SEMINAR NR. 8, REZOLVĂRI
Algebră liniară şi Geometrie analitică

6. FORME PĂTRATICE PE $(\mathbb{R}_n, +, \cdot, \mathbb{R})$

Definiţie. a) Fie spaţiul liniar real $(\mathbb{R}_n, +, \cdot, \mathbb{R})$. Fie matricea pătratică simetrică $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n^s(\mathbb{R})$. Funcţia $h : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ definită prin $\forall \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

$$h(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j =$$
$$= a_{11}(x_1)^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + ... + a_{1n}x_1x_n +$$
$$a_{21}x_2x_1 + a_{22}(x_2)^2 + a_{23}x_{21}x_3 + ... + a_{2n}x_2x_n +$$
$$a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}(x_3)^2 + ... + a_{3n}x_3x_n +$$
$$...$$
$$a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + a_{n3}x_nx_3 + ... + a_{nn}(x_n)^2.$$

se numeşte *forma pătratică pe $\mathbb{R}_n$ (n-ară) generată de matricea* $\mathbf{A}$.

b) Deoarece în expresia anterioară a formei pătratice h apar produse de coordonatele $x_1, ..., x_n$ ale vectorului $\mathbf{x}$ în baza canonică din $\mathbb{R}_n$,

$$C = \left(\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

se spune că matricea $\mathbf{A}$ *este matricea formei pătratice h în raport cu baza C* şi se notează $\mathbf{A} = (h)_C$.

Observaţie. $h : \mathbb{R}_1 \to \mathbb{R}, h(\mathbf{x}) = a_{11}(x_1)^2$, unde $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \end{pmatrix}$, este *formă pătratică unară.*

$h : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}, h(\mathbf{x}) = a_{11}(x_1)^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}(x_2)^2$, unde $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, este *formă pătratică binară.* (utilizări în teoria conicelor)

Teoremă. Fie spaţiu liniar real $(\mathbb{R}_n, +, \cdot, \mathbb{R})$. Fie $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n^s(\mathbb{R})$. Fie forma pătratică $h : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ definită prin

$$h(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

unde $x_1, ..., x_n$ sunt coordonatele vectorului $\mathbf{x}$ în baza C canonică din $\mathbb{R}_n$. Dacă

$$h(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} y_i y_j,$$

unde $y_1, ..., y_n$ sunt coordonatele vectorului $\mathbf{x}$ într-o bază S din $\mathbb{R}_n$ şi dacă $\mathbf{P} = {}_C\mathbf{A}_S$ este matricea de trecere de la baza C la baza S atunci

$\mathbf{B} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$ (adică $(h)_S = ({}_C\mathbf{A}_S)^T \cdot (h)_C \cdot {}_C\mathbf{A}_S$).

Problemă. Fie spaţiu liniar real $(\mathbb{R}_n, +, \cdot, \mathbb{R})$. Fie $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n^s(\mathbb{R})$. Fie forma pătratică $h : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ definită prin

$$h(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

unde $x_1, ..., x_n$ sunt coordonatele vectorului $\mathbf{x}$ în baza C canonică din $\mathbb{R}_n$. Se pune problema de a determina o matrice diagonală $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & 0 \\ \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$ şi o matrice nesingulară $\mathbf{P}$ astfel încât, prin transformarea $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

să se obţină o formă canonică a formei pătratice, adică

$h(\mathbf{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} d_{ii} y_i^2.$

În acest caz, $\mathbf{P} =_C \mathbf{A}_S$, unde S este baza din $\mathbb{R}_n$ în care vectorul $\mathbf{x}$ are coordonatele $y_1, ..., y_n$. Mai mult, $\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{D}$.

Definiţii. *Rangul formei pătratice* h este

$\operatorname{rang} h = \operatorname{rang} A.$

Signatura formei pătratice h este tripletul (p, q, d), unde p, g, d reprezintă numărul de coeficienţi pozitivi, negativi, respectiv zero dintr-o formă canonică a formei pătratice.

Natura formei pătratice h (clasificare) - a se vedea în curs.

Teoremă (**Criteriul lui Sylvester**). Fie $h : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ o formă pătratică. Atunci

a) h este pozitiv definită $\Leftrightarrow \forall i = \overline{1,n}, \Delta_i > 0$ şi

b) h este negativ definită $\Leftrightarrow \forall i = \overline{1,n}, (-1)^i \Delta_i > 0$.

Teoremă (**Legea de inerţie a lui Sylvester**). Signatura unei forme pătratice h este unică, adică independentă de forma canonică ataşată formei pătratice.

Exerciţiul 5. Utilizând toate metodele cunoscute aplicabile, să se determine o formă canonică pentru următoarele forme pătratice h pe $\mathbb{R}_3$, indicând baza din $\mathbb{R}_3$-chiar baza ortonormată, în care h are forma canonică (indicând matricea -chiar matricea ortogonală cu care se obţine forma canonică). Să se precizeze pentru fiecare dintre ele rangul, signatura şi natura formei pătratice. Să se verifice legea de inerţie a lui Sylvester.

a) $h : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}$**,** $h(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$, unde x_1, x_2, x_3 sunt coordonatele vectorului $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ în baza canonică din $\mathbb{R}_3$.

Rezolvare. Se scrie

$$\begin{array}{rl} h(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 & \\ +6x_2^2 - 4x_2x_3 & \Rightarrow \mathbf{A} = (h)_C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}. \\ +3x_3^2. & \end{array}$$

I) Metoda valorilor şi vectorilor proprii (**a transformărilor ortogonale**)-este aplicabilă pentru orice formă pătratică, deoarece $\mathbf{A} = (h)_C$ este simetrică, deci este ortogonal asemenea cu o matrice diagonală.

Se caută $\mathbf{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice diagonală şi $\mathbf{P}_o \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice nesingulară (se va găsi chiar ortogonală) astfel încât $\mathbf{P}_o^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_o = \mathbf{D}$.

<u>Etapa 1.</u> Se determină valorile proprii ale matricei $\mathbf{A}$, precum şi multiplicitatea lor algebrică.

•Se determină polinomul caracteristic al matricei $\mathbf{A}, P_{\mathbf{A}}(\lambda)$.

<u>modul 1.</u> $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -4 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda - 98 = -(\lambda+2)(\lambda-7)^2.$

<u>modul 2.</u> $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = (-1)^3 \left[\lambda^3 - \delta_1\lambda^2 + \delta_2\lambda - \delta_3\right]$, unde δ_i este suma minorilor principali de ordin i ai matricei $\mathbf{A}$, adică

$\delta_1 = \operatorname{Tr} \mathbf{A} = 3 + 6 + 3 = 12;$

$\delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}_{1,2} + \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}_{1,3} + \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}_{2,3} = 21;$

$$\delta_3 = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -98$$

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = -\left[\lambda^3 - 12\lambda^2 + 21\lambda - (-98)\right] = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda - 98.$$

•Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei $\mathbf{A}$,

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda+2)(\lambda-7)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2 \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_1) = 1; \\ \lambda_2 = 7 \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_2) = 2. \end{cases}$$

Etapa 1'. O formă canonică a formei pătratice este

$$h(\mathbf{x}) = -2y_1^2 + 7y_2^2 + 7y_3^2,$$

unde y_1, y_2, y_3 sunt coordonatele vectorului $\mathbf{x}$ într-o bază S_o din $\mathbb{R}_3$ care se va determina.

Etapa 2. Se determină subspaţiile proprii ale matricei $\mathbf{A}$, precum şi dimensiunile lor.

$\boxed{\lambda_1 = -2}$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = -2$, adică

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3,\ \mathbf{x} \neq \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}_3} \text{ a.î.} (\mathbf{A} - (-2)\mathbf{I}_3)\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}_3}, \text{ adică}$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ -2x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \frac{1}{2}\alpha \\ x_3 = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$S_{\lambda_1}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_3; \mathbf{x}$ este vect. propr. pt. $\mathbf{A}$ coresp. val. proprii $\lambda_1 = -2\} \cup \{\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}_3}\} =$

$$= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_3; \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \frac{1}{2}\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_1^1 = \mathbf{v}_1}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} = [(\mathbf{v}_1)].$$

$$\dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_1}(\mathbf{A}) = 1 = m(\lambda_1).$$

$\boxed{\lambda_2 = 7}$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2 = 7$, adică

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3,\ \mathbf{x} \neq \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}_3} \text{ a.î.} (\mathbf{A} - 7\mathbf{I}_3)\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}_3}, \text{ adică}$$

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ -2x_1 - 1x_2 - 2x_3 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1}{2}\beta - \gamma \\ x_2 = \beta \in \mathbb{R} \\ x_3 = \gamma \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$S_{\lambda_2}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_3; \mathbf{x}$ este vect. propr. pt. $\mathbf{A}$ coresp. val. proprii $\lambda_2 = 7\} \cup \{\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}_3}\} =$

$$= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_3; \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2}\beta - \gamma \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \beta \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_1^2 = \mathbf{v}_2} + \gamma \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_2^2 = \mathbf{v}_3}, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} = [(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)].$$

$$\dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_2}(\mathbf{A}) = 2 = m(\lambda_2).$$

Etapa 3. Conform teoremei Jordan, matricea $\mathbf{A}$ este diagonalizabilă, adică

$\exists \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ matrice diagonală şi $\exists \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ matrice modală (are pe coloane vectori proprii ai matricei $\mathbf{A}$), astfel încât $\mathbf{A} \sim \mathbf{D}$, adică $\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1}$

sau $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$.

