + (x_1 - x_3)\mathbf{e}_3,$$

şi se observă că

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow {}_C(T)_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

•Se determină ${}_B(T)_C$.
<u>modul 1:</u> Se calculează T aplicat în vectorii bazei $B_1 = B \subseteq \mathbb{X} = \mathbb{R}^3$ şi se exprimă în raport cu vectorii bazei $B_2 = C \subseteq \mathbb{Y} = \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} T(\mathbf{v}_1) = T((0,1,1)) = (1,2,-1) = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3; \\ T(\mathbf{v}_2) = T((1,0,1)) = (1,1,0) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3; \\ T(\mathbf{v}_3) = T((1,1,0)) = (2,5,1) = 2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3; \end{cases}$$

Se scriu pe coloană coeficienţii pe linie ai descompunerilor de mai sus, obţinând

$$_B(T)_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>modul 2:</u> greoi.

•Se determină $_B(T)_B$.

<u>modul 1:</u> Se calculează T aplicat în vectorii bazei $B_1 = B \subseteq \mathbb{X} = \mathbb{R}^3$ şi se exprimă în raport cu vectorii bazei $B_2 = B \subseteq \mathbb{Y} = \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} T(\mathbf{v}_1) = T((0,1,1)) = (1,2,-1) = p_{11}\mathbf{v}_1 + p_{21}\mathbf{v}_2 + p_{31}\mathbf{v}_3; \\ T(\mathbf{v}_2) = T((1,0,1)) = (1,1,0) = p_{12}\mathbf{v}_1 + p_{22}\mathbf{v}_2 + p_{32}\mathbf{v}_3; \\ T(\mathbf{v}_3) = T((1,1,0)) = (2,5,1) = p_{13}\mathbf{v}_1 + p_{23}\mathbf{v}_2 + p_{33}\mathbf{v}_3. \end{cases}$$

Sistemul anterior este echivalent cu 3 sisteme de ecuaţii liniare, cu aceeaşi coeficienţi, daţi de componentele vectorilor $\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3' = \mathbf{v}_3$ şi cu termeni liberi diferiţi, daţi de componentele vectorilor $T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), T(\mathbf{v}_3)$.

$$\left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}}_{\text{vect. din } B_2} \underbrace{\begin{array}{|c|c|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}}_{T(\text{vect. din } B_1)} \right) \begin{array}{c} \overset{\text{pas intermediar}}{\sim} \\ l_2 \\ l_3 \\ l_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{c} \overset{pas1}{\sim} \\ l_1 \\ -l_1 + l_2 \\ l_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{c} \overset{pas2}{\sim} \\ l_1 \\ l_2 \\ -l_2 + l_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 6 \end{array} \right) \begin{array}{c} \overset{\text{pas intermediar}}{\sim} \\ l_1 \\ l_2 \\ \frac{1}{2} l_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{c} \overset{pas1'}{\sim} \\ -l_3 + l_1 \\ l_3 + l_2 \\ l_3 \end{array} \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{I_3} \underbrace{\begin{array}{|c|c|c} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}}_{_{B_1}(T)_{B_2}} \right)$$

S-a obţinut $\begin{cases} p_{11} = 0 \\ p_{21} = -1 \\ p_{31} = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} p_{12} = 0 \\ p_{22} = 0 \\ p_{32} = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} p_{13} = 2 \\ p_{23} = -1 \\ p_{33} = 3 \end{cases}$

adică $_B(T)_B = P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

<u>modul 2:</u> greoi.

<u>modul 3:</u> Se foloseşte legea de schimbare a matricei unei aplicaţii liniare la o schimbare de baze$\Rightarrow$

$$\boxed{_B(T)_B = ({_C A_B})^{-1} \cdot {_C(T)_C} \cdot {_C A_B}},$$

unde $_C A_B$ este matricea de trecere de la baza C la baza B adică

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = 0\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3 \end{cases} \Rightarrow {_C A_B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se calculează şi $({_C A_B})^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{c} \overset{\text{pas intermediar}}{\sim} \\ l_2 \\ l_1 \\ l_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{c} \overset{pas1}{\sim} \\ l_1 \\ l_2 \\ -l_1 + l_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{l_1 \\ l_2 \\ -l_2+l_3}}{\overset{pas2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{l_3+2l_1 \\ l_3+2l_2 \\ l_3}}{\overset{pas1'}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{\frac{1}{2}l_1 \\ \frac{1}{2}l_2 \\ -\frac{1}{2}l_3}}{\overset{\text{pas final}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left({}_C A_B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}.$$

Atunci $_B\left(T\right)_B = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

Se observă că $_C\left(T\right)_C \sim {}_B\left(T\right)_B$.

Obs. $\operatorname{rang}_C\left(T\right)_C = \operatorname{rang}_B\left(T\right)_C = \operatorname{rang}_B\left(T\right)_B$. Este suficient atunci să se observe că $\operatorname{rang}_C\left(T\right)_C = 3, n = m = 3 \Rightarrow T$ este izomorfism, chiar automorfism.

Exerciţiul 3. Fie funcţia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,definită prin $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{x} = \left(x_1, x_2, x_3\right)$:
$T\left(\mathbf{x}\right) = \left(x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_2 - x_3, x_1 - x_2 + 2x_3\right)$.

a) Să se demonstreze că T este o aplicaţie liniară.

b) Fie
$C_1 = \left(\mathbf{e}_1 = \left(1,0,0\right), \mathbf{e}_2 = \left(0,1,0\right), \mathbf{e}_3 = \left(0,0,1\right)\right),,$
$C_2 = \left(\mathbf{e}'_1 = \left(1,0,0,0\right), \mathbf{e}'_2 = \left(0,1,0,0\right), \mathbf{e}'_3 = \left(0,0,1,0\right), \mathbf{e}'_4 = \left(0,0,0,1\right)\right)$
bazele canonice în $\mathbb{R}^3$, respectiv $\mathbb{R}^4$ şi
$B_1 = \left(\mathbf{v}_1 = \left(1,1,-1\right), \mathbf{v}_2 = \left(1,-1,1\right), \mathbf{v}_3 = \left(-1,1,1\right)\right)$,
$B_2 = \left(\mathbf{v}'_1 = \left(0,1,1,1\right), \mathbf{v}'_2 = \left(1,0,1,1\right), \mathbf{v}'_3 = \left(1,1,0,1\right), \mathbf{v}'_4 = \left(1,1,1,0\right)\right)$
alte baze în $\mathbb{R}^3$, respectiv $\mathbb{R}^4$. Să se determine matricele aplicaţiei liniare în raport cu perechile de baze propuse $_{C_1}\left(T\right)_{C_2}$, $_{B_1}\left(T\right)_{C_2}$, $_{B_1}\left(T\right)_{B_2}$.

Rezolvare. a) Se verifică axiomele $(i), (ii)$ ca la exerciţiul 3 şi se obţine că T este o transformare liniară, $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4\right)$.

b) •Se determină $_{C_1}\left(T\right)_{C_2}$.

<u>modul 1:</u> Se calculează T aplicat în vectorii bazei $C_1 \subseteq \mathbb{X} = \mathbb{R}^3$ şi se exprimă în raport cu vectorii bazei $C_2 \subseteq \mathbb{Y} = \mathbb{R}^4$

$$\begin{cases} T\left(\mathbf{e}_1\right) = T\left(\left(1,0,0\right)\right) = \left(1,1,0,1\right) = \mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2 + 0 \cdot \mathbf{e}'_3 + \mathbf{e}'_4; \\ T\left(\mathbf{e}_2\right) = T\left(\left(0,1,0\right)\right) = \left(1,0,1,-1\right) = \mathbf{e}'_1 + 0 \cdot \mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_3 - \mathbf{e}'_4; \\ T\left(\mathbf{e}_3\right) = T\left(\left(0,0,1\right)\right) = \left(0,1,-1,2\right) = 0 \cdot \mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2 - \mathbf{e}'_3 + 2\mathbf{e}'_4; \end{cases}$$

Se scriu pe coloană coeficienţii pe linie ai descompunerilor de mai sus, obţinând

$$_{C_1}\left(T\right)_{C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 3}\left(\mathbb{R}\right).$$

<u>modul 2:</u> (se aplică numai dacă bazele din $\mathbb{X}$, respectiv $\mathbb{Y}$ sunt bazele canonice) Se descompune un vector oarecare $\mathbf{x}$ în raport cu vectorii bazei $C_1 \subseteq \mathbb{X} = \mathbb{R}^3$, respectiv $T\left(\mathbf{x}\right)$ în raport cu vectorii bazei $C_2 \subseteq \mathbb{Y} = \mathbb{R}^4$

$\mathbf{x} = \left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3;$

$T\left(\mathbf{x}\right) = \left(x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_2 - x_3, x_1 - x_2 + 2x_3\right) =$
$= \left(x_1 + x_2\right)\mathbf{e}'_1 + \left(x_1 + x_3\right)\mathbf{e}'_2 + \left(x_2 - x_3\right)\mathbf{e}'_3 + \left(x_1 - x_2 + 2x_3\right)\mathbf{e}'_4,$

şi se observă că

$$\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_1+x_3 \\ x_2-x_3 \\ x_1-x_2+2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow {}_{C_1}(T)_{C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R}).$$

•Se determină ${}_{B_1}(T)_{C_2}$.

<u>modul 1:</u> Se calculează T aplicat în vectorii bazei $B_1 \subseteq \mathbb{X} = \mathbb{R}^3$ şi se exprimă în raport cu vectorii bazei $C_2 \subseteq \mathbb{Y} = \mathbb{R}^4$

$$\begin{cases} T(\mathbf{v}_1) = T((1,1,-1)) = (2,0,2,-2) = 2\mathbf{e}_1' + 0\mathbf{e}_2' + 2\mathbf{e}_3' - 2\mathbf{e}_4'; \\ T(\mathbf{v}_2) = T((1,-1,1)) = (0,2,-2,4) = 0\mathbf{e}_1' + 2\mathbf{e}_2' - 2\mathbf{e}_3' + 4\mathbf{e}_4'; \\ T(\mathbf{v}_3) = T((-1,1,1)) = (0,0,0,0) = 0\mathbf{e}_1' + 0\mathbf{e}_2' + 0\mathbf{e}_3' + 0\mathbf{e}_4'; \end{cases}$$

Se scriu pe coloană coeficienţii pe linie ai descompunerilor de mai sus, obţinând

$${}_{B_1}(T)_{C_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>modul 2:</u> greoi.

•Se determină ${}_{B_1}(T)_{B_2}$.

