SEMINAR NR. 7, REZOLVĂRI
Algebră liniară şi Geometrie analitică

5. VALORI ŞI VECTORI PROPRII

Preliminarii. Fie $(\mathbb{X},+,\cdot,\mathbb{K})$ un $\mathbb{K}$-spaţiu liniar şi $T:\mathbb{X}\to\mathbb{X}$ o transformare liniară, un endomorfism al spaţiului $\mathbb{X}$. Se numeşte *vector propriu* al endomorfismului T corespunzător *valorii proprii* λ *a* endomorfismului un vector $\mathbf{x}\in\mathbb{X}$, $\mathbf{x}\neq\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{X}}$ cu proprietatea că $\exists\lambda\in\mathbb{K}$ a.î. $T(\mathbf{x})=\lambda\mathbf{x}$.

Pentru $\mathbb{X}=\mathbb{V}_3$, un vector propriu pentru T este unul care nu-şi schimbă direcţia prin aplicarea transformării asupra lui.

În mecanica clasică, vectorii proprii ai ecuaţiilor de traiectorie corespund modurilor naturale de vibraţie a unui corp, iar valorile proprii frecvenţelor de vibraţie respective. În mecanica cuantică, operatorii corespund variabilelor observabile; vectorii proprii mai sunt numiţi şi stări proprii, iar valorile proprii ale operatorului reprezintă acele valori ale respectivei variabile care au probabilitate nenulă de apariţie. Mai mult, utilitatea valorilor şi vectorilor proprii apare în:

-procesarea imaginilor,

-algoritmul Page Rank pe care se bazează căutările Google,

https://www.intmath.com/matrices-determinants/8-applications-eigenvalues-eigenvectors.php

-circuite RLC;

-procese Markov

-Ingineria Structurilor- pentru determinarea frecvenţelor proprii ale vibraţiilor unor clădiri sau poduri (valorile proprii) cât şi pentru determinarea formelor acestor vibraţii (vectorii proprii).

Problemă. Fie $\mathbf{A}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ sau $\mathbb{K}=\mathbb{C}$). Se pune problema determinării (dacă există şi, dacă da, găsirea) unei matrice $\mathbf{D}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de formă *diagonală* şi a unei matrice $\mathbf{P}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, cu $\det\mathbf{P}\neq 0$, numită *matrice modală*, astfel încât

$\mathbf{A}\sim\mathbf{D}$, adică $\mathbf{A}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{P}^{-1}$ sau $\mathbf{D}=\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}$.

Definiţii şi notaţii. Fie $\mathbf{A}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Se numeşte *vector propriu al* matricei $\mathbf{A}$ corespunzător *valorii proprii* λ *a* matricei $\mathbf{A}$ un vector $\mathbf{x}\in\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$, $\mathbf{x}\neq\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})}$ pentru care $\exists\lambda\in\mathbb{K}$ a.î. $\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$.

b) Se notează cu

$\sigma(\mathbf{A})=\{\lambda\in\mathbb{K};\lambda \text{ este valoare proprie pt. } \mathbf{A}\}$, mulţimea numită *spectrul* matricei $\mathbf{A}$, cu

$\rho(\mathbf{A})=\max\{|\lambda|,\lambda\in\sigma(\mathbf{A})\}$, numărul real pozitiv numit *raza spectrală a* matricei $\mathbf{A}$ şi cu

$S_\lambda(\mathbf{A})=\{\mathbf{x}\in\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K});\mathbf{x} \text{ este vector propriu pt. } \mathbf{A} \text{ corespunzător valorii proprii } \lambda\}\cup\{\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})}\}$, subspaţiul liniar al $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ numit *subpaţiu propriu al matricei* $\mathbf{A}$ *corespunzător valorii proprii* λ.

Observaţie. $\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}\Leftrightarrow(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}_n)\mathbf{x}=\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})}$.

Sistemul liniar omogen anterior admite şi soluţii $\mathbf{x}\neq\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})}\Leftrightarrow\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}_n)=0$.

Definiţie. Polinomul $P_{\mathbf{A}}(\lambda)=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}_n)$ se numeşte *polinom caracteristic al* matricei $\mathbf{A}$. Ecuaţia $P_{\mathbf{A}}(\lambda)=0$ se numeşte *ecuaţie caracteristică a* matricei $\mathbf{A}$. Radăcinile ecuaţiei caracteristice se numesc *rădăcini caracteristice ale* matricei $\mathbf{A}$. Rădăcinile caracteristice ale matricei $\mathbf{A}$ care sunt din $\mathbb{K}$ sunt *valori proprii ale* matricei $\mathbf{A}$.

Observaţie. a) Dacă $\mathbf{x}$ este vector propriu al matricei $\mathbf{A}$ corespunzător valorii proprii λ a matricei $\mathbf{A}$ atunci $\mathbf{x}$ este vector propriu al matricei $\mathbf{A}^m$ corespunzător valorii proprii λ^m a matricei $\mathbf{A}^m$, $\forall m\in\mathbb{N}^*$.

b) Dacă $\mathbf{x}$ este vector propriu al matricei $\mathbf{A}$ corespunzător valorii proprii λ a matricei $\mathbf{A}$ atunci

$\mathbf{x}$ este vector propriu al matricei $P(\mathbf{A})$ corespunzător valorii proprii $P(\lambda)$ a matricei $P(\mathbf{A})$, $\forall P \in \mathbb{K}[t]$.
c) Dacă $\mathbf{x}$ este vector propriu al matricei $\mathbf{A}$ corespunzător valorii proprii λ a matricei $\mathbf{A}$, cu $\mathbf{A}$ matrice inversabilă, atunci $\mathbf{x}$ este vector propriu al matricei $\mathbf{A}^{-1}$ corespunzător valorii proprii λ^{-1} a matricei $\mathbf{A}^{-1}$.
d) Dacă $\mathbf{x}$ este vector propriu al matricei $\mathbf{A}$ corespunzător valorii proprii λ a matricei $\mathbf{A}$ şi $\mathbf{B} \sim \mathbf{A}$ (adică $\exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matrice inversabilă a.î. $\mathbf{B} = P^{-1}\mathbf{A}P$), atunci $\mathbf{x}$ este vector propriu al matricei $\mathbf{B}$ corespunzător valorii proprii λ a matricei $\mathbf{B}$.
e) Dacă $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ sunt vectori proprii al matricei $\mathbf{A}$ corespunzători valorii proprii λ a matricei $\mathbf{A}$, atunci $\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha}_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2$ este vector propriu al matricei $\mathbf{A}$ corespunzător valorii proprii λ a matricei $\mathbf{A}, \forall (\boldsymbol{\alpha}_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$ a.î. $\mathbf{x} \neq \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})}$.
f) Dacă $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_m$ sunt vectori proprii al matricei $\mathbf{A}$ corespunzători valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ distincte ale matricei $\mathbf{A}$, atunci

$\boldsymbol{\alpha}_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + ... + \alpha_m\mathbf{x}_m = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})} \Rightarrow (\boldsymbol{\alpha}_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{K}^m}$ este unică soluţie, $\forall m \in \mathbb{N}^*$. (l.i.)