Atunci $S = \left(\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
este o bază în $\mathbb{R}_3$, formată din vectori proprii ai matricei $\mathbf{A}$.

<u>Etapa 4.</u> Se ortonormează baza S utilizând procedeul de ortonormare Gram-Schmidt.

•Se observă că $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ este un sistem liniar independent de vectori (e bază în $\mathbb{R}_3$).

• Se caută $\overline{S} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ un sistem de vectori liniar independent ortogonal a.î. $\left[\overline{S}\right] = [S]$. Se găseşte

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\|\mathbf{u}_1\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = 1^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \tfrac{9}{4};$$

$$\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left(\tfrac{-1}{2}\right) \cdot 1 + 1 \cdot \tfrac{1}{2} + 0 \cdot 1 = 0;$$

$$\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot \tfrac{1}{2} + 1 \cdot 1 = 0.$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{0}{\frac{9}{4}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\|\mathbf{u}_2\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left(\tfrac{-1}{2}\right)^2 + 1^2 + 0^2 = \tfrac{5}{4};$$

$$\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = (-1) \cdot \left(\tfrac{-1}{2}\right) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = \tfrac{1}{2}.$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{u}_2\|^2} \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0}{\frac{9}{4}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}} \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{5} \\ \frac{-2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\|\mathbf{u}_3\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} \frac{-4}{5} \\ \frac{-2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left(\tfrac{-4}{5}\right)^2 + \left(\tfrac{-2}{5}\right)^2 + 1^2 = \tfrac{9}{5}.$$

• Se caută $S_o = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ un sistem de vectori liniar independent care să conţină doar versori a.î. $[S_o] = \left[\overline{S}\right]$. Se găseşte

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_1\|} \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_2\|} \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_3\|} \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{5}}} \begin{pmatrix} \frac{-4}{5} \\ \frac{-2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

•S-a găsit $S_o = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ o bază ortonormată în $\mathbb{R}_3$, formată din vectori proprii ai matricei $\mathbf{A}$.

•Se construieşte matricea modală care are drept coloane vectorii proprii ortonormaţi, $\mathbf{P}_o =_C \mathbf{A}_{S_o}$,

$\mathbf{P}_o = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{-4\sqrt{5}}{15} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ matrice modală (are pe coloane vectori proprii ai matricei $\mathbf{A}$) ortogonală ($\mathbf{P}_o^T \cdot \mathbf{P}_o = \mathbf{P}_o \cdot \mathbf{P}_o^T = \mathbf{I}_3$ sau $(\mathbf{P}_o)^{-1} = \mathbf{P}_o^T$) şi se observă că

$$\mathbf{P}_o^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_o = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ -\frac{4\sqrt{5}}{15} & -\frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{-4\sqrt{5}}{15} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$= \mathbf{D}$, adică $\mathbf{A} \overset{o}{\sim} \mathbf{D}$.

Etapa 4'. Baza ortonormată din $\mathbb{R}_3$ în care h are forma canonică

$h(\mathbf{x}) = -2y_1^2 + 7y_2^2 + 7y_3^2$

este S_o, adică y_1, y_2, y_3 sunt coordonatele vectorului $\mathbf{x}$ în baza S_o. Se observă că

$\mathbf{P}_o^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_o = \mathbf{D}$

adică $\mathbf{D} = (h)_{S_o}$ iar $\mathbf{P}_o = _C \mathbf{A}_{S_o}$.

Mai mult, transformarea ortogonală (schimbarea de coordonate) cu ajutorul căreia se determină forma canonică este

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{-1}{\sqrt{5}}y_2 + \frac{-4\sqrt{5}}{15}y_3 \\ x_2 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_2 + \frac{-2\sqrt{5}}{15}y_3 \\ x_3 = \frac{2}{3}y_1 + 0y_2 + \frac{\sqrt{5}}{3}y_3 \end{cases}$$

II) Metoda Gauss de aducere la forma canonică a unei forme pătratice-este aplicabilă pentru orice formă pătratică, în una din cele două variante.

Cum $\exists a_{ii} = a_{11} \neq 0 \Rightarrow$ Se aplică varianta 1 a metodei Gauss. Se scrie

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) = {} & \underline{3x_1^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3} \\ & +6x_2^2 - 4x_2x_3 \\ & +3x_3^2. \end{aligned}$$

pasul 1. Se grupează termenii din expresia lui $h(\mathbf{x})$ care conţin x_1 (prima linie din expresia formei $h(\mathbf{x})$) şi se completează la un pătrat perfect, folosind

$(a+b+c)^2 = \underline{a^2 + 2ab + 2ac} + b^2 + c^2 + 2bc.$

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) &= \underline{3\left(x_1^2 - \tfrac{4}{3}x_1x_2 - \tfrac{8}{3}x_1x_3\right)} + 6x_2^2 - 4x_2x_3 + 3x_3^2 = \\ &= 3\left(\underline{x_1^2 + 2x_1\left(-\tfrac{2}{3}x_2\right) + 2x_1\left(-\tfrac{4}{3}x_3\right) + \left(-\tfrac{2}{3}x_2\right)^2} + \underbrace{\left(-\frac{4}{3}x_3\right)^2 + 2\left(-\frac{2}{3}x_2\right)\left(-\frac{4}{3}x_3\right)}\right) - \\ &\quad -3\left(\underbrace{\left(-\frac{2}{3}x_2\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}x_3\right)^2 + 2\left(-\frac{2}{3}x_2\right)\left(-\frac{4}{3}x_3\right)}\right) + 6x_2^2 - 4x_2x_3 + 3x_3^2 \\ &= 3\left(x_1 - \tfrac{2}{3}x_2 - \tfrac{4}{3}x_3\right)^2 + \tfrac{14}{3}x_2^2 - \tfrac{28}{3}x_2x_3 - \tfrac{7}{3}x_3^2. \end{aligned}$$

pasul 1'. Se face schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_3 \\ y_2 = \quad x_2 \\ y_3 = \quad x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{4}{3}y_3 \\ x_2 = \quad y_2 \\ x_3 = \quad y_3 \end{cases}$$

Se notează $\mathbf{G}_1 = _C \mathbf{A}_{S_1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matricea de trecere de la baza C la baza $S_1 = (\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')$, unde

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}'_2 = \frac{2}{3}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_3 = \frac{4}{3}\mathbf{e}_1 \qquad + \mathbf{e}_3 \end{cases}$$

Baza S_1 este baza în care forma pătratică are expresia

$h(\mathbf{x}) = 3y_1^2 + \frac{14}{3}y_2^2 - \frac{28}{3}y_2y_3 - \frac{7}{3}y_3^2$, adică y_1, y_2, y_3 sunt coordonatele vectorului $\mathbf{x}$ în baza S_1. Se scrie

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) = 3y_1^2 & \\ & + \underline{\tfrac{14}{3}y_2^2 - \tfrac{28}{3}y_2y_3} \\ & \qquad -\tfrac{7}{3}y_3^2. \end{aligned}$$

<u>pasul 2.</u> Se grupează termenii din expresia lui $h(\mathbf{x})$ care conţin y_2 (a doua linie din expresia formei $h(\mathbf{x})$ de la pasul 1) şi se completează la un pătrat perfect, folosind

$(a+b)^2 = \underline{a^2 + 2ab} + b^2$.