<u>modul 1:</u> Se calculează T aplicat în vectorii bazei $B_1 \subseteq \mathbb{X} = \mathbb{R}^3$ şi se exprimă în raport cu vectorii bazei $B_2 \subseteq \mathbb{Y} = \mathbb{R}^4$

$$\begin{cases} T(\mathbf{v}_1) = T((1,1,-1)) = (2,0,2,-2) = p_{11}\mathbf{v}_1' + p_{21}\mathbf{v}_2' + p_{31}\mathbf{v}_3' + p_{41}\mathbf{v}_4'; \\ T(\mathbf{v}_2) = T((1,-1,1)) = (0,2,-2,4) = p_{12}\mathbf{v}_1' + p_{22}\mathbf{v}_2' + p_{32}\mathbf{v}_3' + p_{42}\mathbf{v}_4'; \\ T(\mathbf{v}_3) = T((-1,1,1)) = (0,0,0,0) = p_{13}\mathbf{v}_1' + p_{23}\mathbf{v}_2' + p_{33}\mathbf{v}_3' + p_{43}\mathbf{v}_4'. \end{cases}$$

Sistemul anterior este echivalent cu 3 sisteme de ecuaţii liniare, cu aceeaşi coeficienţi, daţi de componentele vectorilor $\mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2', \mathbf{v}_3', \mathbf{v}_4'$ şi cu termeni liberi diferiţi, daţi de componentele vectorilor $T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), T(\mathbf{v}_3)$.

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}}_{\text{vect. din } B_2} \left| \underbrace{\begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}}_{T(\text{vect. din } B_1)} \right) \underset{\substack{l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_1}}{\overset{\text{pas intermediar}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \underset{\substack{l_1 \\ -l_1+l_2 \\ -l_1+l_3 \\ l_4}}{\overset{pas1}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \underset{\substack{l_1 \\ l_2 \\ -l_2+l_3 \\ -l_2+l_4}}{\overset{pas2}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right) \underset{\substack{l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ -2l_3+l_4}}{\overset{pas3}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 8 & -8 & 0 \end{array} \right) \underset{\substack{l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ \frac{1}{3}l_4}}{\overset{\text{pas intermediar}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & \frac{-8}{3} & 0 \end{array} \right) \underset{\substack{-l_4+l_1 \\ l_2 \\ l_4+l_3 \\ l_4}}{\overset{pas1'}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{-8}{3} & \frac{14}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-4}{3} & \frac{10}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & \frac{-8}{3} & 0 \end{array} \right) \underset{\substack{-l_3+l_1 \\ l_3+l_2 \\ l_3 \\ l_4}}{\overset{pas2'}{\sim}} \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_4} \left| \underbrace{\begin{matrix} \frac{-4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{-4}{3} \\ \frac{8}{3} \end{matrix} \right| \begin{matrix} \frac{4}{3} \\ \frac{-2}{3} \\ \frac{10}{3} \\ \frac{-8}{3} \end{matrix} \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}}_{{}_{B_1}(T)_{B_2}} \right).$$

S-a obţinut $\begin{cases} p_{11} = -\frac{4}{3} \\ p_{21} = \frac{2}{3} \\ p_{31} = -\frac{4}{3} \\ p_{41} = \frac{8}{3} \end{cases}$, $\begin{cases} p_{12} = \frac{4}{3} \\ p_{22} = -\frac{2}{3} \\ p_{32} = 10 \\ p_{42} = -\frac{8}{3} \end{cases}$, $\begin{cases} p_{13} = 0 \\ p_{23} = 0 \\ p_{33} = 0 \\ p_{43} = 0 \end{cases}$

adică ${}_{B_1}(T)_{B_2} = P = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{10}{3} & 0 \\ \frac{8}{3} & -\frac{8}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

Dacă se foloseşte Scientific WorkPlace, matricea

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ are "row echelon form" $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{10}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & -\frac{8}{3} & 0 \end{pmatrix}$

modul 2: greoi.

modul 3: Se foloseşte legea de schimbare a matricei unei aplicaţii liniare la o schimbare de baze$\Rightarrow$

$\boxed{{}_{B_1}(T)_{B_2} = \left({}_{C_2}A_{B_2}\right)^{-1} \cdot {}_{C_1}(T)_{C_2} \cdot {}_{C_1}A_{B_1}}$.

Este mult calcul.

Obs. $\operatorname{rang}_{C_1}(T)_{C_2} = \operatorname{rang}_{B_1}(T)_{C_2} = \operatorname{rang}_{B_1}(T)_{B_2}$. Este suficient atunci să se observe că

$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2$, adică

$\operatorname{rang}_{C_1}(T)_{C_2} = 2$,

$2 \neq m = 4 \Rightarrow T$ nu este surjectivă, epimorfism.

$2 \neq n = 3 \Rightarrow T$ nu este injectivă, epimorfism.

3.3. Nucleul şi imaginea unei aplicaţii liniare

Definiţii. Fie $(\mathbb{X}, +, \cdot, \mathbb{K})$ şi $(\mathbb{Y}, +, \cdot, \mathbb{K})$ două $\mathbb{K}$-spaţii liniare şi $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ o transformare liniară ($T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$).

a) Se numeşte *nucleul* aplicaţiei liniare T mulţimea

$\ker T = \{\mathbf{x} \in \mathbb{X}; T(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{Y}}\}$-este subspaţiu liniar în $\mathbb{X}$;

Se defineşte *defectul lui* T prin $\operatorname{def} T = \dim_{\mathbb{K}}(\ker T)$.

b) Se numeşte *imaginea* aplicaţiei liniare T mulţimea

$\operatorname{Im} T = \{\mathbf{y} \in \mathbb{Y}; \exists \mathbf{x} \in \mathbb{X} \text{ a.î. } T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\}$-este subspaţiu liniar în $\mathbb{Y}$;

Se defineşte *rangul lui* T prin $\operatorname{rang} T = \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} T)$.

Teoremă. $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ este injectivă $\Leftrightarrow \ker T = \{\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{X}}\}$.

Teoremă. $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ este surjectivă $\Leftrightarrow \operatorname{Im} T = \mathbb{Y}$.

Teoremă. Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Atunci

$\operatorname{def} T + \operatorname{rang} T = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{X}$.

Exerciţiul 2. Fie funcţia

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) : T(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 3x_2 - x_3, x_1 - x_3)$.

c) Să se determine $\ker T$, $\operatorname{Im} T$, să se precizeze o bază în ele. Să se studieze injectivitatea şi surjectivitatea lui T.

Rezolvare.

• $\ker T = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3; T(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}^3}\right\}$

Se caută $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ astfel încât

$(x_1 + x_2, 2x_1 + 3x_2 - x_3, x_1 - x_3) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$.

Sistemul anterior este liniar omogen cu $m = 3(= \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{Y})$ ecuaţii şi $n = 3(= \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{X})$ necunoscute (x_1, x_2, x_3). Se aplică metoda Gauss sau, direct, deoarece matricea sistemului este chiar $P = {}_{C_1}(T)_{C_2}$,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (0,0,0) \text{ unică soluţie.}$$

$\ker T = \{(0,0,0)\} = \{\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}^3}\} \Rightarrow T$ este aplicaţie liniară injectivă (monomorfism).

$\operatorname{def} T = \dim_{\mathbb{R}} (\ker T) = \dim_{\mathbb{R}} \{\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}^3}\} \overset{\text{convenţie}}{=} 0.$

• $\operatorname{Im} T = \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3; \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ a.î. } T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\right\}$

Se caută $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ a.î. să existe $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ cu proprietatea

$$(x_1 + x_2, 2x_1 + 3x_2 - x_3, x_1 - x_3) = (y_1, y_2, y_3) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = y_2 \\ x_1 - x_3 = y_3 \end{cases}.$$

Sistemul anterior este liniar neomogen cu $m = 3(= \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{Y})$ ecuaţii şi $n = 3(= \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{X})$ necunoscute (x_1, x_2, x_3), cu parametrii (y_1, y_2, y_3). Se aplică metoda Gauss sau, direct,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \exists (x_1, x_2, x_3) \text{ soluţie a sistemului, } \forall (y_1, y_2, y_3) \text{ parametri.}$$

$\operatorname{Im} T = \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3; \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \text{ oarecare}\right\} = \mathbb{R}^3 \Rightarrow T$ este aplicaţie liniară surjectivă (epimorfism).

O bază în $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^3$ este $C = (\mathbf{e}_1 = (1,0,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0), \mathbf{e}_3 = (0,0,1))$ baza canonică.

$\operatorname{rang} T = \dim_{\mathbb{R}} (\operatorname{Im} T) = 3.$

•T este aplicaţie liniară bijectivă (izomorfism, este chiar automorfism).

• Esteste verificată teorema rangului şi a defectului

$\operatorname{def} T + \operatorname{rang} T = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 \ (0 + 3 = 3).$

Exerciţiul 3. Fie funcţia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,definită prin $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$:

$T(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_2 - x_3, x_1 - x_2 + 2x_3)$..

c) Să se determine $\ker T$, $\operatorname{Im} T$, să se precizeze o bază în ele. Să se studieze injectivitatea şi surjectivitatea lui T.

Rezolvare.

• $\ker T = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3; T(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}^4}\right\}$

Se caută $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ astfel încât

$$(x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_2 - x_3, x_1 - x_2 + 2x_3) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Sistemul anterior este liniar omogen cu $m = 4(= \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{Y})$ ecuaţii şi $n = 3(= \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{X})$ necunoscute (x_1, x_2, x_3). Se aplică metoda Gauss, menţionând că matricea sistemului este chiar:

$${}_{C_1}(T)_{C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R}).$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{l_1 \\ -l_1 + l_2 \\ l_3 \\ -l_1 + l_4}}{\overset{pas1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{l_1 \\ l_2 \\ l_2 + l_3 \\ -2l_2 + l_4}}{\overset{pas2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\ker T &= \left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3; \mathbf{x}=(-\alpha,\alpha,\alpha), \alpha\in\mathbb{R}\right\}\\ &= \left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3; \mathbf{x}=\alpha\underbrace{(-1,1,1)}_{\mathbf{u}_1}, \alpha\in\mathbb{R}\right\} = [(\mathbf{u}_1)] \neq \{\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}^3}\}\end{aligned}$$

$\Rightarrow T$ nu este aplicaţie liniară injectivă (monomorfism).

Se observă că $B=(\mathbf{u}_1)$ este o bază în $\ker T$ (este sistem de vectori liniar independenţi şi este sistem de generatori pentru $\ker T$ din algoritm) $\Rightarrow \operatorname{def} T = \dim_{\mathbb{R}}(\ker T) = 1$.