În particular,
Subspaţiile proprii corespunzătoare valorilor proprii distincte au în comun doar vectorul nul:

$S_{\lambda_1}(\mathbf{A}) \cap S_{\lambda_2}(\mathbf{A}) = \left\{\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})}\right\}, \lambda_1 \neq \lambda_2$.

Teoremă. a) Polinomul caracteristic al matricei $\mathbf{A}$ este un polinom de grad n în nedeterminata λ cu coeficienţi din $\mathbb{K}$.
b) $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = (-1)^n \left[\lambda^n - \delta_1\lambda^{n-1} + ... + (-1)^n \delta_n\right]$, unde δ_i este suma minorilor principali de ordin i ai matricei $\mathbf{A}$.
Teoremă (Jordan). Fie $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Matricea $\mathbf{A}$ este diagonalizabilă $\Leftrightarrow$

(i) toate rădăcinile caracteristice ale matricei $\mathbf{A}$ sunt din $\mathbb{K}$ (sunt valori proprii) ;

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ valoare proprie a matricei $\mathbf{A}$, $\dim_{\mathbb{K}} S_\lambda(\mathbf{A}) = m(\lambda)$ (multiplicitatea geometrică este egală cu multiplicitatea algebrică).

Regulă. a) Dacă matricea $\mathbf{A}$ este diagonalizabilă atunci determinarea unei matrice $\mathbf{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de formă diagonală se face scriind pe diagonală valorile proprii (de atâtea ori cât este ordinul lor de multiplicitate algebrică); determinarea unei matrice modale corespunzătoare $\mathbf{P} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, cu $\det \mathbf{P} \neq 0$ se face scriind pe coloane coordonatele vectorilor proprii din bazele corespunzătoare ale $S_\lambda(\mathbf{A})$.
b) Dacă $\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1}$ atunci $\mathbf{A}^n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}^n \cdot \mathbf{P}^{-1}$.
Observaţie. Dacă $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n^s(\mathbb{K})$ este matrice simetrică, atunci $\mathbf{A}$ este ortogonal asemenea cu o matrice diagonală. Adică $\exists \mathbf{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de formă diagonală şi $\exists \mathbf{P}_o \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, cu $\det \mathbf{P}_o \neq 0$, matrice modală ortogonală ($\mathbf{P}_o^T \cdot \mathbf{P}_o = \mathbf{P}_o \cdot \mathbf{P}_o^T = \mathbf{I}_3$ sau $(\mathbf{P}_o)^{-1} = \mathbf{P}_o^T$), matrice avand pe coloane coordonate de vectori proprii ortonormaţi, astfel încăt

$\mathbf{A} \overset{o}{\sim} \mathbf{D}$, adică $\mathbf{A} = \mathbf{P}_o \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}_o^T$ sau $\mathbf{D} = \mathbf{P}_o^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_o$.

Teoremă (Cayley-Hamilton). $\forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $P_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

https://www.youtube.com/watch?v=8F0gdO643Tc

Exerciţiul 1. Se consideră matricea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Să se studieze dacă $\mathbf{A}$ este matrice diagonalizabilă şi, dacă da, să se determine o matrice diagonală asemenea şi o matrice modală corespunzatoare
(să se determine valorile proprii ale matricei cu ordinul lor de multiplicitate şi vectorii proprii ai matricei cu dimensiunile subspaţiilor proprii ale matricei).
b) Să se determine o bază în $\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$ formată din vectori proprii ai matricei $\mathbf{A}$ ortonormaţi. Să se scrie, dacă există, o relaţie de ortogonal asemănare între matricea $\mathbf{A}$ şi o matrice diagonală.
c) Să se calculeze $\mathbf{A}^n, n \in \mathbb{N}^*$.
d) Folosind Teorema Cayley-Hamilton, să se determine,
$\mathbf{d}_1$) dacă există, $\mathbf{A}^{-1}$;
$\mathbf{d}_2$) $Q(\mathbf{A}) = \left(-\mathbf{A}^3 + 3\mathbf{A}\right)^{10}$.

Rezolvare. a) Se studiază dacă $\mathbf{A}$ este matrice diagonalizabilă.
Etapa 1. Se determină valorile proprii ale matricei $\mathbf{A}$, precum şi multiplicitatea lor algebrică.
•Se determină polinomul caracteristic al matricei $\mathbf{A}, P_{\mathbf{A}}(\lambda)$.

modul 1. $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2.$

modul 2. $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = (-1)^3 \left[\lambda^3 - \delta_1\lambda^2 + \delta_2\lambda - \delta_3\right]$, unde δ_i este suma minorilor principali de ordin i ai matricei $\mathbf{A}$, adică

$\delta_1 = \operatorname{Tr}\mathbf{A} = 0 + 0 + 0 = 0;$

$\delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}_{1,2} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}_{1,3} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}_{2,3} = -3;$

$\delta_3 = \det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$

$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = -\left[\lambda^3 - 0\lambda^2 + (-3)\lambda - 2\right].$

•Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei $\mathbf{A}$,

$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda+1)^2(\lambda-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_1) = 2; \\ \lambda_2 = 2 \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$

Se observă că toate rădăcinile caracteristice sunt din $\mathbb{R}$, adică sunt valori proprii ale matricei $\mathbf{A}$.

Spectrul matricei $\mathbf{A}$ este $\sigma(\mathbf{A}) = \{-1, 2\}$.

Raza spectrală a matricei $\mathbf{A}$ este $\rho(\mathbf{A}) = \max\{|-1|, |2|\} = 2$.

Etapa 2. Se determină subspaţiile proprii ale matricei $\mathbf{A}$, precum şi dimensiunile lor.