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) &= 3y_1^2 + \underline{\tfrac{14}{3}\left(y_2^2 - 2y_2y_3\right)} - \tfrac{7}{3}y_3^2 = \\ &= 3y_1^2 + \tfrac{14}{3}\left(\underline{y_2^2 - 2y_2y_3} + \underbrace{y_3^2}\right) - \tfrac{14}{3}\underbrace{y_3^2} - \tfrac{7}{3}y_3^2 = \\ &= 3y_1^2 + \tfrac{14}{3}(y_2 - y_3)^2 - 7y_3^2. \end{aligned}$$

<u>pasul 2'.</u> Se face schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = \qquad y_2 - y_3 \\ z_3 = \qquad\quad y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = \qquad z_2 + z_3 \\ y_3 = \qquad\quad z_3 \end{cases}$$

Se notează $\mathbf{G}_2 = {}_{S_1}\mathbf{A}_{S_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matricea de trecere de la baza S_1 la baza $S_2 = (\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2, \mathbf{e}''_3)$, unde

$$\begin{cases} \mathbf{e}''_1 = \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}''_2 = \qquad \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}''_3 = \qquad \mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_3 \end{cases}$$

Baza S_2 este baza în care forma pătratică are expresia

$h(\mathbf{x}) = 3z_1^2 + \frac{14}{3}z_2^2 - 7z_3^2$,

adică z_1, z_2, z_3 sunt coordonatele vectorului $\mathbf{x}$ în baza S_2. Se observă că forma anterioară este chiar o formă canonică.

<u>pasul 1'-2'.</u> Se putea face direct în expresia iniţială a $h(\mathbf{x})$ "sumă" de pătrate, făcând schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \qquad\qquad = x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_3 \\ z_2 = \qquad y_2 - y_3 = \qquad x_2 - x_3 \\ z_3 = \qquad\quad y_3 = \qquad\quad x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = z_1 + \frac{2}{3}z_2 + 2z_3 \\ x_2 = \qquad z_2 + z_3 \\ x_3 = \qquad\quad z_3 \end{cases}$$

corespondentă schimbării de baze

$$\begin{cases} \mathbf{e}''_1 = \mathbf{e}'_1 \qquad\quad = \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}''_2 = \qquad \mathbf{e}'_2 \qquad = \frac{2}{3}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}''_3 = \qquad \mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_3 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \end{cases}$$

şi matricei nesingulare

$$\mathbf{G} = {}_C\mathbf{A}_{S_2} = {}_C\,\mathbf{A}_{S_1} \cdot {}_{S_1}\mathbf{A}_{S_2} = \mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

•Baza din $\mathbb{R}_3$ în care h are forma canonică

$h(\mathbf{x}) = 3z_1^2 + \frac{14}{3}z_2^2 - 7z_3^2$

este $S_2 = (\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2, \mathbf{e}''_3)$, dar nu este bază ortonormată ($\mathbf{G}$ nu este matrice ortogonală). Se observă că

$$\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{14}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} = \mathbf{D_G},$$

adică $\mathbf{D_G} = (h)_{S_2}$ iar $\mathbf{G} =_C \mathbf{A}_{S_2}$.

III) Metoda Jacobi -este aplicabilă numai pentru acele forme pătratice care au toţi $\Delta_i \neq 0$.

Etapa 1. Dacă se poate aplica metoda, se determină o formă canonică pentru $h(\mathbf{x})$. Fie

$$\mathbf{A} = (h)_C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta_0 = 1; \Delta_1 = 3 \neq 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 14 \neq 0; \Delta_3 = \det \mathbf{A} = -98 \neq 0.$$

O formă canonică pentru $h(\mathbf{x})$ este

$$\boxed{h(\mathbf{x}) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} y_3^2} \Rightarrow h(\mathbf{x}) = \frac{1}{3} y_1^2 + \frac{3}{14} y_2^2 + \frac{14}{-98} y_3^2,$$

unde y_1, y_2, y_3 sunt coordonatele vectorului $\mathbf{x}$ într-o bază $\widetilde{S}$ care se va determina.

Etapa 2. Se determină baza $\widetilde{S}$ în care $h(\mathbf{x})$ are forma canonică anterioară.

•Se determină o matrice $\mathbf{B}$ superior triunghiulară asemenea cu $\mathbf{A} = (h)_C$ cu algoritmul Gauss, aplicând transformări elementare ce nu modifică determinantul (valoarea unui determinant nu se schimbă dacă la elementele unei linii adunăm combinaţii liniare formate cu elementele altor două sau mai multe linii).

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{l_1 \\ \frac{2}{3} l_1 + 1 \cdot l_2 \\ \frac{4}{3} l_1 + 1 \cdot l_3}}{\overset{pasul 1}{\sim}} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 0 & \frac{14}{3} & \frac{-14}{3} \\ 0 & \frac{-14}{3} & \frac{-7}{3} \end{pmatrix} \underset{\substack{l_1 \\ l_2 \\ l_2 + 1 \cdot l_3}}{\overset{pasul 2}{\sim}} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 0 & \frac{14}{3} & \frac{-14}{3} \\ 0 & 0 & \frac{-21}{3} \end{pmatrix}$$

Se face schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} y_1 = 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ y_2 = \frac{14}{3} x_2 - \frac{14}{3} x_3 \\ y_3 = -\frac{21}{3} x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} y_1 + \frac{1}{7} y_2 - \frac{2}{7} y_3 \\ x_2 = \frac{3}{14} y_2 - \frac{1}{7} y_3 \\ x_3 = -\frac{1}{7} y_3 \end{cases}$$

corespondentă schimbării de baze

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{3} \mathbf{e}_1 \\ \widetilde{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{7} \mathbf{e}_1 + \frac{3}{14} \mathbf{e}_2 \\ \widetilde{\mathbf{e}}_3 = -\frac{2}{7} \mathbf{e}_1 - \frac{1}{7} \mathbf{e}_2 - \frac{1}{7} \mathbf{e}_3 \end{cases}$$

şi matricei

$$\mathbf{J} =_C \mathbf{A}_{\widetilde{S}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & \frac{3}{14} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

•Baza din $\mathbb{R}_3$ în care h are forma canonică

$$h(\mathbf{x}) = \frac{1}{3} y_1^2 + \frac{3}{14} y_2^2 + \frac{14}{-98} y_3^2$$

este $\widetilde{S} = (\widetilde{\mathbf{e}}_1, \widetilde{\mathbf{e}}_2, \widetilde{\mathbf{e}}_3)$, dar nu este bază ortonormată ($\mathbf{J}$ nu este matrice ortogonală). Se observă că

$$\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{14} & 0 \\ -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & \frac{3}{14} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{14} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$
$$= \mathbf{D_J},$$

adică $\mathbf{D_J} = (h)_{\widetilde{S}}$ iar $\mathbf{J} =_C \mathbf{A}_{\widetilde{S}}$.

Concluzii :

• este verificată teorema lui Sylvester sau teorema inerţiei, adică cele trei forme canonice determi-

nate ale formei pătratice sunt de acelaşi tip, este aceeaşi signatură $(p,q,d)=(2,1,0)$.
• $\operatorname{rang} h=\operatorname{rang}\mathbf{A}=3\Rightarrow h$ este nedegenerată.
• natura formei pătratice: deoarece în formele canonice ale h apar şi coeficienţi pozitivi şi coeficienţi negativi, atunci h este formă pătratică nedefinită.

d) $h:\mathbb{R}_3\to\mathbb{R}$**,** $h(\mathbf{x})=2x_1x_2+4x_1x_3$,

unde x_1,x_2,x_3 sunt coordonatele vectorului $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ în baza canonică din $\mathbb{R}_3$.

Rezolvare. Se scrie

$$\begin{array}{rl}h(\mathbf{x})=0x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3 & \\ +0x_2^2+0x_2x_3 & \Rightarrow \mathbf{A}=(h)_C=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}. \\ +0x_3^2. & \end{array}$$

I) Metoda valorilor şi vectorilor proprii (**a transformărilor ortogonale**)

Se caută $\mathbf{D}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice diagonală şi $\mathbf{P}_o\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice nesingulară (se va găsi chiar ortogonală) astfel încât $\mathbf{P}_o^T\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}_o=\mathbf{D}$.

Etapa 1. Se determină valorile proprii ale matricei $\mathbf{A}$, precum şi multiplicitatea lor algebrică.

•Se determină polinomul caracteristic al matricei $\mathbf{A}, P_{\mathbf{A}}(\lambda)$.