• $\operatorname{Im} T = \left\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^3; \exists \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \text{ a.î. } T(\mathbf{x})=\mathbf{y}\right\}$

Se caută $\mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3,y_4)\in\mathbb{R}^4$ a.î. să existe $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ cu proprietatea

$(x_1+x_2, x_1+x_3, x_2-x_3, x_1-x_2+2x_3) = (y_1,y_2,y_3,y_4) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1+x_2=y_1\\ x_1+x_3=y_2\\ x_1-x_3=y_3\\ x_1-x_2+2x_3=y_4\end{cases}.$$

Sistemul anterior este liniar neomogen cu $m=4(=\dim_{\mathbb{K}}\mathbb{Y})$ ecuaţii şi $n=3(=\dim_{\mathbb{K}}\mathbb{X})$ necunoscute (x_1,x_2,x_3), cu parametrii (y_1,y_2,y_3,y_4). Se aplică metoda Gauss, menţionând că matricea sistemului este chiar:${}_{C_1}(T)_{C_2}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & y_1\\ 1 & 0 & 1 & y_2\\ 0 & 1 & -1 & y_3\\ 1 & -1 & 2 & y_4\end{pmatrix} \underset{\substack{l_1\\ -l_1+l_2\\ l_3\\ -l_1+l_4}}{\overset{pas1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & y_1\\ 0 & -1 & 1 & -y_1+y_2\\ 0 & 1 & -1 & y_3\\ 0 & -2 & 2 & -y_1+y_4\end{pmatrix} \underset{\substack{l_1\\ l_2\\ l_2+l_3\\ -2l_2+l_4}}{\overset{pas2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & y_1\\ 0 & -1 & 1 & -y_1+y_2\\ 0 & 0 & 0 & -y_1+y_2+y_3\\ 0 & 0 & 0 & y_1-2y_2+y_4\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1+x_2-0\cdot x_3=y_1\\ \quad -x_2+x_3=-y_1+y_2\\ \qquad\qquad 0=-y_1+y_2+y_3\\ \qquad\qquad 0=y_1-2y_2+y_4\end{cases}.$$

Sistemul anterior în necunoscutele (x_1,x_2,x_3) cu parametrii (y_1,y_2,y_3,y_4) este compatibil $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -y_1+y_2+y_3 = 0\\ y_1-2y_2+y_4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y_1+y_2+y_3 = 0\\ -y_2+y_3+y_4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=2\gamma+\delta\\ y_2=\gamma+\delta\\ y_3=\gamma\in\mathbb{R}\\ y_4=\delta\in\mathbb{R}\end{cases}.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \underset{\substack{l_1\\ l_1+l_2}}{\overset{pas1}{\sim}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} T &= \left\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^4; \mathbf{y}=(2\gamma+\delta,\gamma+\delta,\gamma,\delta), \gamma,\delta\in\mathbb{R}\right\}\\ &= \left\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^4; \mathbf{x}=\gamma\underbrace{(2,1,1,0)}_{\mathbf{v}_1}+\delta\underbrace{(1,1,0,1)}_{\mathbf{v}_2}, \gamma,\delta\in\mathbb{R}\right\}\\ &= [(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)] \neq \mathbb{Y}=\mathbb{R}^4 \Rightarrow T \text{ nu este aplicaţie surjectivă.}\end{aligned}$$

Se observă că $B'=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ este o bază în $\operatorname{Im} T$ (este sistem de vectori liniar independenţi şi este sistem de generatori pentru $\operatorname{Im} T$ din algoritm) $\Rightarrow \operatorname{rang} T = \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Im} T)=2$.

• Este verificată teorema rangului şi a defectului

$\operatorname{def} T + \operatorname{rang} T = \dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ $(1+2=3)$.

○**Exerciţiul** 4. Fie spaţiile liniare reale $(\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}),+,\cdot,\mathbb{R})$ şi $(\mathbb{R}_2[x],+,\cdot,\mathbb{R})$. Se defineşte funcţia $T: \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}_2[x]$ prin $\forall \mathbf{A}\in\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}$,

$T(\mathbf{A}) = (a_{11}+a_{13})x^2 + (a_{21}-a_{22})x + a_{23}$.

a) Să se demonstreze că T este o aplicaţie liniară.

b) Fie $C_1 = \left(\mathbf{E}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, ..., \mathbf{E}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ baza canonică în $(\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$ şi $C_2 = \left(\mathbf{p}_0 = 1, \mathbf{p}_1 = x, \mathbf{p}_2 = x^2\right)$ baza canonică în $(\mathbb{R}_2[x], +, \cdot, \mathbb{R})$. Să se determine matricele aplicaţiei liniare în bazele propuse ${}_{C_1}(T)_{C_2}$.

c) Să se precizeze $\ker T$ şi $\operatorname{Im} T$ şi câte o bază în ele. Să se studieze injectivitatea şi surjectivitatea lui T.

Rezolvare. a) Se verifică axiomele:

(i) $\forall \left(\mathbf{A}, \widetilde{\mathbf{A}}\right) \in (\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}))^2 : T\left(\mathbf{A} + \widetilde{\mathbf{A}}\right) = T(\mathbf{A}) + T\left(\widetilde{\mathbf{A}}\right).$

Fie $\forall \left(\mathbf{A}, \widetilde{\mathbf{A}}\right) \in (\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}))^2 \Rightarrow$

$$T\left(\mathbf{A} + \widetilde{\mathbf{A}}\right) = T\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{13} \\ \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{22} & \widetilde{a}_{23} \end{pmatrix}\right) =$$
$$= T\left(\begin{pmatrix} a_{11} + \widetilde{a}_{11} & a_{12} + \widetilde{a}_{12} & a_{13} + \widetilde{a}_{13} \\ a_{21} + \widetilde{a}_{21} & a_{22} + \widetilde{a}_{22} & a_{23} + \widetilde{a}_{23} \end{pmatrix}\right) =$$
$$= ((a_{11} + \widetilde{a}_{11}) + (a_{13} + \widetilde{a}_{13}))\, x^2 + ((a_{21} + \widetilde{a}_{21}) - (a_{22} + \widetilde{a}_{22}))\, x + (a_{23} + \widetilde{a}_{23}) = M_1.$$
$$T(\mathbf{A}) + T\left(\widetilde{\mathbf{A}}\right) = T\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\right) + T\left(\begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{13} \\ \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{22} & \widetilde{a}_{23} \end{pmatrix}\right) =$$
$$= (a_{11} + a_{13})\, x^2 + (a_{21} - a_{22})\, x + a_{23} + (\widetilde{a}_{11} + \widetilde{a}_{13})\, x^2 + (\widetilde{a}_{21} - \widetilde{a}_{22})\, x + \widetilde{a}_{23} = M_2.$$

Se observă că $M_1 = M_2 \Rightarrow$ (i) este verificată.

(ii) $\forall (\alpha, \mathbf{A}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}), T(\alpha\mathbf{A}) = \alpha T(\mathbf{A}).$

Fie $\forall (\alpha, \mathbf{A}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \Rightarrow$

$$T(\alpha\mathbf{A}) = T\left(\alpha\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \end{pmatrix}\right) =$$
$$= ((\alpha a_{11}) + (\alpha a_{13}))\, x^2 + ((\alpha a_{21}) - (\alpha a_{22}))\, x + (\alpha a_{23}) = M_1.$$
$$\alpha T(\mathbf{A}) = \alpha T\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\right) =$$
$$= \alpha\left((a_{11} + a_{13})\, x^2 + (a_{21} - a_{22})\, x + a_{23}\right) = M_2.$$

Se observă că $M_1 = M_2 \Rightarrow$ (ii) este verificată.

Din (i) şi (ii) $\Rightarrow T$ este aplicaţie liniară, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}), \mathbb{R}_2[x])$.

b) •Se determină ${}_{C_1}(T)_{C_2}$.

modul 1: Se calculează T aplicat în vectorii bazei $C_1 \subseteq \mathbb{X} = \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ şi se exprimă în raport cu vectorii bazei $C_2 \subseteq \mathbb{Y} = \mathbb{R}_2[x]$

$$\begin{cases} T(\mathbf{E}_{11}) = T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = x^2 = 0\mathbf{p}_0 + 0\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2; \\ T(\mathbf{E}_{12}) = T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0 = 0\mathbf{p}_0 + 0\mathbf{p}_1 + 0\mathbf{p}_2; \\ T(\mathbf{E}_{13}) = T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = x^2 = 0\mathbf{p}_0 + 0\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2; \\ T(\mathbf{E}_{21}) = T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = x = 0\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1 + 0\mathbf{p}_2; \\ T(\mathbf{E}_{22}) = T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = -x = 0\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1 + 0\mathbf{p}_2; \\ T(\mathbf{E}_{23}) = T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 = 1\mathbf{p}_0 + 0\mathbf{p}_1 + 0\mathbf{p}_2; \end{cases}$$

Se scriu pe coloană coeficienţii pe linie ai descompunerilor de mai sus, obţinând

$${}_{C_1}(T)_{C_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

modul 2: Se descompune un vector oarecare $\mathbf{A}$ în raport cu vectorii bazei $C_1 \subseteq \mathbb{X} = \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, respectiv $T(\mathbf{A})$ în raport cu vectorii bazei $C_2 \subseteq \mathbb{Y} = \mathbb{R}_2[x]$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = a_{11}\mathbf{E}_{11} + a_{12}\mathbf{E}_{12} + a_{13}\mathbf{E}_{13} + a_{21}\mathbf{E}_{21} + a_{22}\mathbf{E}_{22} + a_{23}\mathbf{E}_{23};$$
$$T(\mathbf{A}) = (a_{11} + a_{13})\, x^2 + (a_{21} - a_{22})\, x + a_{23} =$$

$= (a_{23})\,\mathbf{p}_0 + (a_{21} - a_{22})\,\mathbf{p}_1 + (a_{11} + a_{13})\,\mathbf{p}_2,$

şi se observă că

$$\begin{pmatrix} a_{23} \\ a_{21} - a_{22} \\ a_{11} + a_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix} \Rightarrow {}_{C_1}(T)_{C_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cum $\operatorname{rang}_{C_1}(T)_{C_2} = 3 = m$, m e numărul de linii din matrice, $m \le n \Rightarrow T$ este aplicaţie liniară surjectivă (epimorfism), dar nu este aplicaţie injectivă.

c) $\bullet \ker T = \left\{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})\,;T(\mathbf{A}) = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}_2[x]}\right\}$

Se caută $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ astfel încât

$(a_{11} + a_{13})\,x^2 + (a_{21} - a_{22})\,x + a_{23} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a_{23} = 0 \\ a_{21} - a_{22} = 0 \\ a_{11} + a_{13} = 0 \end{cases}.$$

Sistemul anterior este liniar omogen cu $m = 3(= \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{Y})$ ecuaţii şi $n = 6(= \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{X})$ necunoscute $(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$

Se aplică metoda Gauss, menţionând că matricea sistemului este chiar ${}_{C_1}(T)_{C_2}$, sau, direct,

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3, \text{ deoarece } \det(c_1, c_4, c_6) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Se aleg necunoscutele corespunzătoare coloanelor ca fiind principale, celelalte secundare.