$\boxed{\lambda_1 = -1}$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = -1$, adică

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$, $\mathbf{x} \neq \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})}$ a.î.$(\mathbf{A} - (-1)\mathbf{I}_3)\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})}$, adică

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\alpha - \beta \\ x_2 = \alpha \in \mathbb{R} \\ x_3 = \beta \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$S_{\lambda_1}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) ; \mathbf{x}$ este vect. propriu. pt. $\mathbf{A}$ coresp. val. proprii $\lambda_1 = -1\} \cup \left\{\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})}\right\} =$

$$= \left\{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) ; \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\alpha-\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) ; \mathbf{x} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_1^1} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_2^1}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

$= \left[\left(\mathbf{u}_1^1, \mathbf{u}_2^1\right)\right].$

$\dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_1}(\mathbf{A}) = 2 = m(\lambda_1).$

$\underline{|\lambda_2 = 2|}$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2 = 2$, adică

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$, $\mathbf{x} \neq \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})}$ a.î.$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3)\,\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})}$, adică

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \gamma \\ x_2 = \gamma \\ x_3 = \gamma \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$S_{\lambda_2}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) ; \mathbf{x}$ este vect. propriu. pt. $\mathbf{A}$ coresp. val. proprii $\lambda_2 = 2\} \cup \left\{\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})}\right\} =$

$$= \left\{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) ; \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \\ \gamma \end{pmatrix}, \gamma \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) ; \mathbf{x} = \gamma \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_1^2}, \gamma \in \mathbb{R}\right\}$$

$= \left[\left(\mathbf{u}_1^2\right)\right].$

$\dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_2}(\mathbf{A}) = 1 = m(\lambda_2).$

Etapa 3. Cum toate rădăcinile caracteristice ale matricei $\mathbf{A}$ sunt din $\mathbb{R}$ (sunt valori proprii) si cum multiplicităţile geometrice (dimensiunile subspaţiilor proprii) coincid cu multiplicităţile algebrice ale valorilor proprii, atunci, conform teoremei Jordan, matricea $\mathbf{A}$ este diagonalizabilă, adică

$\exists \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ matrice diagonală şi $\exists \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ matrice modală, astfel încât $\mathbf{A} \sim \mathbf{D}$, adică $\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1}$ sau $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$. Se precizează că matricea modală $\mathbf{P}$ este formată din coloanele vectorilor proprii, baze în $S_{\lambda_1}(\mathbf{A})$ respectiv $S_{\lambda_2}(\mathbf{A})$. Mai mult, matricea modală $\mathbf{P}$ este nesingulară, deoarece respectivii vectori proprii formează o bază în $\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$, cu $\mathbf{P} =_C \mathbf{A}_S$.

b) Fie $S = \left(\mathbf{u}_1^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_1^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ renotată

$$S = \left(\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

o bază în $\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$ formată din vectori proprii ai matricei $\mathbf{A}$. Se ortonormează această bază utilizând procedeul de ortonormare Gram-Schmidt.

Se identifică $\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$ cu $\mathbb{R}_3$. Se ştie că

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}_3 \times \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}, \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

este produsul scalar standard în $\mathbb{R}_3$, iar

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}, \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\| = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2$$

este norma euclidiană standard în $\mathbb{R}_3$.

Atunci :

Etapa 0. Se observă că $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ este un sistem liniar independent de vectori (e bază în $\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}_3$).

Etapa 1. Se caută $\overline{S} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ un sistem de vectori liniar independent ortogonal a.î. $[\overline{S}] = [S]$. Se găseşte

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\|\mathbf{u}_1\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = (-1)^2 + 1^2 + 0^2 = 2;$$

$$\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = (-1)\cdot(-1) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1;$$

$$\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 1\cdot(-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0.$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\|\mathbf{u}_2\|^2 = \left\| \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left(\tfrac{-1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{-1}{2}\right)^2 + (1)^2 = \tfrac{3}{2};$$

$$\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot \left(\tfrac{-1}{2}\right) + 1 \cdot \left(\tfrac{-1}{2}\right) + 1 \cdot 1 = 0.$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \tfrac{0}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \tfrac{0}{\frac{3}{2}} \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\|\mathbf{u}_3\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3.$$

Etapa 2. Se caută $S_o = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ un sistem de vectori liniar independent ortogonal care să conţină doar versori a.î. $[S_o] = [\overline{S}]$. Se găseşte

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_1\|}\mathbf{u}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{w}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_2\|}\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{w}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_3\|}\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

•S-a găsit $S_o = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ o bază ortonormată în $\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}_3$, formată din vectori proprii ai matricei $\mathbf{A}$.

•Se construieşte matricea modală care are drept coloane vectorii proprii ortonormaţi,

$\mathbf{P}_o = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ matrice modală (are pe coloane vectori proprii ai matricei $\mathbf{A}$) ortogonală ($\mathbf{P}_o^T \cdot \mathbf{P}_o = \mathbf{P}_o \cdot \mathbf{P}_o^T = \mathbf{I}_3$ sau $(\mathbf{P}_o)^{-1} = \mathbf{P}_o^T$) şi se observă că

$$\mathbf{P}_o^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_o = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{D},$$

adică $\mathbf{A}$ este ortogonal asemenea cu $\mathbf{D}$ (matricea de asemănare $\mathbf{P}_o$ este ortogonală). Deci matricea modală construită cu vectori proprii ortonormaţi dă o relaţie de ortogonal asemănare între $\mathbf{A}$ şi $\mathbf{D}, \mathbf{A} \overset{o}{\sim} \mathbf{D}$. Era previzibil, deoarece $\mathbf{A}$ este o matrice simetrică.

Comentariu. Dacă se cere să se determine factorizarea $\mathbf{QR}$ a matricei

$$\mathbf{P} =_C \mathbf{A}_S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

atunci $\mathbf{Q} = \mathbf{P}_o$ este matrice ortogonală, iar $\mathbf{R}$ este o matrice superior triunghiulară. Într-adevăr:

•Determinarea matricei $\mathbf{Q}$:

-$S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ este un sistem liniar independent de vectori (e bază în $\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}_3$) (condiţia necesară pentru o matrice dreptunghiulară să admită factorizare QR este ca vectorii coloană să fie liniar independenţi);

-S-a găsit cu procedeul Gramm-Schmidt $S_o = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ o bază ortonormată în $\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}_3$;

-$\mathbf{Q} = \mathbf{P}_o$ este matrice ortogonală.