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda)\overset{\text{mod }1}{=}\begin{vmatrix}0-\lambda&1&2\\1&0-\lambda&0\\2&0&0-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+5\lambda=-\lambda\left(\lambda-\sqrt{5}\right)\left(\lambda+\sqrt{5}\right).$$

•Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei $\mathbf{A}$,

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda)=0\Leftrightarrow-\lambda\left(\lambda-\sqrt{5}\right)\left(\lambda+\sqrt{5}\right)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1=0\in\mathbb{R}\text{ cu }m(\lambda_1)=1;\\ \lambda_2=\sqrt{5}\in\mathbb{R}\text{ cu }m(\lambda_2)=1;\\ \lambda_3=-\sqrt{5}\in\mathbb{R}\text{ cu }m(\lambda_3)=1.\end{cases}$$

Etapa 1'. O formă canonică a formei pătratice este

$$h(\mathbf{x})=0y_1^2+\sqrt{5}y_2^2-\sqrt{5}y_3^2,$$

unde y_1,y_2,y_3 sunt coordonatele vectorului $\mathbf{x}$ într-o bază S_o din $\mathbb{R}_3$ care se va determina.

Etapa 2. Se determină subspaţiile proprii ale matricei $\mathbf{A}$, precum şi dimensiunile lor.

$\boxed{\lambda_1=0}$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1=0$, adică

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}_3,\ \mathbf{x}\neq\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}_3}\text{ a.î.}(\mathbf{A}-0\mathbf{I}_3)\,\mathbf{x}=\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}_3},\text{ adică}$$

$$\begin{cases}0x_1+1x_2+2x_3=0\\1x_1+0x_2+0x_3=0\\2x_1+0x_2+0x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=-2\alpha\\x_3=\alpha\in\mathbb{R}\end{cases}\Rightarrow$$

$$S_{\lambda_1}(\mathbf{A})=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}_3;\mathbf{x}=\begin{pmatrix}0\\-2\alpha\\\alpha\end{pmatrix}=\alpha\underbrace{\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_1},\alpha\in\mathbb{R}\right\}=[(\mathbf{v}_1)].$$

$$\dim_{\mathbb{R}}S_{\lambda_1}(\mathbf{A})=1=m(\lambda_1).$$

$\boxed{\lambda_2=\sqrt{5}}$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2=\sqrt{5}$, adică

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}_3,\ \mathbf{x}\neq\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}_3}\text{ a.î.}\left(\mathbf{A}-\sqrt{5}\mathbf{I}_3\right)\mathbf{x}=\boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}_3},\text{ adică}$$

$$\begin{cases} -\sqrt{5}x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 0 \\ 1x_1 - \sqrt{5}x_2 + 0x_3 = 0 \\ 2x_1 + 0x_2 - \sqrt{5}x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}\beta \\ x_2 = \frac{1}{2}\beta \\ x_3 = \beta \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$$S_{\lambda_2}(\mathbf{A}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_3; \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{2}\beta \\ \frac{1}{2}\beta \\ \beta \end{pmatrix} = \beta \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_2}, \beta \in \mathbb{R} \right\} = [(\mathbf{v}_2)].$$

$\dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_2}(\mathbf{A}) = 1 = m(\lambda_2)$.

$\boxed{\lambda_3 = -\sqrt{5}}$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_3 = -\sqrt{5}$, adică

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3$, $\mathbf{x} \neq \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}_3}$ a.î.$\left(\mathbf{A} + \sqrt{5}\mathbf{I}_3\right)\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}_3}$, adică

$$\begin{cases} \sqrt{5}x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 0 \\ 1x_1 + \sqrt{5}x_2 + 0x_3 = 0 \\ 2x_1 + 0x_2 + \sqrt{5}x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-\sqrt{5}}{2}\gamma \\ x_2 = \frac{1}{2}\gamma \\ x_3 = \gamma \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$$S_{\lambda_2}(\mathbf{A}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_3; \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{5}}{2}\gamma \\ \frac{1}{2}\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \gamma \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_3}, \gamma \in \mathbb{R} \right\} = [(\mathbf{v}_3)].$$

$\dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_3}(\mathbf{A}) = 1 = m(\lambda_3)$.

Etapa 3. Conform teoremei Jordan, matricea $\mathbf{A}$ este diagonalizabilă, adică

$\exists \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ matrice diagonală şi $\exists \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{5}}{2} & \frac{-\sqrt{5}}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ matrice modală (are pe coloane vectori proprii ai matricei $\mathbf{A}$), astfel încât $\mathbf{A} \sim \mathbf{D}$, adică $\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1}$ sau $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$.

$S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ este o bază în $\mathbb{R}_3$ formată din vectori proprii ai matricei $\mathbf{A}$.

Etapa 4. Se ortonormează baza S utilizând procedeul de ortonormare Gram-Schmidt.

•Se observă că $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ este un sistem liniar independent de vectori (e bază în $\mathbb{R}_3$).

•Se caută $\overline{S} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ un sistem de vectori liniar independent ortogonal a.î. $\left[\overline{S}\right] = [S]$. Se observă că $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sunt vectori proprii corespunzători la valori distincte, deci sunt ortogonali (sau se verifică prin calcul). Atunci

$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3$.

$\|\mathbf{u}_1\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = 5; \|\mathbf{u}_3\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = \frac{10}{4}; \|\mathbf{u}_3\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = \frac{10}{4}.$

• Se caută $S_o = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ un sistem de vectori liniar independent care să conţină doar versori a.î. $[S_o] = \left[\overline{S}\right]$. Se găseşte

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_1\|}\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_2\|}\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{10}{4}}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_3\|}\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{\frac{10}{4}}} \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

S-a găsit $S_o = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ o bază ortonormată în $\mathbb{R}_3$, formată din vectori proprii ai matricei

A.
•Se construieşte matricea modală care are drept coloane vectorii proprii ortonormaţi, $\mathbf{P}_o =_C \mathbf{A}_{S_o}$,
$\mathbf{P}_o = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ matrice modală (are pe coloane vectori proprii ai matricei $\mathbf{A}$) ortogonală ($\mathbf{P}_o^T \cdot \mathbf{P}_o = \mathbf{P}_o \cdot \mathbf{P}_o^T = \mathbf{I}_3$ sau $(\mathbf{P}_o)^{-1} = \mathbf{P}_o^T$) şi se observă că

$$\mathbf{P}_o^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_o = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$= \mathbf{D}$, adică $\mathbf{A} \overset{o}{\sim} \mathbf{D}$.

Etapa 4'. Baza ortonormată din $\mathbb{R}_3$ în care h are forma canonică

$$h(\mathbf{x}) = 0y_1^2 + \sqrt{5}y_2^2 - \sqrt{5}y_3^2$$

este baza ortonormată S_o, adică y_1, y_2, y_3 sunt coordonatele vectorului $\mathbf{x}$ în baza S_o. Se observă că

$$\mathbf{P}_o^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_o = \mathbf{D}$$

adică $\mathbf{D} = (h)_{S_o}$ iar $\mathbf{P}_o =_C \mathbf{A}_{S_o}$.

Mai mult, transformarea ortogonală (schimbarea de coordonate) cu ajutorul căreia se determină forma canonică este

$$\begin{cases} x_1 = 0y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{-1}{\sqrt{2}}y_3 \\ x_2 = \frac{-2}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{10}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{10}}y_3 \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{2}{\sqrt{10}}y_2 + \frac{2}{\sqrt{10}}y_3 \end{cases}$$

II) Metoda Gauss.

Cum $\forall i = \overline{1,3}, a_{ii} = 0 \Rightarrow$ Se aplică varianta 2 a metodei Gauss. Se scrie

$$h(\mathbf{x}) = \underline{0x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3} \\ \qquad +0x_2^2 + 0x_2x_3 \\ \qquad\qquad +0x_3^2.$$

pasul 0. Se face schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = \qquad\quad y_3 \end{cases}$$

Se notează $\mathbf{G}_0 =_C \mathbf{A}_{S_0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matricea de trecere de la baza C la baza S_0. Baza S_0 este baza în care forma pătratică are expresia

$$h(\mathbf{x}) = 2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + 4(y_1 + y_2)y_3$$

$$h(\mathbf{x}) = \underline{2y_1^2 + 0y_1y_2 + 4y_1y_3} \\ \qquad -2y_2^2 + 4y_2y_3 \\ \qquad\qquad +0y_3^2.$$

adică y_1, y_2, y_3 sunt coordonatele vectorului $\mathbf{x}$ în baza S_0.

pasul 1, 2. Se grupează termenii din expresia lui $h(\mathbf{x})$ care conţin y_1 (prima linie din expresia formei $h(\mathbf{x})$) şi se completează la un pătrat perfect.

$$h(\mathbf{x}) = \underline{2\left(y_1^2 + 2y_1y_3\right)} - 2y_2^2 + 4y_2y_3 =$$

$$= 2\left(y_1^2 + 2y_1y_3 + y_3^2\right) - 2y_3^2 - 2y_2^2 + 4y_2y_3 =$$

Se grupează termenii din expresia lui $h(\mathbf{x})$ care conţin y_2 şi se completează la un pătrat perfect.

$$= 2(y_1 + y_3)^2 - 2(y_2 - y_3)^2$$

pasul 1',2'. Se face schimbarea de coordonate

$$\left\{\begin{array}{ll} z_1 = y_1 & + y_3 \\ z_2 = & y_2 - y_3 \\ z_3 = & y_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} y_1 = z_1 & - z_3 \\ y_2 = & z_2 + z_3 \\ y_3 = & z_3 \end{array}\right.$$

Se notează $\mathbf{G}_{12} =_{S_0} \mathbf{A}_{S_{12}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matricea de trecere de la baza S_0 la baza S_{12}. Baza S_{12} este baza în care forma pătratică are expresia

$h(\mathbf{x}) = 2z_1^2 - 2z_2^2$, adică z_1, z_2, z_3 sunt coordonatele vectorului $\mathbf{x}$ în baza S_{12}. Se observă că forma anterioară este chiar o formă canonică.