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11} = -\beta \\ a_{12} = \alpha \in \mathbb{R} \\ a_{13} = \beta \in \mathbb{R} \\ a_{21} = \gamma \\ a_{22} = \gamma \in \mathbb{R} \\ a_{23} = 0 \end{cases}$$

$$\ker T = \left\{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})\,;\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\beta & \alpha & \beta \\ \gamma & \gamma & 0 \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})\,;\mathbf{A} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_1} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_2} + \gamma \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_3}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= [(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3)] \neq \left\{\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})}\right\}$$

$\Rightarrow T$ nu este aplicaţie injectivă.

Se observă că $B = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3)$ este o bază în $\ker T$ (este sistem de vectori liniar independenţi şi este sistem de generatori pentru $\ker T$ din algoritm) $\Rightarrow \operatorname{def} T = \dim_{\mathbb{R}}(\ker T) = 3$.

$\bullet \operatorname{Im} T = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}_2[x]\,; \exists \mathbf{A} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \text{ a.î. } T(\mathbf{A}) = \mathbf{p}\}$

Se caută $\mathbf{p} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ astfel încât să existe $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ cu proprietatea

$(a_{11} + a_{13})\,x^2 + (a_{21} - a_{22})\,x + a_{23} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a_{23} = b_0 \\ a_{21} - a_{22} = b_1 \\ a_{11} + a_{13} = b_2 \end{cases}.$$

Sistemul anterior este liniar neomogen cu $m = 3(= \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{Y})$ ecuaţii şi $n = 6(= \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{X})$ necunoscute $(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23})$, cu parametrii (b_0, b_1, b_2). Se aplică metoda Gauss, menţionând că matricea sistemului este chiar ${}_{C_1}(T)_{C_2}$, sau, direct,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 = \operatorname{rang}\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b_2 \end{array}\right) \Rightarrow \exists\,(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23})$$

soluţie a sistemului, $\forall\,(b_0, b_1, b_2)$ parametri.

$\operatorname{Im} T = \left\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}_2[x]\,;\mathbf{p} = b_0 + b_1x + b_2x^2 \text{ oarecare}\right\} = \mathbb{R}_2[x] \Rightarrow T$ este aplicaţie liniară surjectivă (epimorfism).

O bază în $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}_2[x]$ este $C_2 = \left(\mathbf{p}_1 = 1, \mathbf{p}_2 = x, \mathbf{p}_3 = x^2\right)$ baza canonică $\Rightarrow \operatorname{rang} T = \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Im} T) = 3$.

• Esteste verificată teorema rangului şi a defectului

$\operatorname{def} T + \operatorname{rang} T = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ $(3 + 3 = 6)$.

○**Exerciţiul** 5. Fie spaţiile liniare reale $(\mathbb{R}_4[x], +, \cdot, \mathbb{R})$ şi $(\mathbb{R}_3[x], +, \cdot, \mathbb{R})$. Să se determine matricea asociată aplicaţiei liniare $T : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ definită prin $\forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}_4[x], T(\mathbf{p}) = \mathbf{p}'$ ($\mathbf{p}'$ este derivata funcţiei polinomiale $\mathbf{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ataşată polinomului $\mathbf{p}$) în raport cu bazele $C_1 = \left(1, x, x^2, x^3, x^4\right)$ în $(\mathbb{R}_4[x], +, \cdot, \mathbb{R})$ şi $C_2 = \left(1, x, x^2, x^3\right)$ în $(\mathbb{R}_3[x], +, \cdot, \mathbb{R})$.

Rezolvare.•Se poate arăta direct că T este aplicaţie liniară, deoarece

(i) $\forall\,(\mathbf{p}, \widetilde{\mathbf{p}}) \in (\mathbb{R}_4[x])^2 : T(\mathbf{p} + \widetilde{\mathbf{p}}) = T(\mathbf{p}) + T(\widetilde{\mathbf{p}})$.

Fie $\forall\,(\mathbf{p}, \widetilde{\mathbf{p}}) \in (\mathbb{R}_4[x])^2 \Rightarrow$

$T(\mathbf{p} + \widetilde{\mathbf{p}}) = (\mathbf{p} + \widetilde{\mathbf{p}})' = \mathbf{p}' + \widetilde{\mathbf{p}}' = T(\mathbf{p}) + T(\widetilde{\mathbf{p}})$

$\Rightarrow$ (i) este verificată.

(ii) $\forall\,(\alpha, \mathbf{p}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_4[x], T(\alpha\mathbf{p}) = \alpha T(\mathbf{p})$.

Fie $\forall\,(\alpha, \mathbf{p}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_4[x] \Rightarrow$

$T(\alpha\mathbf{p}) = (\alpha\mathbf{p})' = \alpha\mathbf{p}' = \alpha T(\mathbf{p})$.

$\Rightarrow$ (ii) este verificată.

Din (i) şi (ii) $\Rightarrow T$ este aplicaţie liniară, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_4[x], \mathbb{R}_3[x])$.

•Fie $\forall \mathbf{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \in \mathbb{R}_4[x]$. Se identifică polinomul $\mathbf{p}$ cu funcţia polinomială $\mathbf{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$\mathbf{p}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$.

Atunci legea de asociere pentru T este dată detaliat de

$T\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4\right) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3$.

Se poate arăta că $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_4[x], \mathbb{R}_3[x])$ şi folosind legea de asociere dată detaliat.

•Se determină ${}_{C_1}(T)_{C_2}$.

<u>modul 1:</u> Se calculează T aplicat în vectorii bazei $C_1 = \left(1, x, x^2, x^3, x^4\right) \subseteq \mathbb{X} = \mathbb{R}_4[x]$ şi se exprimă în raport cu vectorii bazei $C_2 = \left(1, x, x^2, x^3\right) \subseteq \mathbb{Y} = \mathbb{R}_3[x]$.

$$\begin{cases} T(\mathbf{p}_0) = (1)' = 0 = 0\mathbf{q}_0 + 0\mathbf{q}_1 + 0\mathbf{q}_2 + 0\mathbf{q}_3; \\ T(\mathbf{p}_1) = (x)' = 1 = 1\mathbf{q}_0 + 0\mathbf{q}_1 + 0\mathbf{q}_2 + 0\mathbf{q}_3; \\ T(\mathbf{p}_2) = \left(x^2\right)' = 2x = 0\mathbf{q}_0 + 2\mathbf{q}_1 + 0\mathbf{q}_2 + 0\mathbf{q}_3; \\ T(\mathbf{p}_3) = \left(x^3\right)' = 3x^2 = 0\mathbf{q}_0 + 0\mathbf{q}_1 + 3\mathbf{q}_2 + 0\mathbf{q}_3; \\ T(\mathbf{p}_4) = \left(x^4\right)' = 4x^3 = 0\mathbf{q}_0 + 2\mathbf{q}_1 + 0\mathbf{q}_2 + 4\mathbf{q}_3; \end{cases}$$

Se scriu pe coloană coeficienţii pe linie ai descompunerilor de mai sus, obţinând

$${}_{C_1}(T)_{C_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

<u>modul 2:</u> Se descompune în raport cu vectorii bazei $C_1 = \left(1, x, x^2, x^3, x^4\right) \subseteq \mathbb{X} = \mathbb{R}_4[x]$, respectiv în raport cu vectorii bazei $C_2 = \left(1, x, x^2, x^3\right) \subseteq \mathbb{Y} = \mathbb{R}_3[x]$

$\mathbf{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = a_0\mathbf{p}_0 + a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p}_2 + a_3\mathbf{p}_3 + a_4\mathbf{p}_4$;

$T(\mathbf{p}) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 = a_1\mathbf{q}_0 + 2a_2\mathbf{q}_1 + 3a_3\mathbf{q}_2 + 4a_4\mathbf{q}_3$,

şi se observă că

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 3a_3 \\ 4a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \Rightarrow {}_{C_1}(T)_{C_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cum $\operatorname{rang}_{C_1}(T)_{C_2} = 4 = m$, m e numărul de linii din matrice, $m \le n \Rightarrow T$ este aplicaţie liniară surjectivă (epimorfism), dar nu este aplicaţie injectivă.

Exerciţiul 6. Fie $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4\right)$ o aplicaţie liniară definită astfel
$T\left((x_1, x_2, x_3, x_4)\right) = (x_2 + x_3, -x_1 - x_2 + x_4, x_1 + x_2 - x_4, -x_1 + x_3 + x_4)$.
Să se determine $\ker T, \operatorname{Im} T$. ◯Să se observe că $\ker T = \operatorname{Im} T$.
Rezolvare. Se poate arăta că $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4\right)$ (se verifică (i), (ii)).
• $\ker T = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 ; T(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}^4}\right\}$
Se caută $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ astfel încât
$(x_2 + x_3, -x_1 - x_2 + x_4, x_1 + x_2 - x_4, -x_1 + x_3 + x_4) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Sistemul anterior este liniar omogen în necunoscutele (x_1, x_2, x_3, x_4).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{l_3 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_4}}{\overset{\text{pas intermediar}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{l_1 \\ l_2 \\ l_1 + l_3 \\ l_1 + l_4}}{\overset{pas1}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 - l_2}}{\overset{pas2}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ \quad\quad x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha + \beta \\ x_2 = -\alpha \\ x_3 = \alpha \in \mathbb{R} \\ x_4 = \beta \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\ker T = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 ; \mathbf{x} = (\alpha + \beta, -\alpha, \alpha, \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$$
$$= \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 ; \mathbf{x} = \alpha \underbrace{(1, -1, 1, 0)}_{\mathbf{u}_1} + \beta \underbrace{(1, 0, 0, 1)}_{\mathbf{u}_2}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$$
$$= [(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)] \neq \{\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}^4}\}$$

$\Rightarrow T$ nu este aplicaţie injectivă.