•Determinarea matricei $\mathbf{R}$ constă în a scrie vectorii coloană ai $\mathbf{P}$, $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ ca şi combinaţie liniară de vectorii coloană ai $\mathbf{Q}, (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$, adică de $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$:

$\mathbf{v}_1 = r_{11}\mathbf{q}_1 \Rightarrow$

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{q}_1 \rangle = \langle r_{11}\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1 \rangle = r_{11}\|\mathbf{q}_1\|^2 = r_{11} \Rightarrow r_{11} = (-1)\frac{-1}{\sqrt{2}} + 1\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

$\mathbf{v}_2 = r_{21}\mathbf{q}_1 + r_{22}\mathbf{q}_2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{q}_1 \rangle = \langle r_{21}\mathbf{q}_1 + r_{22}\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1 \rangle = r_{21}\|\mathbf{q}_1\|^2 + r_{22}\langle \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1 \rangle = r_{21} \Rightarrow r_{21} = (-1)\frac{-1}{\sqrt{2}} + 0\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{q}_2 \rangle = \langle r_{21}\mathbf{q}_1 + r_{22}\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_2 \rangle = r_{21}\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle + r_{22}\|\mathbf{q}_2\|^2 = r_{22} \Rightarrow r_{22} = (-1)\frac{-1}{\sqrt{6}} + 0\frac{-1}{\sqrt{6}} + 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

$\mathbf{v}_3 = r_{31}\mathbf{q}_1 + r_{32}\mathbf{q}_2 + r_{33}\mathbf{q}_3 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{q}_1 \rangle = \langle r_{31}\mathbf{q}_1 + r_{32}\mathbf{q}_2 + r_{33}\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_1 \rangle = r_{31}\|\mathbf{q}_1\|^2 = r_{31} \Rightarrow r_{31} = 1\frac{-1}{\sqrt{2}} + 1\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot 0 = 0 \\ \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{q}_2 \rangle = \langle r_{31}\mathbf{q}_1 + r_{32}\mathbf{q}_2 + r_{33}\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_2 \rangle = r_{32}\|\mathbf{q}_2\|^2 = r_{32} \Rightarrow r_{32} = 1\frac{-1}{\sqrt{6}} + 1\frac{-1}{\sqrt{6}} + 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} = 0 \\ \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{q}_3 \rangle = \langle r_{31}\mathbf{q}_1 + r_{32}\mathbf{q}_2 + r_{33}\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_3 \rangle = r_{33}\|\mathbf{q}_3\|^2 = r_{33} \Rightarrow r_{33} = 1\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \end{cases}$$

<u>Etapa 1.</u> Se caută $\overline{S} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ un sistem de vectori liniar independent ortogonal a.î. $[\overline{S}] = [S]$. Se găseşte

c) <u>modul 1.</u> (se aplică numai dacă $\mathbf{A} \sim \mathbf{D}$)

Deoarece $\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1} \Rightarrow \underline{\mathbf{A}^n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}^n \cdot \mathbf{P}^{-1}, n \in \mathbb{N}^*}$.

Se calculează $\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \overset{\text{clasic sau Gauss}}{=} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n & -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n & -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n \\ -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n & \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n & -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n \\ -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n & -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n & \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n \end{pmatrix}.$$

<u>modul 2.</u> (se aplică numai dacă $\mathbf{A} \overset{o}{\sim} \mathbf{D}$)

Deoarece $\mathbf{A} = \mathbf{P}_o \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}_o^T \Rightarrow \underline{\mathbf{A}^n = \mathbf{P}_o \cdot \mathbf{D}^n \cdot \mathbf{P}_o^T, n \in \mathbb{N}^*}$.

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n & -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n & -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n \\ -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n & \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n & -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n \\ -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n & -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n & \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n \end{pmatrix}.$$

d) Conform teoremei Cayley-Hamilton$\Rightarrow$

$P_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \Leftrightarrow (*) - \mathbf{A}^3 + 3\mathbf{A} + 2\mathbf{I}_3 = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

$\mathbf{d}_1$) Se observă că

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \exists \mathbf{A}^{-1} \text{ a.î. } \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_3.$$

$(*) - \mathbf{A}^3 + 3\mathbf{A} + 2\mathbf{I}_3 = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \Big| \cdot \exists \mathbf{A}^{-1} \Rightarrow -\mathbf{A}^2 + 3\mathbf{I}_3 + 2\mathbf{A}^{-1} = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \Rightarrow$

$$\mathbf{A}^{-1} = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{I}_3\right) = \tfrac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

sau

$$(*) - \mathbf{A}^3 + 3\mathbf{A} + 2\mathbf{I}_3 = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \mathbf{A}\left(\underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{I}_3\right)}_{\mathbf{A}^{-1}}\right) = \mathbf{I}_3 \Rightarrow$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{I}_3\right) = \tfrac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{d}_2$) $(*) - \mathbf{A}^3 + 3\mathbf{A} + 2\mathbf{I}_3 = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \Rightarrow$

$Q(\mathbf{A}) = \left(-\mathbf{A}^3 + 3\mathbf{A}\right)^{10} = (-2\mathbf{I}_3)^{10} = (-2)^{10}\mathbf{I}_3^{10} = (-2)^{10}\mathbf{I}_3$.

Exerciţiul 2. Se consideră matricea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Să se studieze dacă $\mathbf{A}$ este matrice diagonalizabilă şi, dacă da, să se determine o matrice diagonală asemenea şi o matrice modală corespunzatoare (să se determine valorile proprii ale matricei cu ordinul lor de multiplicitate şi vectorii proprii ai matricei cu dimensiunile subspaţiilor proprii ale matricei).
b) Să se determine o bază în $\mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$ formată din vectori proprii ai matricei $\mathbf{A}$ ortonormaţi. Să se scrie, dacă există, o relaţie de ortogonal asemănare între matricea $\mathbf{A}$ şi o matrice diagonală.
c) Să se calculeze $\mathbf{A}^n, n \in \mathbb{N}^*$.
d) Folosind Teorema Cayley-Hamilton, să se determine,
$\mathbf{d}_1$) dacă există, $\mathbf{A}^{-1}$;
$\mathbf{d}_2$) $Q(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^4 - 4\mathbf{A}^3 + 5\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} + 2000\mathbf{I}_4$.