<u>pasul 3'</u>. Se determină

$$\mathbf{G} =_C \mathbf{A}_{S_{12}} =_C \mathbf{A}_{S_0} \cdot_{S_0} \mathbf{A}_{S_{12}} = \mathbf{G}_0 \cdot \mathbf{G}_{12} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Baza din $\mathbb{R}_3$ în care h are forma canonică

$h(\mathbf{x}) = 2z_1^2 - 2z_2^2$ este

$$S_{12} = \left(\mathbf{e}_1'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2'' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3'' = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

dar nu este bază ortonormată ($\mathbf{G}$ nu este matrice ortogonală). Se observă că

$$\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{D_G},$$

adică $\mathbf{D_G} = (h)_{S_{12}}$ iar $\mathbf{G} =_C \mathbf{A}_{S_{12}}$.

III) Metoda Jacobi.

<u>Etapa 1</u>. Dacă se poate aplica metoda, se determină o formă canonică pentru $h(\mathbf{x})$.

Fie $\mathbf{A} = (h)_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\Delta_0 = 1; \Delta_1 = 0 \Rightarrow$ nu se poate aplica metoda Jacobi.

Concluzii :

• este verificată teorema lui Sylvester sau teorema inerţiei, adică cele două forme canonice determinate ale formei pătratice sunt de acelaşi tip, este aceeaşi signatură $(p, q, d) = (1, 1, 1)$

• $\operatorname{rang} h = \operatorname{rang} \mathbf{A} = 2 < 3 \Rightarrow h$ este degenerată.

• natura formei pătratice: deoarece în formele canonice ale h apar şi coeficienţi pozitivi şi coeficienţi negativi, atunci h este formă pătratică nedefinită.

[completare] **e)** $h : \mathbb{R}_4 \to \mathbb{R}$, $h(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$,

unde x_1, x_2, x_3, x_4 sunt coordonatele vectorului $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ în baza canonică din $\mathbb{R}_4$.

Rezolvare. Se scrie

$$\begin{array}{r} h(\mathbf{x}) = 0x_1^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 0x_1x_4 \\ +0x_2^2 + 0x_2x_3 - 6x_2x_4 \\ +0x_3^2 + 2x_3x_4 \\ +0x_3^2. \end{array} \Rightarrow \mathbf{A} = (h)_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

I) Metoda valorilor şi vectorilor proprii (**a transformărilor ortogonale**)

Se caută $\mathbf{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice diagonală şi $\mathbf{P}_o \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice nesingulară (se va găsi chiar ortogonală) astfel încât $\mathbf{P}_o^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_o = \mathbf{D}$.

Etapa 1. Se determină valorile proprii ale matricei $\mathbf{A}$, precum şi multiplicitatea lor algebrică.

•Se determină polinomul caracteristic al matricei $\mathbf{A}, P_{\mathbf{A}}(\lambda)$.

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) \overset{\text{mod } 1}{=} \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0-\lambda & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 0-\lambda & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 20\lambda^2 + 64 = (\lambda+4)(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-4).$$

•Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei $\mathbf{A}$,

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda+4)(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -4 \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_1) = 1; \\ \lambda_2 = -2 \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_2) = 1; \\ \lambda_3 = 2 \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_3) = 1; \\ \lambda_4 = 4 \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_4) = 1. \end{cases}$$

Etapa 1'. O formă canonică a formei pătratice este

$h(\mathbf{x}) = -4y_1^2 - 2y_2^2 + 2y_3^2 + 4y_4^2$,

unde y_1, y_2, y_3, y_4 sunt coordonatele vectorului $\mathbf{x}$ într-o bază S_o din $\mathbb{R}_4$ care se va determina.

Etapa 2. Se determină subspaţiile proprii ale matricei $\mathbf{A}$, precum şi dimensiunile lor.

$\boxed{\lambda_1 = -4}$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = -4$, adică

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_4,\ \mathbf{x} \neq \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}_4} \text{ a.î.} (\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_4)\,\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}_4}, \text{ adică}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 1x_2 - 3x_3 + 0x_4 = 0 \\ 1x_1 + 4x_2 + 0x_3 - 3x_4 = 0 \\ -3x_1 + 0x_2 + 4x_3 + 1x_4 = 0 \\ 0x_1 - 3x_2 + 1x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = -\alpha \\ x_4 = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$$S_{\lambda_1}(\mathbf{A}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_4; \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_1}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} = [(\mathbf{v}_1)].$$

$\dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_1}(\mathbf{A}) = 1 = m(\lambda_1)$.

$\boxed{\lambda_2 = -2}$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2 = -2$, adică

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_4,\ \mathbf{x} \neq \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}_4} \text{ a.î.} (\mathbf{A} + 2\mathbf{I}_4)\,\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}_4}, \text{ adică}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 - 3x_3 + 0x_4 = 0 \\ 1x_1 + 2x_2 + 0x_3 - 3x_4 = 0 \\ -3x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 1x_4 = 0 \\ 0x_1 - 3x_2 + 1x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \beta \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \beta \\ x_4 = \beta \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$$S_{\lambda_2}(\mathbf{A}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_4; \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix} = \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_2}, \beta \in \mathbb{R} \right\} = [(\mathbf{v}_2)].$$

$\dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_2}(\mathbf{A}) = 1 = m(\lambda_2)$.

$\boxed{\lambda_3 = 2}$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_3 = 2$, adică

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_4$, $\mathbf{x} \neq \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}_4}$ a.î.$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_4)\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}_4}$, adică

$$\begin{cases} -2x_1 + 1x_2 - 3x_3 + 0x_4 = 0 \\ 1x_1 - 2x_2 + 0x_3 - 3x_4 = 0 \\ -3x_1 + 0x_2 - 2x_3 + 1x_4 = 0 \\ 0x_1 - 3x_2 + 1x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \gamma \\ x_2 = -\gamma \\ x_3 = -\gamma \\ x_4 = \gamma \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$$S_{\lambda_3}(\mathbf{A}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_4; \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \gamma \\ -\gamma \\ -\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \gamma \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_3}, \gamma \in \mathbb{R} \right\} = [(\mathbf{v}_3)].$$

$\dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_3}(\mathbf{A}) = 1 = m(\lambda_3)$.

$\boxed{\lambda_4 = 4}$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_4 = 4$, adică

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_4$, $\mathbf{x} \neq \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}_4}$ a.î.$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}_4)\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}_{\mathbb{R}_4}$, adică

$$\begin{cases} -4x_1 + 1x_2 - 3x_3 + 0x_4 = 0 \\ 1x_1 - 4x_2 + 0x_3 - 3x_4 = 0 \\ -3x_1 + 0x_2 - 4x_3 + 1x_4 = 0 \\ 0x_1 - 3x_2 + 1x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\delta \\ x_2 = -\delta \\ x_3 = \delta \\ x_4 = \delta \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$$S_{\lambda_4}(\mathbf{A}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_4; \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\delta \\ -\delta \\ \delta \\ \delta \end{pmatrix} = \delta \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_4}, \delta \in \mathbb{R} \right\} = [(\mathbf{v}_4)].$$

$\dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_4}(\mathbf{A}) = 1 = m(\lambda_4)$.

Etapa 3. Conform teoremei Jordan, matricea $\mathbf{A}$ este diagonalizabilă, adică

$\exists \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ matrice diagonală şi $\exists \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in$ $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ matrice modală (are pe coloane vectori proprii ai matricei $\mathbf{A}$), astfel încât $\mathbf{A} \sim \mathbf{D}$, adică

$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1}$ sau $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$.