Se observă că $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ este o bază în $\ker T$ (este sistem de vectori liniar independenţi şi este sistem de generatori pentru $\ker T$ din algoritm) $\Rightarrow \operatorname{def} T = \dim_{\mathbb{R}} (\ker T) = 2$.
• $\operatorname{Im} T = \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^4 ; \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \text{ a.î. } T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\right\}$
Se caută $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$ astfel încât să existe $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ cu proprietatea
$(x_2 + x_3, -x_1 - x_2 + x_4, x_1 + x_2 - x_4, -x_1 + x_3 + x_4) = (y_1, y_2, y_3, y_4) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = y_1 \\ -x_1 - x_2 + x_4 = y_2 \\ x_1 + x_2 - x_4 = y_3 \\ -x_1 + x_3 + x_4 = y_4 \end{cases}.$$

Sistemul anterior este liniar neomogen cu necunoscutele (x_1, x_2, x_3, x_4) şi cu cu parametrii (y_1, y_2, y_3, y_4).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & y_1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & y_2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & y_3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & y_4 \end{array}\right) \underset{\begin{array}{c} l_3 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_4 \end{array}}{\overset{\text{pas intermediar}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & y_3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & y_1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & y_2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & y_4 \end{array}\right) \underset{\begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \\ l_1 + l_3 \\ l_1 + l_4 \end{array}}{\overset{pas1}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & y_3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_2 + y_3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & y_3 + y_4 \end{array}\right) \underset{\begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 - l_2 \end{array}}{\overset{pas2}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & y_3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_2 + y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y_1 + y_3 + y_4 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = y_3 \\ x_2 + x_3 = y_1 \\ 0 = y_2 + y_3 \\ 0 = -y_1 + y_3 + y_4 \end{cases}$$

Sistemul anterior în necunoscutele (x_1, x_2, x_3, x_4) şi cu parametrii (y_1, y_2, y_3, y_4) este compatibil $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} y_2 + y_3 = 0 \\ -y_1 + y_3 + y_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \gamma + \delta \\ y_2 = -\gamma \\ y_3 = \gamma \in \mathbb{R} \\ y_4 = \delta \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\operatorname{Im} T = \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^4; \mathbf{y} = (\gamma + \delta, -\gamma, \gamma, \delta), \gamma, \delta \in \mathbb{R}\right\}$$
$$= \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^4; \mathbf{x} = \gamma\underbrace{(1, -1, 1, 0)}_{\mathbf{v}_1} + \delta\underbrace{(1, 0, 0, 1)}_{\mathbf{v}_2}, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\right\}$$
$$= [(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)] \neq \mathbb{R}^4 \Rightarrow T \text{ nu este aplicaţie surjectivă.}$$

Se observă că $B' = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ este o bază în $\operatorname{Im} T$ (este sistem de vectori liniar independenţi şi este sistem de generatori pentru $\operatorname{Im} T$ din algoritm) $\Rightarrow \operatorname{rang} T = \dim_{\mathbb{R}} (\operatorname{Im} T) = 2$.

• Este verificată teorema rangului şi a defectului

$\operatorname{def} T + \operatorname{rang} T = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4$ $(2 + 2 = 4)$.

Observaţie. Fie $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ doua sisteme de vectori liniar independenţi din $(\mathbb{X}, +, \cdot, \mathbb{K})$ (se poate ca $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \neq \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$). Atunci

$[(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)] = [(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)] \Leftrightarrow$

$([(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)] \subseteq [(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)]$ şi $[(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)] \supseteq [(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)]) \Leftrightarrow$

$(\forall \mathbf{u} \in [(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)] \Rightarrow \mathbf{u} \in (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2))$ şi $\forall \mathbf{v} \in [(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)] \Rightarrow \mathbf{v} \in [(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)]] \Leftrightarrow$

$(\mathbf{u}_1 \in [(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)], \mathbf{u}_2 \in [(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)]$ şi $\mathbf{v}_1 \in [(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)], \mathbf{v}_2 \in [(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)])$

Exerciţiul 8. Fie spaţiul liniar real $\left(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R}\right)$ cu bazele

$B_1 = (\mathbf{u}_1 = (1, 2, -2), \mathbf{u}_2 = (0, 2, -1), \mathbf{u}_3 = (1, -2, 1))$,

$B_2 = (\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (-1, 1, -1), \mathbf{v}_3 = (2, 0, -1))$.

Să se determine aplicaţia liniară T care duce vectorii bazei B_1 în vectorii bazei B_2. Să se determine matricele aplicaţiei liniare în bazele propuse ${}_{B_1}(T)_{B_2}$, ${}_{C}(T)_{C}$. Să se determine $T(\mathbf{x})$, unde $\mathbf{x} = (2, 2, 2)$, coordonatele fiind date în baza canonică din $\mathbb{R}^3$.

Rezolvare. •Se ştie că

$$\begin{cases} T(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3; \\ T(\mathbf{u}_2) = 0\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3; \\ T(\mathbf{u}_3) = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3; \end{cases}$$

Se scriu pe coloană coeficienţii pe linie ai descompunerilor de mai sus, obţinând

$${}_{B_1}(T)_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

•Se determină ${}_C(T)_C$.
modul 1, modul 2: imposibil, nu se cunoaşte legea de asociere;
modul 3: Se foloseşte legea de schimbare a matricei unei aplicaţii liniare la o schimbare de baze⇒
$${}_C(T)_C = ({}_{B_2}A_C)^{-1} \cdot {}_{B_1}(T)_{B_2} \cdot {}_{B_1}A_C,$$
unde ${}_{B_1}A_C$ este matricea de trecere de la baza B_1 la baza C, iar ${}_{B_2}A_C$ este matricea de trecere de la baza B_2 la baza C. Chiar
$${}_C(T)_C = {}_C A_{B_2} \cdot {}_{B_1}(T)_{B_2} \cdot {}_{B_1}A_C.$$
Cum
$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v}_2 = 0\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \end{cases} \Rightarrow {}_C A_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$
Cum
$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{u}_2 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{u}_3 = 2\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \end{cases} \Rightarrow {}_C A_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Se calculează şi $({}_C A_{B_1})^{-1} = {}_{B_1}A_C$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim ... \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$
$${}_{B_1}A_C = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$
Atunci ${}_C(T)_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

•Se determină $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ care duce vectorii bazei B_1 în vectorii bazei B_2, adică se determină legea de asociere a aplicaţiei liniare ce are ${}_{B_1}(T)_{B_2} = I_3$ şi, conform celor anterioare, ${}_C(T)_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Fie $\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{X} = \mathbb{R}^3$. Se determină $T(\mathbf{x}) =?$, adică $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ astfel încât
$$T(\mathbf{x}) = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3.$$
Se găseşte
$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = {}_C(T)_C \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 \end{pmatrix},$$
adică
$$T(\mathbf{x}) = (x_1 - x_2 - x_3)\mathbf{e}_1 + (x_1 + x_2 + x_3)\mathbf{e}_2 + (-2x_1 - 2x_2 - 3x_3)\mathbf{e}_3 = (x_1 - x_2 - x_3, x_1 + x_2 + x_3, -2x_1 - 2x_2 - 3x_3).$$
Atunci
$$T((2,2,2)) = (2 - 2 - 2, 2 + 2 + 2, -2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2) = (-2, 6, -14).$$

○3.4. Matricea ataşată aplicaţiei liniare compunere într-o pereche de baze

Teoremă. Fie $(\mathbb{X}, +, \cdot, \mathbb{K})$, $(\mathbb{Y}, +, \cdot, \mathbb{K})$ şi $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \mathbb{K})$ trei $\mathbb{K}$-spaţii liniare cu $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{X} = n$, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{Y} = m$ şi $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{Z} = p$. Fie $B_1 = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$ bază în $\mathbb{X}$, $B_2 = (\mathbf{v}'_1, ..., \mathbf{v}'_m)$ bază în $\mathbb{Y}$ şi $B_3 = (\mathbf{v}''_1, ..., \mathbf{v}''_p)$ bază în $\mathbb{Z}$. Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ şi $S \in \mathcal{L}(\mathbb{Y}, \mathbb{Z})$. Atunci $\exists S \circ T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Z})$ şi are loc
$${}_{B_1}(S \circ T)_{B_3} = {}_{B_2}(S)_{B_3} \cdot {}_{B_1}(T)_{B_2}.$$

Exerciţiul 11. Fie spaţiile liniare reale $(\mathbb{R}_1[x], +, \cdot, \mathbb{R})$, $(\mathbb{R}_2[x], +, \cdot, \mathbb{R})$ şi $(\mathbb{R}_3[x], +, \cdot, \mathbb{R})$. Se definesc aplicaţiile:
$$T : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_2[x], \forall \mathbf{p} = a_0 + a_1x, T(\mathbf{p}) = 2a_0 - a_1x^2,$$
$$S : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x], \forall \mathbf{q} = b_0 + b_1x + b_2x^2, S(\mathbf{q}) = b_2 + b_1x^2 - 3b_0x^3.$$
a) Să se verifice că T şi S sunt aplicaţii liniare.

b) Să se determine $S \circ T$ şi să se verifice că este aplicaţie liniară.
c) Să se verifice că:

$_{C_1}(S \circ T)_{C_3} = _{C_2}(S)_{C_3} \cdot _{C_1}(T)_{C_2}$,

unde $\circ$ este operaţia de compunere a funcţiilor, iar $\cdot$ este operaţia de înmulţire a matricelor, $C_1 = (1, x)$ este baza canonică din $(\mathbb{R}_1[x], +, \cdot, \mathbb{R})$, $C_2 = \left(1, x, x^2\right)$ este baza canonică din $(\mathbb{R}_2[x], +, \cdot, \mathbb{R})$, $C_3 = \left(1, x, x^2, x^3\right)$ este baza canonică din $(\mathbb{R}_3[x], +, \cdot, \mathbb{R})$.

Rezolvare. a) Se verifică axiomele:
(i) $\forall (\mathbf{p}, \widetilde{\mathbf{p}}) \in (\mathbb{R}_1[x])^2 : T(\mathbf{p} + \widetilde{\mathbf{p}}) = T(\mathbf{p}) + T(\widetilde{\mathbf{p}})$.
Fie $\forall \mathbf{p} = a_0 + a_1 x \in \mathbb{R}_1[x], \forall \widetilde{\mathbf{p}} = \widetilde{a}_0 + \widetilde{a}_1 x \in \mathbb{R}_1[x] \Rightarrow$

$T(\mathbf{p} + \widetilde{\mathbf{p}}) = T(a_0 + a_1 x + \widetilde{a}_0 + \widetilde{a}_1 x) = T((a_0 + \widetilde{a}_0) + (a_1 + \widetilde{a}_1) x) =$
$= 2(a_0 + \widetilde{a}_0) - (a_1 + \widetilde{a}_1) x^2 = M_1$.
$T(\mathbf{p}) + T(\widetilde{\mathbf{p}}) = T(a_0 + a_1 x) + T(\widetilde{a}_0 + \widetilde{a}_1 x) =$
$= 2a_0 - a_1 x^2 + 2\widetilde{a}_0 - \widetilde{a}_1 x^2 = M_2$.