Rezolvare. a) Se studiază dacă $\mathbf{A}$ este matrice diagonalizabilă.
Etapa 1. Se determină valorile proprii ale matricei $\mathbf{A}$, precum şi multiplicitatea lor algebrică.
•Se determină polinomul caracteristic al matricei $\mathbf{A}, P_{\mathbf{A}}(\lambda)$.

modul 1. $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(0-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda).$

modul 2. $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = (-1)^4\left[\lambda^4 - \delta_1\lambda^3 + \delta_2\lambda^2 - \delta_3\lambda + \delta_4\right]$, unde δ_i este suma minorilor principali de ordin i ai matricei $\mathbf{A}$, adică

$$\delta_1 = \operatorname{Tr}\mathbf{A} = 1+0+2+1 = 4;$$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}_{1,2} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}_{1,3} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}_{1,4} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}_{2,3} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}_{2,4} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}_{3,4} = 5;$$

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}_{1,2,3} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{1,2,4} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{1,3,4} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{2,3,4} = 2;$$

$$\delta_4 = \det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda.$$

•Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei $\mathbf{A}$,

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-2)(\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_1) = 1; \\ \lambda_2 = 2 \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_2) = 1; \\ \lambda_3 = 1 \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_3) = 2. \end{cases}$$

Se observă că toate rădăcinile caracteristice sunt din $\mathbb{R}$, adică sunt valori proprii ale matricei $\mathbf{A}$.
Spectrul matricei $\mathbf{A}$ este $\sigma(\mathbf{A}) = \{0,1,2\}$.
Raza spectrală a matricei $\mathbf{A}$ este $\rho(\mathbf{A}) = 2$.
Etapa 2. Se determină subspaţiile proprii ale matricei $\mathbf{A}$, precum şi dimensiunile lor.
$\boxed{\lambda_1 = 0}$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = 0$, adică

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}),\ \mathbf{x} \neq \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})} \text{ a.î.} (\mathbf{A} - 0\mathbf{I}_4)\,\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})}, \text{ adică}$$

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 0x_4 = 0 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\alpha \in \mathbb{R} \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$S_{\lambda_1}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})\,; \mathbf{x}$ este vect. propriu. pt. $\mathbf{A}$ coresp. val. proprii $\lambda_1 = 0\} \cup \left\{\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})}\right\} =$

$$= \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})\,; \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})\,; \mathbf{x} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_1^1}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$= \left[(\mathbf{u}_1^1) \right].$

$\dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_1}(\mathbf{A}) = 1 = m(\lambda_1)\,.$

$\boxed{\lambda_2 = 2}$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2 = 2$, adică

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$, $\mathbf{x} \neq \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})}$ a.î.$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_4)\,\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})}$, adică

$$\begin{cases} -1x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 0 \\ 0x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 - 1x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \beta \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \beta \in \mathbb{R} \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$S_{\lambda_2}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})\,; \mathbf{x}$ este vect. propriu. pt. $\mathbf{A}$ coresp. val. proprii $\lambda_2 = 2\} \cup \left\{\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})}\right\} =$

$$= \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})\,; \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})\,; \mathbf{x} = \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_1^2}, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$= \left[(\mathbf{u}_1^2) \right].$

$\dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_2}(\mathbf{A}) = 1 = m(\lambda_2)\,.$

$\boxed{\lambda_3 = 1}$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_3 = 1$, adică

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$, $\mathbf{x} \neq \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})}$ a.î.$(\mathbf{A} - 1\mathbf{I}_4)\,\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})}$, adică

$$\begin{cases} 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 0 \\ 0x_1 - 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 = 0 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \gamma \in \mathbb{R} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \delta \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$S_{\lambda_3}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})\,; \mathbf{x}$ este vect. propriu. pt. $\mathbf{A}$ coresp. val. proprii $\lambda_3 = 1\} \cup \left\{\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})}\right\} =$

$$= \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})\,;\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ 0 \\ \delta \end{pmatrix}, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})\,;\mathbf{x} = \gamma \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_1^3} + \delta \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_2^3}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$= \left[\left(\mathbf{u}_1^3, \mathbf{u}_2^3 \right) \right].$

$\dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_3}(\mathbf{A}) = 2 = m(\lambda_3).$

Etapa 3. Cum toate rădăcinile caracteristice ale matricei $\mathbf{A}$ sunt din $\mathbb{R}$ (sunt valori proprii) si cum multiplicităţile geometrice(dimensiunile subspaţiilor proprii) coincid cu multiplicităţile algebrice ale valorilor proprii, atunci, conform teoremei Jordan, matricea $\mathbf{A}$ este diagonalizabilă, adică

$$\exists \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \text{ matrice diagonală şi } \exists \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$$

matrice modală, astfel încât $\mathbf{A} \sim \mathbf{D}$, adică $\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1}$ sau $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$. Se precizează că matricea modală $\mathbf{P}$ este formată din coloanele vectorilor proprii, baze în $S_{\lambda_1}(\mathbf{A})$ respectiv $S_{\lambda_2}(\mathbf{A})$, $S_{\lambda_3}(\mathbf{A})$. Mai mult, matricea modală $\mathbf{P}$ este nesingulară, deoarece respectivii vectori proprii formează o bază în $\mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$, cu $\mathbf{P} =_C \mathbf{A}_S$.

b) Fie $S = \left(\mathbf{u}_1^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_1^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_1^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ renotată

$$S = \left(\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

o bază în $\mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$ formată din vectori proprii ai matricei $\mathbf{A}$. Se ortonormează această bază utilizând procedeul de ortonormare Gram-Schmidt.

Se identifică $\mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$ cu $\mathbb{R}_4$. Se ştie că

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}_4 \times \mathbb{R}_4 \to \mathbb{R}, \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$$

este produsul scalar standard în $\mathbb{R}_4$, iar

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}_4 \to \mathbb{R}, \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right\| = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + (x_4)^2$$

este norma euclidiană standard în $\mathbb{R}_4$.

Atunci :

Etapa 0. Se observă că $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ este un sistem liniar independent de vectori (e bază în $\mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}_4$).