$S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ este o bază în $\mathbb{R}_4$ formată din vectori proprii ai matricei $\mathbf{A}$.

Etapa 4. Se ortonormează baza S utilizând procedeul de ortonormare Gramm-Schmidt.

•Se observă că $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ este un sistem liniar independent de vectori (e bază în $\mathbb{R}_3$).

• Se caută $\overline{S} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$ un sistem de vectori liniar independent ortogonal a.î. $[\overline{S}] = [S]$. Se observă că $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ sunt vectori proprii corespunzători la valori proprii distincte, deci sunt ortogonali (sau se verifică prin calcul). Atunci

$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_4 = \mathbf{v}_4$.

$\|\mathbf{u}_1\|^2 = 4; \|\mathbf{u}_2\|^2 = 4; \|\mathbf{u}_3\|^2 = 4; \|\mathbf{u}_4\|^2 = 4.$

• Se caută $S_o = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ un sistem de vectori liniar independent care să conţină doar versori a.î. $[S_o] = [\overline{S}]$. Se găseşte

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_1\|}\mathbf{u}_1 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_2\|}\mathbf{u}_2 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{w}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_3\|}\mathbf{u}_3 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_4 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_4\|}\mathbf{u}_4 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

S-a găsit $S_o = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ o bază ortonormată în $\mathbb{R}_4$, formată din vectori proprii ai matricei $\mathbf{A}$.

•Se construieşte matricea modală care are drept coloane vectorii proprii ortonormaţi, $\mathbf{P}_o =_C \mathbf{A}_{S_o}$,

$\mathbf{P}_o = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ matrice modală (are pe coloane vectori proprii ai matricei $\mathbf{A}$) ortogonală ($\mathbf{P}_o^T \cdot \mathbf{P}_o = \mathbf{P}_o \cdot \mathbf{P}_o^T = \mathbf{I}_4$ sau $(\mathbf{P}_o)^{-1} = \mathbf{P}_o^T$) şi Se observă că

$$\mathbf{P}_o^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_o = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$= \mathbf{D}$, adică $\mathbf{A} \overset{o}{\sim} \mathbf{D}$.

Etapa 4'. Baza ortonormată din $\mathbb{R}_4$ în care h are forma canonică

$h(\mathbf{x}) = -4y_1^2 - 2y_2^2 + 2y_3^2 + 4y_4^2$

este S_o, adică y_1, y_2, y_3, y_4 sunt coordonatele vectorului $\mathbf{x}$ în baza S_o. Se observă că

$\mathbf{P}_o^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_o = \mathbf{D}$

adică $\mathbf{D} = (h)_{S_o}$ iar $\mathbf{P}_o =_C \mathbf{A}_{S_o}$.

Mai mult, transformarea ortogonală (schimbarea de coordonate) cu ajutorul căreia se determină forma canonică este

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 + \frac{-1}{2}y_4 \\ x_2 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{-1}{2}y_3 + \frac{-1}{2}y_4 \\ x_3 = \frac{-1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{-1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4 \\ x_3 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4. \end{cases}$$

II) Metoda Gauss.

Cum $\forall i = \overline{1,4}, a_{ii} \neq 0 \Rightarrow$ Se aplică varianta 2 a metodei Gauss. Se scrie

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) = 0x_1^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 0x_1x_4 \\ +0x_2^2 + 0x_2x_3 - 6x_2x_4 \\ +0x_3^2 + 2x_3x_4 \\ +0x_3^2. \end{aligned}$$

pasul 0. Se face schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = \qquad\quad y_3 \\ x_4 = \qquad\qquad y_4 \end{cases}$$

Se notează $\mathbf{G}_0 =_C \mathbf{A}_{S_0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matricea de trecere de la baza C la baza S_0. Baza S_0 este baza în care forma pătratică are expresia

$$h(\mathbf{x}) = 2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) - 6(y_1 + y_2)y_3 - 6(y_1 - y_2)y_4 + 2y_3y_4.$$

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) = \underline{2y_1^2 + 0y_1y_2 - 6y_1y_3 - 6y_1y_4} \\ -2y_2^2 - 6y_2y_3 + 6y_2y_4 \\ +0y_3^2 + 2y_3y_4 \\ +0y_4^2. \end{aligned}$$

adică y_1, y_2, y_3, y_4 sunt coordonatele vectorului $\mathbf{x}$ în baza S_0.

pasul 1. Se grupează termenii din expresia lui $h(\mathbf{x})$ care conţin y_1 (prima linie din expresia formei $h(\mathbf{x})$) şi se completează la un pătrat perfect.

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) &= \underline{2\left(y_1^2 - 3y_1y_3 - 3y_1y_4\right)} - 2y_2^2 - 6y_2y_3 + 6y_2y_4 + 2y_3y_4 = \\ &= 2\left(y_1^2 + 2y_1\left(\tfrac{-3}{2}y_3\right) + 2y_1\left(\tfrac{-3}{2}y_4\right) + \left(\tfrac{-3}{2}y_3\right)^2 + \left(\tfrac{-3}{2}y_4\right)^2 + 2\left(\tfrac{-3}{2}y_3\right)\left(\tfrac{-3}{2}y_4\right)\right) - \\ &-2\left(\left(\tfrac{-3}{2}y_3\right)^2 + \left(\tfrac{-3}{2}y_4\right)^2 + 2\left(\tfrac{-3}{2}y_3\right)\left(\tfrac{-3}{2}y_4\right)\right) - 2y_2^2 - 6y_2y_3 + 6y_2y_4 + 2y_3y_4 = \\ &= 2\left(y_1 + \tfrac{-3}{2}y_3 + \tfrac{-3}{2}y_4\right)^2 - 2y_2^2 - 6y_2y_3 + 6y_2y_4 - \tfrac{9}{2}y_3^2 - 7y_3y_4 - \tfrac{9}{2}y_4^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) = 2\left(y_1 + \tfrac{-3}{2}y_3 + \tfrac{-3}{2}y_4\right)^2 \\ \underline{-2y_2^2 - 6y_2y_3 + 6y_2y_4} \\ -\tfrac{9}{2}y_3^2 - 7y_3y_4 \\ -\tfrac{9}{2}y_4^2. \end{aligned}$$

pasul 2. Se grupează termenii din expresia lui $h(\mathbf{x})$ care conţin y_2 (a doua linie din expresia formei $h(\mathbf{x})$) şi se completează la un pătrat perfect.

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) &= 2\left(y_1 + \tfrac{-3}{2}y_3 + \tfrac{-3}{2}y_4\right)^2 \underline{-2\left(y_2^2 + 3y_2y_3 - 3y_2y_4\right)} - \tfrac{9}{2}y_3^2 - 7y_3y_4 - \tfrac{9}{2}y_4^2 = \\ &= 2\left(y_1 + \tfrac{-3}{2}y_3 + \tfrac{-3}{2}y_4\right)^2 - 2\left(y_2^2 + 2y_2\left(\tfrac{3}{2}y_3\right) + 2y_2\left(\tfrac{-3}{2}y_4\right) + \left(\tfrac{3}{2}y_3\right)^2 + \left(\tfrac{-3}{2}y_4\right)^2 + 2\left(\tfrac{3}{2}y_3\right)\left(\tfrac{-3}{2}y_4\right)\right) + \\ &+2\left(\left(\tfrac{3}{2}y_3\right)^2 + \left(\tfrac{-3}{2}y_4\right)^2 + 2\left(\tfrac{3}{2}y_3\right)\left(\tfrac{-3}{2}y_4\right)\right) - \tfrac{9}{2}y_3^2 - 7y_3y_4 - \tfrac{9}{2}y_4^2 = \\ &= 2\left(y_1 + \tfrac{-3}{2}y_3 + \tfrac{-3}{2}y_4\right)^2 - 2\left(y_2 + \tfrac{-3}{2}y_3 + \tfrac{3}{2}y_4\right)^2 - 16y_3y_4 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) = 2\left(y_1 + \tfrac{-3}{2}y_3 + \tfrac{-3}{2}y_4\right)^2 \\ -2\left(y_2 + \tfrac{3}{2}y_3 + \tfrac{-3}{2}y_4\right)^2 \\ \underline{+0y_3^2 - 16y_3y_4} \\ +0y_4^2. \end{aligned}$$

pasul 2'. Se face schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} z_1 = y_1 & + \frac{-3}{2}y_3 + \frac{-3}{2}y_4 \\ z_2 = & y_2 + \frac{3}{2}y_3 + \frac{-3}{2}y_4 \\ z_3 = & y_3 \\ z_4 = & y_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 & + \frac{3}{2}z_3 + \frac{3}{2}z_4 \\ y_2 = & z_2 - \frac{3}{2}z_3 + \frac{3}{2}z_4 \\ y_3 = & z_3 \\ y_4 = & z_4 \end{cases}$$

Se notează $\mathbf{G}_{12} =_{S_0} \mathbf{A}_{S_{12}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matricea de trecere de la baza S_0 la baza S_{12}.