Se observă că $M_1 = M_2 \Rightarrow$ (i) este verificată.
(ii) $\forall (\alpha, \mathbf{p}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_1[x], T(\alpha \mathbf{p}) = \alpha T(\mathbf{p})$.
Fie $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{p} = a_0 + a_1 x \in \mathbb{R}_1[x] \Rightarrow$

$T(\alpha \mathbf{p}) = T(\alpha(a_0 + a_1 x)) = T((\alpha a_0) + (\alpha a_1) x) =$
$= 2(\alpha a_0) - (\alpha a_1) x^2 = M_1$.
$\alpha T(\mathbf{p}) = \alpha T(a_0 + a_1 x) =$
$= \alpha\left(2a_0 - a_1 x^2\right) = M_2$.

Se observă că $M_1 = M_2 \Rightarrow$ (ii) este verificată.
Din (i) şi (ii) $\Rightarrow T$ este aplicaţie liniară, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_1[x], \mathbb{R}_2[x])$.
Analog $\Rightarrow S$ este aplicaţie liniară, $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}_3[x])$.

b)
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}_1[x] \arrow[r, "T"] \arrow[rrr, bend right, dashed, "S\circ T"'] & \mathbb{R}_2[x] = & \mathbb{R}_2[x] \arrow[r, "S"] & \mathbb{R}_3[x] \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \exists S \circ T : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_3[x]$, $\forall \mathbf{p} = a_0 + a_1 x \in \mathbb{R}_1[x]$,
$= (S \circ T)(\mathbf{p}) = S(T(\mathbf{p})) = S\left(2a_0 - a_1 x^2\right) =$
$= (-a_1) + 0x^2 - 3(2a_0) x^3 = -a_1 - 6a_0 x^3$.

Cum $\mathbb{R}_1[x] \xrightarrow{S} \mathbb{R}_3[x] \subsetneqq \mathbb{R}_1[x] \xrightarrow{T} \mathbb{R}_2[x]$, de fapt $\operatorname{Im} S \subsetneqq \mathbb{R}_1[x] \Rightarrow \nexists T \circ S$.

Se verifică axiomele de liniaritate pentru $S \circ T : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_3[x], \forall \mathbf{p} = a_0 + a_1 x \in \mathbb{R}_1[x]$,
$(S \circ T)(\mathbf{p}) = -a_1 - 6a_0 x^3$.
(i) $\forall (\mathbf{p}, \widetilde{\mathbf{p}}) \in (\mathbb{R}_1[x])^2 : (S \circ T)(\mathbf{p} + \widetilde{\mathbf{p}}) = T(\mathbf{p}) + T(\widetilde{\mathbf{p}})$.
Fie $\forall \mathbf{p} = a_0 + a_1 x \in \mathbb{R}_1[x], \forall \widetilde{\mathbf{p}} = \widetilde{a}_0 + \widetilde{a}_1 x \in \mathbb{R}_1[x] \Rightarrow$

$(S \circ T)(\mathbf{p} + \widetilde{\mathbf{p}}) = (S \circ T)(a_0 + a_1 x + \widetilde{a}_0 + \widetilde{a}_1 x) = (S \circ T)((a_0 + \widetilde{a}_0) + (a_1 + \widetilde{a}_1) x) =$
$= -(a_1 + \widetilde{a}_1) - 6(a_0 + \widetilde{a}_0) x^3 = M_1$.
$(S \circ T)(\mathbf{p}) + (S \circ T)(\widetilde{\mathbf{p}}) = (S \circ T)(a_0 + a_1 x) + (S \circ T)(\widetilde{a}_0 + \widetilde{a}_1 x) =$
$= -a_1 - 6a_0 x^3 - \widetilde{a}_1 - 6\widetilde{a}_0 x^3 = M_2$.

Se observă că $M_1 = M_2 \Rightarrow$ (i) este verificată.
(ii) $\forall (\alpha, \mathbf{p}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_1[x], (S \circ T)(\alpha \mathbf{p}) = \alpha T(\mathbf{p})$.
Fie $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{p} = a_0 + a_1 x \in \mathbb{R}_1[x] \Rightarrow$

$(S \circ T)(\alpha \mathbf{p}) = T(\alpha(a_0 + a_1 x)) = T((\alpha a_0) + (\alpha a_1) x) =$
$= -(\alpha a_1) - 6(\alpha a_0) x^3 = M_1$.
$\alpha(S \circ T)(\mathbf{p}) = \alpha T(a_0 + a_1 x) =$
$= \alpha\left(-a_1 - 6a_0 x^3\right) = M_2$.

Se observă că $M_1 = M_2 \Rightarrow$ (ii) este verificată.
Din (i) şi (ii) $\Rightarrow S \circ T$ este aplicaţie liniară, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_1[x], \mathbb{R}_3[x])$.
Se putea afirma direct că $S \circ T$ este aplicaţie liniară, conform Teoremei, deoarece T este aplicaţie liniară şi S este aplicaţie liniară.

c) •Se determină $_{C_1}(T)_{C_2}$.
<u>modul 1:</u> Se calculează T aplicat în vectorii bazei $C_1 = (1, x) \subseteq \mathbb{X} = \mathbb{R}_1[x]$ şi se exprimă în raport cu vectorii bazei $C_2 = \left(1, x, x^2\right) \subseteq \mathbb{Y} = \mathbb{R}_2[x]$

$$\begin{cases} T(\mathbf{p}_0) = T(1) = 2 = 2\mathbf{q}_0 + 0\mathbf{q}_1 + 0\mathbf{q}_2; \\ T(\mathbf{p}_1) = T(x) = -x^2 = 0\mathbf{q}_0 + 0\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2; \end{cases}$$

Se scriu pe coloană coeficienţii pe linie ai descompunerilor de mai sus, obţinând

$${}_{C_1}(T)_{C_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>modul 2:</u> Se descompune un vector oarecare **p** în raport cu vectorii bazei $C_1 = (1,x) \subseteq \mathbb{X} = \mathbb{R}_1[x]$, respectiv vectorul $T(\mathbf{p})$ în raport cu vectorii bazei $C_2 = (1,x,x^2) \subseteq \mathbb{Y} = \mathbb{R}_2[x]$

$\mathbf{p} = a_0 + a_1 x = a_0\mathbf{p}_0 + a_1\mathbf{p}_1;$

$T(\mathbf{p}) = 2a_0 - a_1 x^2 = 2a_0\mathbf{q}_0 + 0\mathbf{q}_1 - a_1\mathbf{q}_2,$

şi se observă că

$$\begin{pmatrix} 2a_0 \\ 0 \\ -a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \Rightarrow {}_{C_1}(T)_{C_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

•Se determină ${}_{C_2}(S)_{C_3}$.

<u>modul 1:</u> Se calculează S aplicat în vectorii bazei $C_2 = (1,x,x^2) \subseteq \mathbb{Y} = \mathbb{R}_2[x]$ şi se exprimă în raport cu vectorii bazei $C_3 = (1,x,x^2,x^3) \subseteq \mathbb{Z} = \mathbb{R}_3[x]$

$$\begin{cases} S(\mathbf{q}_0) = S(1) = -3x^3 = 0\mathbf{r}_0 + 0\mathbf{r}_1 + 0\mathbf{r}_2 - 3\mathbf{r}_3; \\ S(\mathbf{q}_1) = S(x) = x^2 = 0\mathbf{r}_0 + 0\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + 0\mathbf{r}_3; \\ S(\mathbf{q}_2) = S(x^2) = 1 = \mathbf{r}_0 + 0\mathbf{r}_1 + 0\mathbf{r}_2 + 0\mathbf{r}_3; \end{cases}$$

Se scriu pe coloană coeficienţii pe linie ai descompunerilor de mai sus, obţinând

$${}_{C_2}(S)_{C_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>modul 2:</u> Se descompune un vector oarecare **q** în raport cu vectorii bazei $C_2 = (1,x,x^2) \subseteq \mathbb{Y} = \mathbb{R}_2[x]$, respectiv vectorul $S(\mathbf{q})$ în raport cu vectorii bazei $C_3 = (1,x,x^2,x^3) \subseteq \mathbb{Z} = \mathbb{R}_3[x]$

$\mathbf{q} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = b_0\mathbf{q}_0 + b_1\mathbf{q}_1 + b_2\mathbf{q}_2;$

$S(\mathbf{q}) = b_2 + b_1 x^2 - 3b_0 x^3 = b_2\mathbf{r}_0 + 0\mathbf{r}_1 + b_1\mathbf{r}_2 - 3b_0\mathbf{r}_3,$

şi se observă că

$$\begin{pmatrix} b_2 \\ 0 \\ b_1 \\ -3b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow {}_{C_2}(S)_{C_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

•Se determină ${}_{C_1}(S \circ T)_{C_3}$.

<u>modul 1:</u> Se calculează $S \circ T$ aplicat în vectorii bazei $C_1 = (1,x) \subseteq \mathbb{X} = \mathbb{R}_1[x]$ şi se exprimă în raport cu vectorii bazei $C_3 = (1,x,x^2,x^3) \subseteq \mathbb{Z} = \mathbb{R}_3[x]$

$$\begin{cases} (S \circ T)(\mathbf{p}_0) = (S \circ T)(1) = -6x^3 = 0\mathbf{r}_0 + 0\mathbf{r}_1 + 0\mathbf{r}_2 - 6\mathbf{r}_3; \\ (S \circ T)(\mathbf{p}_1) = (S \circ T)(x) = -1 = -\mathbf{r}_0 + 0\mathbf{r}_1 + 0\mathbf{r}_2 + 0\mathbf{r}_3; \end{cases}$$

Se scriu pe coloană coeficienţii pe linie ai descompunerilor de mai sus, obţinând

$${}_{C_1}(S \circ T)_{C_3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>modul 2:</u> Se descompune un vector oarecare **p** în raport cu vectorii bazei $C_1 = (1,x) \subseteq \mathbb{X} = \mathbb{R}_1[x]$, respectiv vectorul $(S \circ T)(\mathbf{p})$ în raport cu vectorii bazei $C_3 = (1,x,x^2,x^3) \subseteq \mathbb{Z} = \mathbb{R}_3[x]$

$\mathbf{p} = a_0 + a_1 x = a_0\mathbf{p}_0 + a_1\mathbf{p}_1;$

$(S \circ T)(\mathbf{p}) = -a_1 - 6a_0 x^3 = -a_1\mathbf{r}_0 + 0\mathbf{r}_1 + 0\mathbf{r}_2 - 6a_0\mathbf{r}_3,$

şi se observă că

$$\begin{pmatrix} -a_1 \\ 0 \\ 0 \\ -6a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \Rightarrow {}_{C_1}(S \circ T)_{C_3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

•Se verifică

$$_{C_2}(S)_{C_3} \cdot {}_{C_1}(T)_{C_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} = {}_{C_1}(S \circ T)_{C_3}$$

○3.5. Matricea ataşată aplicaţiei liniare inverse intr-o pereche de baze

Teoremă. Fie $(\mathbb{X}, +, \cdot, \mathbb{K})$ şi $(\mathbb{Y}, +, \cdot, \mathbb{K})$ două $\mathbb{K}$-spaţii liniare cu $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{X} = n$ şi $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{Y} = n$. Fie $B_1 = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$ bază în $\mathbb{X}$ şi $B_2 = (\mathbf{v}'_1, ..., \mathbf{v}'_n)$ bază în $\mathbb{Y}$. Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ un izomorfism. Atunci $\exists T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$ şi are loc

$_{B_2}\left(T^{-1}\right)_{B_1} = \left({}_{B_1}(T)_{B_2}\right)^{-1}$.