Etapa 1. Se caută $\overline{S} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$ un sistem de vectori liniar independent ortogonal a.î. $[\overline{S}] = [S]$. Se găseşte

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\|\mathbf{u}_1\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = 2;$$

$$\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0;$$

$$\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0;$$

$$\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{u}_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1.$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \tfrac{0}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\|\mathbf{u}_2\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = 2;$$

$$\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 1;$$

$$\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{u}_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \tfrac{0}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\|\mathbf{u}_3\|^2 = \left\| \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \tfrac{1}{2};$$

$$\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{u}_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

$$\mathbf{u}_4 = \mathbf{v}_4 - \frac{\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{u}_3 \rangle}{\|\mathbf{u}_3\|^2}\mathbf{u}_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \tfrac{0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \tfrac{0}{\frac{1}{2}} \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{u}_4\|^2 = \left\| \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = \tfrac{1}{2}.$$

<u>Etapa 2.</u> Se caută $S_o = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ un sistem de vectori liniar independent ortogonal care să conţină doar versori a.î. $[S_o] = [\overline{S}]$. Se găseşte

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_1\|}\mathbf{u}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{w}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_2\|}\mathbf{u}_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{w}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_3\|}\mathbf{u}_3 = \sqrt{2}\tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{w}_4 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_4\|}\mathbf{u}_4 = \sqrt{2}\tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

•S-a găsit $S_o = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ o bază ortonormată în $\mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}_4$, formată din vectori proprii ai matricei $\mathbf{A}$.

•Cum $\mathbf{A}$ nu este simetrică, nu se poate afirma că matricea modală construită cu vectorii din baza S_o ar fi o matrice de ortogonal asemănare între $\mathbf{A}$ şi o matrice diagonală. Într-adevăr, Se construieşte matricea modală care aredrept coloane vectorii proprii ortonormaţi

$$\mathbf{P}_o = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$$ matrice modală (are pe coloane vectori proprii ai matricei $\mathbf{A}$) ortogonală ($\mathbf{P}_o^T \cdot \mathbf{P}_o = \mathbf{P}_o \cdot \mathbf{P}_o^T = \mathbf{I}_4$ sau $(\mathbf{P}_o)^{-1} = \mathbf{P}_o^T$) şi Se observă că

$$\mathbf{P}_o^T\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}_o=\begin{pmatrix}0&\frac{-\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{-\sqrt{2}}{2}&0\\ 0&\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&2&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\ \frac{-\sqrt{2}}{2}&0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{-\sqrt{2}}{2}&0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}&0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&2&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\neq\mathbf{D}.$$

Se poate arăta chiar că nu există o altă matrice $\mathbf{P}_{ort}$ ortogonală de asemănare. Adică $\mathbf{A}$ nu este ortogonal asemenea cu $\mathbf{D}$.

Comentariu. Dacă se cere să se determine factorizarea **QR** a matricei

$$\mathbf{P}={}_C\,\mathbf{A}_S=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\ \frac{-\sqrt{2}}{2}&0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{-\sqrt{2}}{2}&0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}&0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&\sqrt{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

atunci $\mathbf{Q}=\mathbf{P}_o$ este matrice ortogonală, iar $\mathbf{R}$ este o matrice superior triunghiulară determinabilă ca la primul exerciţiu (se poate determina, deoarece spaţiul S al coloanelor matricei este liniar independent).

c) <u>modul 1.</u> (se aplică numai dacă $\mathbf{A}\sim\mathbf{D}$)

Deoarece $\mathbf{A}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{P}^{-1}\Rightarrow\underline{\mathbf{A}^n=\mathbf{P}\cdot\mathbf{D}^n\cdot\mathbf{P}^{-1},n\in\mathbb{N}^*}$.

Se calculează $\mathbf{P}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\overset{\text{clasic sau Gauss}}{=}\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&-1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\mathbf{A}^n=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&2^n&0&0\\0&0&1^n&0\\0&0&0&1^n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&-1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2^n-1&0\\0&0&0&0\\0&0&2^n&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}.$$

d) Conform teoremei Cayley-Hamilton$\Rightarrow$

$P_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})=\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}\Leftrightarrow(*)\,\mathbf{A}^4-4\mathbf{A}^3+5\mathbf{A}^2-2\mathbf{A}=\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$.

d$_1$) Se observă că

$$\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&2&0\\0&1&0&1\end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow\nexists\mathbf{A}^{-1}$ a.î. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{I}_4$.

Se observă şi din $(*)$ că $\nexists\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{M}$ a.i $\mathbf{A}\cdot\mathbf{M}=\mathbf{I}_3$.

d$_2$) $(*)\,\mathbf{A}^4-4\mathbf{A}^3+5\mathbf{A}^2-2\mathbf{A}=\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}\Rightarrow$

$Q(\mathbf{A})=\mathbf{A}^4-4\mathbf{A}^3+5\mathbf{A}^2-2\mathbf{A}+2000\mathbf{I}_4=\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}+2000\mathbf{I}_4=2000\mathbf{I}_4$.

Exerciţiul 3. Se consideră matricea $\mathbf{A}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}.$$

a) Să se studieze dacă $\mathbf{A}$ este matrice diagonalizabilă.

b) Să se determine o bază în $\mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})$ formată din vectori proprii ai matricei $\mathbf{A}$.

c) Să se calculeze $\mathbf{A}^n,n\in\mathbb{N}^*$.

d) Folosind Teorema Cayley-Hamilton, să se determine, dacă există, $\mathbf{A}^{-1}$.

Rezolvare. a)

Etapa 1. Se determină valorile proprii ale matricei $\mathbf{A}$, precum şi multiplicitatea lor algebrică.
•Se determină polinomul caracteristic al matricei $\mathbf{A}, P_{\mathbf{A}}(\lambda)$.

modul 1. $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+1.$

modul 2. $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = (-1)^2\left[\lambda^2 - \delta_1\lambda + \delta_2\right]$, unde δ_i este suma minorilor principali de ordin i ai matricei $\mathbf{A}$, adică

$$\delta_1 = \mathrm{Tr}\,\mathbf{A} = 0+0=0; \delta_2 = \det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2+1.$$

•Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei $\mathbf{A}$,

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2+1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = i \notin \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_1)=1; \\ \lambda_2 = -i \notin \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_2)=1. \end{cases}$$

Se observă că $\mathbf{A}$ are rădăcini caracteristice care nu sunt din $\mathbb{R}$, adică nu sunt valori proprii ale matricei $\mathbf{A}$. Fără a mai parcurge etapa 2, conform Teoremei Jordan, se afirmă că $\mathbf{A}$ nu este diagonalizabilă, nu este asemenea cu o matrice diagonală.

b) De la punctul **a)** deducem că nu există nici o bază în $\mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})$ formată din vectori proprii ai matricei $\mathbf{A}$.

c) $\mathbf{A}^n = ?, n \in \mathbb{N}^*$.

•Nu putem folosi modurile legate de $\mathbf{A} \sim \mathbf{D}$ sau $\mathbf{A} \overset{o}{\sim} \mathbf{D}$.