Baza S_{12} este baza în care forma pătratică are expresia

$h(\mathbf{x}) = 2z_1^2 - 2z_2^2 - 16z_3z_4$.

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) = 2z_1^2 &+ 0z_1z_2 + 0z_1z_3 + 0z_1z_4 \\ &-2z_2^2 + 0z_2z_3 + 0z_2z_4 \\ &\underline{+0z_3^2 - 16z_3z_4} \\ &+0z_4^2. \end{aligned}$$

adică z_1, z_2, z_3, z_4 sunt coordonatele vectorului $\mathbf{x}$ în baza S_{12}.

pasul 2.0. Se face schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} z_1 = t_1 \\ z_2 = t_2 \\ z_3 = t_3 + t_4 \\ z_4 = t_3 - t_4 \end{cases}$$

se notează $\mathbf{G}_{20} =_{S_{12}} \mathbf{A}_{S_{20}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ matricea de trecere de la baza S_{12} la baza S_{20}.

Baza S_{20} este baza în care forma pătratică are expresia

$h(\mathbf{x}) = 2t_1^2 - 2t_2^2 - 16(t_3 + t_4)(t_3 - t_4) = 2t_1^2 - 2t_2^2 - 16t_3^2 + 16t_4^2$,

adică t_1, t_2, t_3, t_4 sunt coordonatele vectorului $\mathbf{x}$ în baza S_{20}. Se observă că forma anterioară este chiar o formă canonică.

pasul 3'. Se determină

$$\mathbf{G} =_C \mathbf{A}_{S_0} \cdot_{S_0} \mathbf{A}_{S_{12}} \cdot_{S_{12}} \mathbf{A}_{S_{20}} = \mathbf{G}_0 \cdot \mathbf{G}_{12} \cdot \mathbf{G}_{20} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Baza din $\mathbb{R}_4$ în care h are forma canonică

$h(\mathbf{x}) = 2t_1^2 - 2t_2^2 - 16t_3^2 + 16t_4^2$

este $S_{20} = \left(\mathbf{e}_1'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2'' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3'' = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_4'' = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$, dar nu este bază ortonormată. Se observă că

$$\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$
$$= \mathbf{D}_{\mathbf{G}},$$

adică $\mathbf{D}_{\mathbf{G}} = (h)_{S_2}$ iar $\mathbf{G} =_C \mathbf{A}_{S_2}$ ($\mathbf{G}$ nu este matrice ortogonală).

III) Metoda Jacobi.

Etapa 1. Dacă se poate aplica metoda, se determină o formă canonică pentru $h(\mathbf{x})$.

$$\text{Fie } \mathbf{A} = (h)_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\Delta_0 = 1; \Delta_1 = 0 \Rightarrow$ nu se poate aplica metoda Jacobi.

Concluzii :

• este verificată teorema lui Sylvester sau teorema inerţiei, adică cele două forme canonice determinate ale formei pătratice sunt de acelaşi tip, este aceeaşi signatură $(p, q, d) = (2, 2, 0)$

• $\operatorname{rang} h = \operatorname{rang} \mathbf{A} = 4\,(\det \mathbf{A} = 64) \Rightarrow h$ este nedegenerată.

• natura formei pătratice : deoarece în formele canonice ale h apar şi coeficienţi pozitivi şi coeficienţi negativi, atunci h este formă pătratică nedefinită.

Exerciţiul 3. Utilizând metoda lui Jacobi, să se determine o formă canonică pentru următoarele forme pătratice h pe $\mathbb{R}_n$, indicând baza din $\mathbb{R}_n$ în care h are forma canonică (indicând matricea cu care se obţine forma canonică). Să se precizeze pentru fiecare din ele rangul, signatura şi natura formei pătratice.

a) $h : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}$, $h(\mathbf{x}) = x_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2 - 8x_1x_2 - 16x_1x_3 - 8x_2x_3$,

unde x_1, x_2, x_3 sunt coordonatele vectorului $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ în baza canonică din $\mathbb{R}_3$.

Rezolvare. Se scrie

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) = x_1^2 - 8x_1x_2 - 16x_1x_3 & \\ +7x_2^2 - 8x_2x_3 & \\ +x_3^2. & \end{aligned} \quad \Rightarrow \mathbf{A} = (h)_C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

III) Metoda Jacobi.

Etapa 1. Se determină, dacă se poate aplica metoda, o formă canonică pentru $h(\mathbf{x})$. Se calculează

$$\Delta_0 = 1; \Delta_1 = 1 \neq 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = -9 \neq 0; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -729 \neq 0.$$

O formă canonică pentru $h(\mathbf{x})$ este

$$\boxed{h(\mathbf{x}) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} y_3^2} \Rightarrow h(\mathbf{x}) = \frac{1}{1} y_1^2 + \frac{1}{-9} y_2^2 + \frac{-9}{-729} y_3^2,$$

unde y_1, y_2, y_3 sunt coordonatele vectorului $\mathbf{x}$ într-o bază $\widetilde{S}$ care se va determina.

Etapa 2. Se determină baza $\widetilde{S}$ în care $h(\mathbf{x})$ are forma canonică anterioară.

•Se determină o matrice $\mathbf{B}$ superior triunghiulară asemenea cu $\mathbf{A} = (h)_C$ cu algoritmul Gauss, aplicând transformări elementare ce nu modifică determinantul (valoarea unui determinant nu se schimbă dacă la elementele unei linii adunăm combinaţii liniare formate cu elementele altor două sau mai multe linii).

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{l_1 \\ 4l_1 + 1 \cdot l_2 \\ 8l_1 + 1 \cdot l_3}}{\overset{pasul1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ 0 & -9 & -36 \\ 0 & -36 & -63 \end{pmatrix} \underset{\substack{l_1 \\ l_2 \\ -4l_2 + 1 \cdot l_3}}{\overset{pasul2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ 0 & -9 & -36 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}$$

Se face schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 4x_2 - 8x_3 \\ y_2 = \quad -9x_2 - 36x_3 \\ y_3 = \quad +81x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{4}{9}y_2 - \frac{8}{81}y_3 \\ x_2 = \quad -\frac{1}{9}y_2 - \frac{4}{81}y_3 \\ x_3 = \quad +\frac{1}{81}y_3 \end{cases}$$

corespondentă schimbării de baze

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1 \\ \widetilde{\mathbf{e}}_2 = -\frac{4}{9}\mathbf{e}_1 - \frac{4}{81}\mathbf{e}_2 \\ \widetilde{\mathbf{e}}_3 = -\frac{8}{81}\mathbf{e}_1 - \frac{4}{81}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{81}\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

şi matricei

$$\mathbf{J} =_C \mathbf{A}_{\widetilde{S}} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{9} & -\frac{8}{81} \\ 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{81} \\ 0 & 0 & \frac{1}{81} \end{pmatrix}.$$

•Baza din $\mathbb{R}_3$ în care h are forma canonică

$$h(\mathbf{x}) = y_1^2 - \frac{1}{9}y_2^2 + \frac{1}{81}y_3^2$$

este $\widetilde{S} = (\widetilde{\mathbf{e}}_1, \widetilde{\mathbf{e}}_2, \widetilde{\mathbf{e}}_3)$, dar nu este bază ortonormată. Se observă că

$$\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & 0 \\ -\frac{8}{81} & -\frac{4}{81} & \frac{1}{81} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{9} & -\frac{8}{81} \\ 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{81} \\ 0 & 0 & \frac{1}{81} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{81} \end{pmatrix} = \\ = \mathbf{D_J}.$$

adică $\mathbf{D_J} = (h)_{\widetilde{S}}$ iar $\mathbf{J} =_C \mathbf{A}_{\widetilde{S}}$.($\mathbf{J}$ nu este matrice ortogonală).

Concluzii :

• forma pătratică are signatura $(p, q, d) = (2, 1, 0)$.

• $\operatorname{rang} h = \operatorname{rang} \mathbf{A} = 3 \Rightarrow h$ este nedegenerată.