Exerciţiul 13. Fie spaţiul liniar real $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R}\right)$. Se defineşte funcţia

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2), T(\mathbf{x}) = (x_1 - 2x_2, x_2 - x_1)$,

a) Să se verifice că T este aplicaţie liniară.

b) Să se studieze dacă T este inversabilă şi, dacă da, să se determine T^{-1} şi să se arate că este liniară.

c) Să se verifice dacă $_C\left(T^{-1}\right)_C = \left({}_C(T)_C\right)^{-1}$.

Rezolvare. a) Se arată că T este aplicaţie liniară. Se verifică axiomele:

(i) $\forall (\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{x}}) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2 : T(\mathbf{x} + \widetilde{\mathbf{x}}) = T(\mathbf{x}) + T(\widetilde{\mathbf{x}})$.

Fie $\forall (\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{x}}) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2 \Rightarrow$

$T(\mathbf{x} + \widetilde{\mathbf{x}}) = T((x_1, x_2) + (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)) = T((x_1 + \widetilde{x}_1, x_2 + \widetilde{x}_2)) =$

$= ((x_1 + \widetilde{x}_1) - 2(x_2 + \widetilde{x}_2), (x_2 + \widetilde{x}_2) - (x_1 + \widetilde{x}_1)) = M_1$.

$T(\mathbf{x}) + T(\widetilde{\mathbf{x}}) = T((x_1, x_2)) + T((\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)) =$

$= (x_1 - 2x_2, x_2 - x_1) + (\widetilde{x}_1 - 2\widetilde{x}_2, 4\widetilde{x}_2 - 2\widetilde{x}_1) = M_2$.

Se observă că $M_1 = M_2 \Rightarrow$ (i) este verificată.

(ii) $\forall (\alpha, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, T(\alpha \mathbf{x}) = \alpha T(\mathbf{x})$.

Fie $\forall (\alpha, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \Rightarrow$

$T(\alpha \mathbf{x}) = T(\alpha (x_1, x_2)) = T((\alpha x_1, \alpha x_2)) =$

$= ((\alpha x_1) - 2(\alpha x_2), (\alpha x_2) - (\alpha x_1)) = M_1$.

$\alpha T(\mathbf{x}) = \alpha T((x_1, x_2, x_3)) =$

$= \alpha (x_1 - 2x_2, x_2 - x_1) = M_2$.

Se observă că $M_1 = M_2 \Rightarrow$ (ii) este verificată.

Din (i) şi (ii) $\Rightarrow T$ este aplicaţie liniară, $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$.

b) •Se arată că T este inversabilă $\Leftrightarrow$ bijectivă.

<u>modul 1</u> (cu $\ker T, \operatorname{Im} T$)

• • $\ker T = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 ; T(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}^2}\right\}$

Se caută $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ astfel încât

$(x_1 - 2x_2, x_2 - x_1) = (0, 0) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_2 - x_1 = 0 \end{cases}.$$

Sistemul anterior este liniar omogen în necunoscutele (x_1, x_2, x_3). Se aplică metoda Gauss sau

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow (x_1, x_2) = (0, 0)$ unică soluţie.

$\ker T = \{(0, 0)\} = \{\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}^2}\} \Rightarrow T$ este aplicaţie liniară injectivă (monomorfism).

$\operatorname{def} T = \dim_{\mathbb{R}} (\ker T) = \dim_{\mathbb{R}} \{\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}^2}\} \overset{\text{convenţie}}{=} 0$.

• • $\operatorname{Im} T = \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 ; \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ a.î. } T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\right\}$

Se caută $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ astfel încât să existe $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ cu proprietatea

$(x_1 - 2x_2, x_2 - x_1) = (y_1, y_2) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = y_1 \\ x_2 - x_1 = y_2 \end{cases}.$$

Sistemul anterior este liniar neomogen cu necunoscutele (x_1, x_2) şi cu parametrii (y_1, y_2).

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists\,(x_1, x_2)$ soluţie a sistemului, $\forall\,(y_1, y_2)$ parametri.

$\operatorname{Im} T = \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2; \mathbf{y} = (y_1, y_2) \text{ oarecare}\right\} = \mathbb{R}^2 \Rightarrow T$ este aplicaţie liniară surjectivă (epimorfism).

O bază în $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^2$ este $C = (\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1))$ baza canonică.

$\operatorname{rang} T = \dim_{\mathbb{R}} (\operatorname{Im} T) = 2.$

Deci T este aplicaţie liniară bijectivă (izomorfism, este chiar automorfism) $\Rightarrow T$ este aplicaţie liniară inversabilă.

<u>modul 2.</u> (cu $\operatorname{rang}_C (T)_C$)

••Se determină ${}_C(T)_C$.

<u>modul 2.1:</u> Se calculează T aplicat în vectorii bazei $C \subseteq \mathbb{X} = \mathbb{R}^2$ şi se exprimă în raport cu vectorii bazei $C \subseteq \mathbb{Y} = \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} T(\mathbf{e}_1) = T((1, 0)) = (1, -1) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2; \\ T(\mathbf{e}_2) = T((0, 1)) = (-2, 1) = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2; \end{cases}$$

Se scriu pe coloană coeficienţii pe linie ai descompunerilor de mai sus, obţinând

$${}_C(T)_C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>modul 2.2:</u> Se descompune un vector oarecare $\mathbf{x}$ în raport cu vectorii bazei $C \subseteq \mathbb{X} = \mathbb{R}^3$, respectiv vectorul $T(\mathbf{x})$ în raport cu vectorii bazei $C \subseteq \mathbb{Y} = \mathbb{R}^3$

$\mathbf{x} = (x_1, x_2) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2;$

$T(\mathbf{x}) = (x_1 - 2x_2, x_2 - x_1) = (x_1 - 2x_2)\,\mathbf{e}_1 + (x_2 - x_1)\,\mathbf{e}_2,$

şi se observă că

$$\begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow {}_C(T)_C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

• • $\operatorname{rang}_C (T)_C = 2 = n = m \Rightarrow T$ este aplicaţie liniară bijectivă (izomorfism, este chiar automorfism) $\Rightarrow T$ este aplicaţie liniară inversabilă.

•Se determină $T^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\forall \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, T^{-1}(\mathbf{y}) = ?$.

Fie $\forall \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Se caută $T^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ astfel încât $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, adică

$$(x_1 - 2x_2, x_2 - x_1) = (y_1, y_2) \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = y_1 \\ x_2 - x_1 = y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -y_1 - 2y_2 \\ x_2 = -y_1 - y_2 \end{cases}$$

Aparent este acelaşi sistem cu cel de la determinarea $\operatorname{Im} T$. Aici însă (y_1, y_2) sunt daţi şi oarecare şi se caută (x_1, x_2).

Se obţine $T^{-1}(\mathbf{y}) = (x_1, x_2) = (-y_1 - 2y_2, -y_1 - y_2)$.

•T^{-1} este aplicaţie liniară. Se verifică (i) şi (ii) sau rezultă direct din faptul că T este aplicaţie liniară, conform teoremei.

c) •Se determină ${}_C(T)_C$ ca la b), modul 2.

•Se determină ${}_C\left(T^{-1}\right)_C$.

<u>modul 1:</u> Se calculează T^{-1} aplicat în vectorii bazei $C \subseteq \mathbb{Y} = \mathbb{R}^2$ şi se exprimă în raport cu vectorii bazei $C \subseteq \mathbb{X} = \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} T^{-1}(\mathbf{e}_1) = T^{-1}((1, 0)) = (-1, -1) = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2; \\ T^{-1}(\mathbf{e}_2) = T^{-1}((0, 1)) = (-2, -1) = -2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2; \end{cases}$$

Se scriu pe coloană coeficienţii pe linie ai descompunerilor de mai sus, obţinând

$${}_C\left(T^{-1}\right)_C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

<u>modul 2:</u> Se descompune în raport cu vectorii bazei $C \subseteq \mathbb{Y} = \mathbb{R}^3$, respectiv în raport cu vectorii bazei $C \subseteq \mathbb{X} = \mathbb{R}^3$:

$\mathbf{y} = (y_1, y_2) = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2;$

$T^{-1}(\mathbf{y}) = (-y_1 - 2y_2, -y_1 - y_2) = (-y_1 - 2y_2)\,\mathbf{e}_1 + (-y_1 - y_2)\,\mathbf{e}_2,$

şi se observă că

$$\begin{pmatrix} -y_1 - 2y_2 \\ -y_1 - y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow {}_C\left(T^{-1}\right)_C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

•Se verifică

$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow {}_C\left(T^{-1}\right)_C = \left({}_C\left(T\right)_C\right)^{-1}.$

Obs. Dacă se ştie ${}_C\left(T\right)_C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ şi se ştie că $\text{rang}_C\left(T\right)_C = 2 = n = m$, deci T este izomorfism, atunci se poate determina legea de asociere pentru T^{-1} cerută la **b)** folosind Teorema. Într-adevăr, conform Teoremei,

$${}_C\left(T^{-1}\right)_C \overset{\text{Teorema}}{=} \left({}_C\left(T\right)_C\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Atunci, conform definiţiei pentru ${}_C\left(T^{-1}\right)_C$ $\Rightarrow$pentru $\forall \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, T^{-1}\left(\mathbf{y}\right) = \left(x_1, x_2\right)$, cu

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$T^{-1}\left(\mathbf{y}\right) = \left(x_1, x_2\right) = \left(-y_1 - 2y_2, -y_1 - y_2\right).$$

În acest caz, în loc să se verifice relaţia din enunţul de la **c)**, se utilizează la **b)** în determinarea legii de asociere pentru T^{-1}.