•modul 3. Folosim definiţia puterilor unei matrice şi inducţia matematică.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}^4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_2$$

...

$$\mathbf{A}^{2k} = (-1)^k\mathbf{I}_2, \forall k \in \mathbb{N} \text{ şi } \mathbf{A}^{2k+1} = (-1)^k\mathbf{A}, \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Se demonstrează prin inducţie matematică.

•modul 4. Folosim teorema Cayley-Hamilton.

$$P_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \mathbf{A}^2 + \mathbf{I}_2 = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{A}^2 = -\mathbf{I}_2 & & \mathbf{A}^1 = \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^4 = \mathbf{I}_2 & \text{şi} & \mathbf{A}^3 = -\mathbf{A} \\ \ldots & & \ldots \\ \mathbf{A}^{2k} = (-1)^k\mathbf{I}_2, \forall k \in \mathbb{N} & & \mathbf{A}^{2k+1} = (-1)^k\mathbf{A}, \forall k \in \mathbb{N}^* \end{array}$$

Se demonstrează prin inducţie matematică.

d) Se observă că $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\mathbf{A}^{-1}$ a.î. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}_2$.

Conform teoremei Cayley-Hamilton$\Rightarrow$

$$P_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \mathbf{A}^2 + \mathbf{I}_2 = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\Big| \cdot \mathbf{A}^{-1} \Rightarrow$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{A}^{-1} = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = -\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}.$$

sau

$$P_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \mathbf{A}^2 + \mathbf{I}_2 = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{A}\left(\underbrace{-\mathbf{A}}_{\mathbf{A}^{-1}}\right)=\mathbf{I}_2 \Rightarrow \mathbf{A}^{-1}=-\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exerciţiul 4. Se consideră matricea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Să se studieze dacă $\mathbf{A}$ este matrice diagonalizabilă.

Rezolvare.

Etapa 1. Se determină valorile proprii ale matricei $\mathbf{A}$, precum şi multiplicitatea lor algebrică.

•Se determină polinomul caracteristic al matricei $\mathbf{A}, P_{\mathbf{A}}(\lambda)$.

modul 1. $P_{\mathbf{A}}(\lambda)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)^3.$

modul 2. $P_{\mathbf{A}}(\lambda)=(-1)^3\left[\lambda^3-\delta_1\lambda^2+\delta_2\lambda-\delta_3\right]$, unde δ_i este suma minorilor principali de ordin i ai matricei $\mathbf{A}$, adică

$\delta_1=\operatorname{Tr}\mathbf{A}=2+2+2=6;$

$\delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}_{1,2}+\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}_{1,3}+\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}_{2,3}=12;$

$\delta_3=\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=8.$

$P_{\mathbf{A}}(\lambda)=-\left[\lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-8\right].$

•Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei $\mathbf{A}$,

$P_{\mathbf{A}}(\lambda)=0 \Leftrightarrow (2-\lambda)^3=0 \Leftrightarrow \{\lambda_1=2\in\mathbb{R}$ cu $m(\lambda_1)=3;$

Se observă că toate rădăcinile caracteristice sunt din $\mathbb{R}$, adică sunt valori proprii ale matricei $\mathbf{A}$.

Spectrul matricei $\mathbf{A}$ este $\sigma(\mathbf{A})=\{2\}$.

Raza spectrală a matricei $\mathbf{A}$ este $\rho(\mathbf{A})=\max\{2\}=2$.

Etapa 2. Se determină subspaţiile proprii ale matricei $\mathbf{A}$, precum şi dimensiunile lor.

$\boxed{\lambda_1=2}$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1=2$, adică

$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}),\ \mathbf{x}\neq\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})}$ a.î.$(\mathbf{A}-2\mathbf{I}_3)\mathbf{x}=\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})}$, adică

$$\begin{cases} 0x_1+2x_2+2x_3=0 \\ 0x_1+0x_2+2x_3=0 \\ 0x_1+0x_2+0x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\alpha\in\mathbb{R} \\ x_2=0 \\ x_3=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$S_{\lambda_1}(\mathbf{A})=\{\mathbf{x}\in\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R});\mathbf{x}$ este vect. propriu. pt. $\mathbf{A}$ coresp. val. proprii $\lambda_1=2\}\cup\left\{\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})}\right\}=$

$$=\left\{\mathbf{x}\in\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R});\mathbf{x}=\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\alpha\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\mathbf{x}\in\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R});\mathbf{x}=\alpha\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_1^1},\alpha\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\left[\left(\mathbf{u}_1^1\right)\right].$$

$\dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_1}(\mathbf{A}) = 1 \neq m(\lambda_1)$.

Etapa 3. Toate rădăcinile caracteristice ale matricei $\mathbf{A}$ sunt din $\mathbb{R}$ (sunt valori proprii), dar
$\dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_1}(\mathbf{A}) = 1 \neq m(\lambda_1)$.

Atunci, conform teoremei Jordan, matricea $\mathbf{A}$ nu este diagonalizabilă, adică
$\nexists \mathbf{D} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ matrice diagonală şi $\nexists \mathbf{P} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ matrice modală astfel încât $\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1}$ sau $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$. Deci $\mathbf{A} \nsim \mathbf{D}$.

Exerciţiul 8**.** Fie matricea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & 4 \\ -4 & 5 & -2 & 7 \\ -3 & 3 & -2 & 5 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}).$$

Folosind teorema Cayley-Hamilton să se calculeze polinoamele matriceale :

a) $Q(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^4 - 4\mathbf{A}^3 + 6\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} + \mathbf{I}_4$,

b) $Q(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^4 - 4\mathbf{A}^3 + 6\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + \mathbf{I}_4$.

Rezolvare. Se determină polinomul caracteristic al matricei $\mathbf{A}, P_{\mathbf{A}}(\lambda)$.

modul 1. $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 & -1 & 4 \\ -4 & 5-\lambda & -2 & 7 \\ -3 & 3 & -2-\lambda & 5 \\ -2 & 2 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (\lambda-1)^4$.

modul 2. $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = (-1)^4\left[\lambda^4 - \delta_1\lambda^3 + \delta_2\lambda^2 - \delta_3\lambda - \delta_4\right]$, unde δ_i este suma minorilor principali de ordin i ai matricei $\mathbf{A}$, adică

$\delta_1 = \operatorname{Tr}\mathbf{A} = -2 + 5 - 2 + 3 = 4$;

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}_{1,2} + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}_{1,3} + \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}_{1,4} + \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}_{2,3} + \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}_{2,4} + \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}_{3,4} = 6;$$

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -4 & 5 & -2 \\ -3 & 3 & -2 \end{vmatrix}_{1,2,3} + \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 7 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}_{1,2,4} + \begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -3 & -2 & 5 \\ -2 & -2 & 3 \end{vmatrix}_{1,3,4} + \begin{vmatrix} 5 & -2 & 7 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}_{2,3,4} = 4;$$

$$\delta_4 = \det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 & 4 \\ -4 & 5 & -2 & 7 \\ -3 & 3 & -2 & 5 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (\lambda-1)^4$.