• natura formei pătratice : deoarece în formele canonice ale h apar şi coeficienţi pozitivi şi coeficienţi negativi, atunci h este formă pătratică nedefinită.

c) $h : \mathbb{R}_4 \to \mathbb{R}$, $h(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_4^2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 6x_3x_4$,

unde x_1, x_2, x_3, x_4 sunt coordonatele vectorului $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ în baza canonică din $\mathbb{R}_4$.

Rezolvare. Se scrie

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) = x_1^2 + 0x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 \\ +x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 \\ +4x_3^2 + 6x_3x_4 \\ +4x_3^2. \end{aligned} \Rightarrow \mathbf{A} = (h)_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

III) Metoda Jacobi.

Etapa 1. Dacă se poate aplica metoda, se determină o formă canonică pentru $h(\mathbf{x})$. Se calculează

$$\Delta_0 = 1; \Delta_1 = 1 \neq 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0; \Delta_4 = \det \mathbf{A} = -2 \neq 0.$$

O formă canonică pentru $h(\mathbf{x})$ este

$$\boxed{h(\mathbf{x}) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}y_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}y_3^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_4}y_4^2} \Rightarrow h(\mathbf{x}) = \frac{1}{1}y_1^2 + \frac{1}{1}y_2^2 + \frac{1}{-1}y_3^2 + \frac{-1}{-2}y_4^2,$$

unde y_1, y_2, y_3, y_4 sunt coordonatele vectorului $\mathbf{x}$ într-o bază $\widetilde{S}$ care se va determina.

Etapa 2. Se determină baza $\widetilde{S}$ în care $h(\mathbf{x})$ are forma canonică anterioară.

•Se determină o matrice $\mathbf{B}$ superior triunghiulară asemenea cu $\mathbf{A} = (h)_C$ cu algoritmul Gauss, aplicând transformări elementare ce nu modifică determinantul (valoarea unui determinant nu se schimbă dacă la elementele unei linii adunăm combinaţii liniare formate cu elementele altor două sau mai multe linii).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \overset{pasul1}{\sim} \\ l_1 \\ l_2 \\ -2l_1 + 1 \cdot l_3 \\ -l_1 + 1 \cdot l_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \overset{pasul2}{\sim} \\ l_1 \\ l_2 \\ -l_2 + 1 \cdot l_3 \\ -l_2 + 1 \cdot l_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Se face schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 0x_2 + 2x_3 + x_4 \\ y_2 = \quad x_2 + x_3 + x_4 \\ y_3 = \quad -x_3 + 0x_4 \\ y_4 = \quad 2x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + 0y_2 + 2y_3 - \frac{1}{2}y_4 \\ x_2 = \quad y_2 + y_3 - \frac{1}{2}y_4 \\ x_3 = \quad -y_3 + 0y_4 \\ x_4 = \quad \frac{1}{2}y_4 \end{cases}$$

corespondentă schimbării de baze

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1 \\ \widetilde{\mathbf{e}}_2 = \quad \mathbf{e}_2 \\ \widetilde{\mathbf{e}}_3 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \\ \widetilde{\mathbf{e}}_4 = -\frac{1}{2}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_4 \end{cases}$$

şi matricei

$$\mathbf{J} =_C \mathbf{A}_{\widetilde{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

•Baza din $\mathbb{R}_3$ în care h are forma canonică

$$h(\mathbf{x}) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 + \frac{1}{2}y_4^2$$

este $\widetilde{S} = (\widetilde{\mathbf{e}}_1, \widetilde{\mathbf{e}}_2, \widetilde{\mathbf{e}}_3, \widetilde{\mathbf{e}}_4)$, dar nu este bază ortonormată. Se observă că

$$\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \mathbf{D_J}.$$

adică $\mathbf{D_J} = (h)_{\widetilde{S}}$ iar $\mathbf{J} =_C \mathbf{A}_{\widetilde{S}}$.($\mathbf{J}$ nu este matrice ortogonală).

Concluzii :

• forma pătratică are signatura $(p, q, d) = (3, 1, 0)$.

• $\operatorname{rang} h = \operatorname{rang} \mathbf{A} = 4 \Rightarrow h$ este nedegenerată.

• natura formei pătratice: deoarece în formele canonice ale h apar şi coeficienţi pozitivi şi coeficienţi negativi, atunci h este formă pătratică nedefinită.

Exerciţiul 4. Să se determine valorile parametrului $\lambda \in \mathbb{R}$ pentru care formele pătratice de mai jos sunt pozitiv sau negativ definite :

a) $h : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}$, $h(\mathbf{x}) = \lambda x_1^2 + (\lambda + 3) x_2^2 - 4x_1x_2$.

Rezolvare. Se scrie

$$\begin{array}{l} h(\mathbf{x}) = \lambda x_1^2 - 4x_1x_2 \\ \qquad + (\lambda + 3) x_2^2 \end{array} \Rightarrow \mathbf{A} = (h)_C = \begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ -2 & \lambda + 3 \end{pmatrix}.$$

Se calculează

$$\Delta_0 = 1; \Delta_1 = \lambda; \Delta_2 = \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ -2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 4 = (\lambda + 4)(\lambda - 1).$$

h este pozitiv definită $\Leftrightarrow [\Delta_1 > 0$ şi $\Delta_2 > 0] \Leftrightarrow$

$[\lambda > 0$ şi $(\lambda + 4)(\lambda - 1) > 0] \Leftrightarrow \lambda \in]1, +\infty[$.

h este negativ definită $\Leftrightarrow [\Delta_1 < 0$ şi $\Delta_2 > 0] \Leftrightarrow$

$[\lambda < 0$ şi $(\lambda + 4)(\lambda - 1) > 0] \Leftrightarrow \lambda \in]-\infty, -4[$.

b) $h : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}$, $h(\mathbf{x}) = -9x_1^2 - 6x_2^2 + 6\lambda x_1 x_2$.

Rezolvare. Se scrie

$$h(\mathbf{x}) = \begin{array}{r} -9x_1^2 + 6\lambda x_1 x_2 \\ -6x_2^2 \end{array} \quad \Rightarrow \mathbf{A} = (h)_C = \begin{pmatrix} -9 & 3\lambda \\ 3\lambda & -6 \end{pmatrix}.$$

Se calculează

$$\Delta_0 = 1; \Delta_1 = -9; \Delta_2 = \begin{vmatrix} -9 & 3\lambda \\ 3\lambda & -6 \end{vmatrix} = -9\lambda^2 + 54 = (-9)\left(\lambda - \sqrt{6}\right)\left(\lambda + \sqrt{6}\right).$$

Cum $\Delta_1 = -9 < 0 \Rightarrow h$ nu poate fi pozitiv definită, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

h este negativ definită $\Leftrightarrow [\Delta_1 < 0$ şi $\Delta_2 > 0] \Leftrightarrow$

$[-9 < 0$ şi $(-9)\left(\lambda - \sqrt{6}\right)\left(\lambda + \sqrt{6}\right) > 0] \Leftrightarrow \lambda \in \left]-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right[$.

c) $h : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}$, $h(\mathbf{x}) = (4 - \lambda)x_1^2 + (4 - \lambda)x_2^2 - (2 + \lambda)x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 8x_2x_3$.

Rezolvare. Se scrie

$$h(\mathbf{x}) = \begin{array}{r} (4 - \lambda)x_1^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 \\ +(4 - \lambda)x_2^2 + 8x_2x_3 \\ -(2 + \lambda)x_3^2. \end{array} \quad \Rightarrow \mathbf{A} = (h)_C = \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 2 & -4 \\ 2 & 4 - \lambda & 4 \\ -4 & 4 & -(2 + \lambda) \end{pmatrix}.$$

Se calculează

$\Delta_0 = 1;$

$\Delta_1 = 4 - \lambda;$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 12 = (\lambda - 2)(\lambda - 6).$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 2 & -4 \\ 2 & 4 - \lambda & 4 \\ -4 & 4 & -(2 + \lambda) \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 36\lambda - 216 = -(\lambda + 6)(\lambda - 6)^2.$$

h este pozitiv definită $\Leftrightarrow [\Delta_1 > 0$ şi $\Delta_2 > 0$ şi $\Delta_3 > 0] \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 4 - \lambda > 0 \\ (\lambda - 2)(\lambda - 6) > 0 \\ -(\lambda + 6)(\lambda - 6)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda \in]-\infty, -6[.$$

h este negativ definită $\Leftrightarrow [\Delta_1 < 0$ şi $\Delta_2 > 0$ şi $\Delta_3 < 0] \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 4 - \lambda < 0 \\ (\lambda - 2)(\lambda - 6) > 0 \\ -(\lambda + 6)(\lambda - 6)^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda \in]6, +\infty[.$$