Exerciţiul 14. Fie spaţiile liniare reale $\left(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R}\right)$ şi $\left(\mathbb{R}_2\left[t\right], +, \cdot, \mathbb{R}\right)$. Se defineşte funcţia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2\left[t\right]$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{x} = \left(x_1, x_2, x_3\right)$,

$$T\left(\mathbf{x}\right) = \left(x_1 + x_3\right) + x_2 t - \left(x_1 + x_2\right)t^2,$$

a) Să se verifice că T este aplicaţie liniară.
b) Să se studieze dacă T este inversabilă şi, dacă da, să se determine T^{-1} şi să se arate că este liniară.
c) Să se verifice dacă ${}_{C_2}\left(T^{-1}\right)_{C_1} = \left({}_{C_1}\left(T\right)_{C_2}\right)^{-1}$, unde $C_1 = \left(\left(1,0,0\right), \left(0,1,0\right), \left(0,0,1\right)\right)$ este baza canonică din $\mathbb{R}^3$ iar $C_2 = \left(1, t, t^2\right)$ este baza canonică din $\mathbb{R}_2\left[t\right]$.

Rezolvare. a) Se arată că T este aplicaţie liniară, $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2\left[t\right]\right)$, verificând axiomele (i), (ii).
b) •Se arată că T este inversabilă $\Leftrightarrow$ bijectivă.
<u>modul 1</u> (cu $\ker T, \operatorname{Im} T$)
• $\ker T = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3; T\left(\mathbf{x}\right) = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}_2[t]}\right\}$

Se caută $\mathbf{x} = \left(x_1, x_2, x_3\right) \in \mathbb{R}^3$ astfel încât

$$\left(x_1 + x_3\right) + x_2 t - \left(x_1 + x_2\right)t^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases}.$$

Sistemul anterior este liniar omogen în necunoscutele $\left(x_1, x_2, x_3\right)$. Se aplică metoda Gauss sau

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(0,0,0\right) \text{ unică soluţie.}$$

$\ker T = \left\{\left(0,0,0\right)\right\} = \left\{\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}^3}\right\} \Rightarrow T$ este aplicaţie liniară injectivă (monomorfism).

$\operatorname{def} T = \dim_{\mathbb{R}}\left(\ker T\right) = \dim_{\mathbb{R}}\left\{\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}^3}\right\} \overset{\text{convenţie}}{=} 0.$

• $\operatorname{Im} T = \left\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}_2\left[t\right]; \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ a.î. } T\left(\mathbf{x}\right) = \mathbf{p}\right\}$

Se caută $\mathbf{p} = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \in \mathbb{R}_2\left[t\right]$ astfel încât să existe $\mathbf{x} = \left(x_1, x_2, x_3\right) \in \mathbb{R}^3$ cu proprietatea

$$\left(x_1 + x_3\right) + x_2 t - \left(x_1 + x_2\right)t^2 = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x_1 + x_3 = b_0 \\ x_2 = b_1 \\ -x_1 - x_2 = b_2 \end{cases}.$$

Sistemul anterior este liniar neomogen în necunoscutele $\left(x_1, x_2, x_3\right)$ cu parametrii $\left(b_0, b_1, b_2\right)$. Se aplică metoda Gauss sau

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists \left(x_1, x_2, x_3\right) \text{ soluţie a sistemului, } \forall \left(b_0, b_1, b_2\right) \text{ parametri.}$$

$\operatorname{Im} T = \left\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}_2[t]\,; \mathbf{p} = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \text{ oarecare}\right\} = \mathbb{R}_2[t] \Rightarrow T$ este aplicaţie liniară surjectivă (epimorfism).

O bază în $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}_2[t]$ este $C_2 = \left(1, t, t^2\right)$ baza canonică.

$\operatorname{rang} T = \dim_{\mathbb{R}} (\operatorname{Im} T) = 3.$

Deci T este aplicaţie liniară bijectivă (izomorfism) $\Rightarrow T$ este aplicaţie liniară inversabilă.

<u>modul 2.</u> (cu $\operatorname{rang}_{C_1}(T)_{C_2}$)

••Se determină ${}_{C_1}(T)_{C_2}$.

<u>modul 2.1:</u> Se calculează T aplicat în vectorii bazei $C_1 \subseteq \mathbb{X} = \mathbb{R}^3$ şi se exprimă în raport cu vectorii bazei $C_2 \subseteq \mathbb{Y} = \mathbb{R}_2[t]$

$$\begin{cases} T(\mathbf{e}_1) = T((1,0,0)) = 1 - t^2 = \mathbf{p}_0 + 0\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2; \\ T(\mathbf{e}_2) = T((0,1,0)) = t - t^2 = 0\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2; \\ T(\mathbf{e}_3) = T((0,0,1)) = 1 = \mathbf{p}_0 + 0\mathbf{p}_1 + 0\mathbf{p}_2; \end{cases}$$

Se scriu pe coloană coeficienţii pe linie ai descompunerilor de mai sus, obţinând

$${}_{C_1}(T)_{C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>modul 2.2:</u> Se descompune un vector oarecare $\mathbf{x}$ în raport cu vectorii bazei $C_1 \subseteq \mathbb{X} = \mathbb{R}^3$, respectiv vectorul $T(\mathbf{x})$ în raport cu vectorii bazei $C_2 \subseteq \mathbb{Y} = \mathbb{R}_2[t]$

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3;$

$T(\mathbf{x}) = (x_1 + x_3) + x_2 t - (x_1 + x_2) t^2 =$

$(x_1 + x_3)\mathbf{p}_0 + x_2\mathbf{p}_1 - (x_1 + x_2)\mathbf{p}_2,$

şi se observă că

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow {}_{C_1}(T)_{C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

• • $\operatorname{rang}_{C_1}(T)_{C_2} = 3 = n = m \Rightarrow T$ este aplicaţie liniară bijectivă (izomorfism) $\Rightarrow T$ este aplicaţie liniară inversabilă.

•Se determină $T^{-1} : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}^3$, $\forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}_2[t], T^{-1}(\mathbf{p}) = ?$.

Fie $\forall \mathbf{p} = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \in \mathbb{R}_2[t]$. Se caută $T^{-1}(\mathbf{p}) = \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ astfel încât $T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}$, adică

$(x_1 + x_3) + x_2 t - (x_1 + x_2) t^2 = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = b_0 \\ x_2 = b_1 \\ -x_1 - x_2 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -b_1 - b_2 \\ x_2 = b_1 \\ x_3 = b_0 + b_1 + b_2 \end{cases}$$

Aparent este acelaşi sistem cu cel de la determinarea $\operatorname{Im} T$. Aici însă (b_0, b_1, b_2) sunt daţi şi oarecare şi se caută (x_1, x_2, x_3).

S-a obţinut $T^{-1}(\mathbf{p}) = (x_1, x_2, x_3) = (-b_1 - b_2, b_1, b_0 + b_1 + b_2)$.

•T^{-1} este aplicaţie liniară. Se verifică (i) şi (ii) sau rezultă direct din faptul că T este aplicaţie liniară, conform teoremei.

c) •Se determină ${}_{C_1}(T)_{C_2}$ ca la modul 2, de la punctul **b)**.

•Se determină ${}_{C_2}\left(T^{-1}\right)_{C_1}$.

<u>modul 1:</u> Se calculează T^{-1} aplicat în vectorii bazei $C_2 \subseteq \mathbb{Y} = \mathbb{R}_2[t]$ şi se exprimă în raport cu vectorii bazei $C_1 \subseteq \mathbb{X} = \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} T^{-1}(\mathbf{p}_0) = T^{-1}(1) = (0,0,1) = 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3; \\ T^{-1}(\mathbf{p}_1) = T^{-1}(t) = (-1,1,1) = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3; \\ T^{-1}(\mathbf{p}_2) = T^{-1}\left(t^2\right) = (-1,0,1) = -\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3; \end{cases}$$

Se scriu pe coloană coeficienţii pe linie ai descompunerilor de mai sus, obţinând

$${}_{C_2}\left(T^{-1}\right)_{C_1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>modul 2:</u> Se descompune în raport cu vectorii bazei $C_2 \subseteq \mathbb{Y} = \mathbb{R}_2[t]$, respectiv în raport cu vectorii bazei $C_1 \subseteq \mathbb{X} = \mathbb{R}^3$

$\mathbf{p} = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 = b_0\mathbf{p}_0 + b_1\mathbf{p}_1 + b_2\mathbf{p}_2;$

$T^{-1}(\mathbf{p}) = (-b_1 - b_2, b_1, b_0 + b_1 + b_2) = (-b_1 - b_2)\mathbf{e}_1 + (b_1)\mathbf{e}_2 + (b_0 + b_1 + b_2)\mathbf{e}_3,$

şi se observă că

$$\begin{pmatrix} -b_1-b_2 \\ b_1 \\ b_0+b_1+b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow {}_{C_2}\left(T^{-1}\right)_{C_1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

•Se verifică

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow {}_{C_2}\left(T^{-1}\right)_{C_1} = \left({}_{C_1}(T)_{C_2}\right)^{-1}.$$

Obs. Dacă se ştie ${}_{C_1}(T)_{C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ şi se ştie că $\operatorname{rang}_{C_1}(T)_{C_2} = 3 = n = m$, deci T este izomorfism, atunci se poate determina legea de asociere pentru T^{-1} cerută la **b)** folosind Teorema. Într-adevăr, conform Teoremei,

$${}_{C_2}\left(T^{-1}\right)_{C_1} \overset{\text{Teorema}}{=} \left({}_{C_1}(T)_{C_2}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Atunci, conform definiţiei pentru ${}_{C_2}\left(T^{-1}\right)_{C_1}$ $\Rightarrow$pentru $\forall \mathbf{p} = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \in \mathbb{R}_2[t], T^{-1}(\mathbf{p}) = (x_1, x_2, x_3)$, cu

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1-b_2 \\ b_1 \\ b_0+b_1+b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$T^{-1}(\mathbf{p}) = (x_1, x_2, x_3) = (-b_1 - b_2, b_1, b_0 + b_1 + b_2).$$

În acest caz, în loc să se verifice relaţia din enunţul de la **c)**, se utilizează la **b)** în determinarea legii de asociere pentru T^{-1}.