Conform teoremei Cayley-Hamilton$\Rightarrow$

$$P_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \mathbf{A}^4 - 4\mathbf{A}^3 + 6\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} + \mathbf{I}_4 = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}.$$

Atunci :

a) $Q(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^4 - 4\mathbf{A}^3 + 6\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} + \mathbf{I}_4 = P_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$.

b) $Q(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^4 - 4\mathbf{A}^3 + 6\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + \mathbf{I}_4 = P_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) + \mathbf{A} = \mathbf{A}$.

Exerciţiul 9**.** Folosind teorema Cayley Hamilton să se calculeze $\mathbf{A}^{-1}$ şi $\mathbf{A}^n, n \in \mathbb{N}^*$ în cazurile :

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Rezolvare.

•Se determină polinomul caracteristic al matricei $\mathbf{A}, P_{\mathbf{A}}(\lambda)$.

modul 1. $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$.

<u>modul 2.</u> $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = (-1)^2 \left[\lambda^2 - \delta_1\lambda + \delta_2\right]$, unde δ_i este suma minorilor principali de ordin i ai matricei $\mathbf{A}$, adică

$\delta_1 = \operatorname{Tr}\mathbf{A} = 1 + 1 = 2; \delta_2 = \det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1.$

•Conform teoremei Cayley-Hamilton$\Rightarrow$

$$P_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} + \mathbf{I}_2 = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}.$$

••Se observă că $\det\mathbf{A} = 1 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\mathbf{A}^{-1}$ a.î. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}_2$.

Atunci :

$$\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} + \mathbf{I}_2 = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\Big|\cdot\mathbf{A}^{-1} \Rightarrow \mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2 + \mathbf{A}^{-1} = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \Rightarrow$$

$$\mathbf{A}^{-1} = -\mathbf{A} + 2\mathbf{I}_2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

sau

$$\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} + \mathbf{I}_2 = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \mathbf{A}\left(\underbrace{-\mathbf{A} + 2\mathbf{I}_2}_{\mathbf{A}^{-1}}\right) = \mathbf{I}_2 \Rightarrow$$

$$\mathbf{A}^{-1} = -\mathbf{A} + 2\mathbf{I}_2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

• • $\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} + \mathbf{I}_2 = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \Rightarrow$

$\mathbf{A}^2 = 2\mathbf{A} - \mathbf{I}_2;$

$\mathbf{A}^3 = (2\mathbf{A} - \mathbf{I}_2)\mathbf{A} = 2\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} = 2(2\mathbf{A} - \mathbf{I}_2) - \mathbf{A} = 3\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2;$

$\mathbf{A}^4 = (3\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2)\mathbf{A} = 3\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} = 3(2\mathbf{A} - \mathbf{I}_2) - 2\mathbf{A} = 4\mathbf{A} - 3\mathbf{I}_2;$

...

$\mathbf{A}^n = n\mathbf{A} - (n-1)\mathbf{I}_2 =$

$= n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - (n-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}^*.$

Se demonstrează prin inducţie matematică.

e) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Rezolvare.

•Se determină polinomul caracteristic al matricei $\mathbf{A}, P_{\mathbf{A}}(\lambda)$.

<u>modul 1.</u> $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda-1)^2 = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2.$

<u>modul 2.</u> $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = (-1)^3\left[\lambda^3 - \delta_1\lambda^2 + \delta_2\lambda - \delta_3\right]$, unde δ_i este suma minorilor principali de ordin i ai matricei $\mathbf{A}$, adică

$\delta_1 = \operatorname{Tr}\mathbf{A} = 2 + 1 + 1 = 4;$

$\delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}_{1,2} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}_{1,3} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}_{2,3} = 5;$

$\delta_3 = \det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$

$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2.$

•Conform teoremei Cayley-Hamilton$\Rightarrow$

$P_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})} \Leftrightarrow -\mathbf{A}^3 + 4\mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} + 2\mathbf{I}_3 = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

••Se observă că $\det \mathbf{A} = 2 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \mathbf{A}^{-1}$ a.î. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_3$.

Atunci :

$-\mathbf{A}^3 + 4\mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} + 2\mathbf{I}_3 = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \big| \cdot \mathbf{A}^{-1} \Rightarrow -\mathbf{A}^2 + 4\mathbf{A} - 5\mathbf{I}_3 + 2\mathbf{A}^{-1} = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \Rightarrow$

$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} + 5\mathbf{I}_3\right) =$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

sau

$$-\mathbf{A}^3 + 4\mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} + 2\mathbf{I}_3 = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \mathbf{A} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} + 5\mathbf{I}_3\right)}_{\mathbf{A}^{-1}} = \mathbf{I}_3 \Rightarrow$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} + 5\mathbf{I}_3\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

• • $-\mathbf{A}^3 + 4\mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} + 2\mathbf{I}_3 = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^3 &= 4\mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} + 2\mathbf{I}_3; \\
\mathbf{A}^4 &= \left(4\mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} + 2\mathbf{I}_3\right)\mathbf{A} = 4\mathbf{A}^3 - 5\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} = \\
&= 4\left(4\mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} + 2\mathbf{I}_3\right) - 5\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} = 11\mathbf{A}^2 - 18\mathbf{A} + 8\mathbf{I}_3; \\
\mathbf{A}^5 &= \left(11\mathbf{A}^2 - 18\mathbf{A} + 8\mathbf{I}_3\right)\mathbf{A} = 11\mathbf{A}^3 - 18\mathbf{A}^2 + 8\mathbf{A} = \\
&= 11\left(4\mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} + 2\mathbf{I}_3\right) - 18\mathbf{A}^2 + 8\mathbf{A};
\end{aligned}$$

....

Este mai dificil de a observa o expresie pentru $\mathbf{A}^n$ în raport cu puterile $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2$ şi să se demonstreze ulterior prin inducţie matematică.