ANEXA 1
Analiză matematică, AIA

○Spaţii topologice, spaţii metrice, spaţii normate

Spaţii topologice**.**
Definiţia 1.0.1. Fie $X \neq \emptyset$ o mulţime şi $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$. Mulţimea $\mathcal{T}$ se numeşte *topologie în* X dacă
(T_1) $\emptyset \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$;
(T_2) reuniunea mulţimilor oricărui sistem de elemente din $\mathcal{T}$ este un element din $\mathcal{T}$.
(T_3) intersecţia mulţimilor oricărui sistem finit de elemente din $\mathcal{T}$ este un element din $\mathcal{T}$.
În acest caz, perechea ordonată $(X, \mathcal{T})$ se numeşte *spaţiu topologic*. Orice mulţime element din $\mathcal{T}$ se numeşte *mulţime deschisă* în X. Elementele unui spaţiu topologic se numesc *puncte*. Complementara în X a unui element din $\mathcal{T}$ se numeşte *mulţime închisă* în X. Se notează cu $\mathcal{F}$ mulţimea tuturor mulţimilor închise din X.
Definiţia 1.0.2. Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic, $x \in X$ un punct şi $V \subseteq X$ o submulţime. Mulţimea V se numeşte *o vecinătate în* X *a punctului* x dacă există $D \in \mathcal{T}$ a.î.
$x \in D \subset V.$
Se notează cu $\mathcal{V}(x)$ mulţimea tuturor vecinătăţilor în X a punctului x.
Propoziţia 1.0.1. Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic şi $x \in X$. Atunci
(V_1) $\forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in V$;
(V_2) $\forall V_1 \in \mathcal{V}(x)$ şi $\forall V_2 \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x)$;
(V_3) $\forall A \subseteq X$ şi $\forall V \in \mathcal{V}(x)$ a.î. $V \subseteq A \Rightarrow A \in \mathcal{V}(x)$;
(V_4) $\forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists U \in \mathcal{V}(x)$ a.î. $\forall y \in U$ să avem $V \in \mathcal{V}(y)$.
Teorema 1.0.1. (**de caracterizare a mulţimilor deschise cu vecinătăţi în spaţii topologice**)
Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic şi $D \subseteq X$ o submulţime. Mulţimea D este deschisă în X, $D \in \mathcal{T} \Leftrightarrow$
$\forall x \in A, A \in \mathcal{V}(x)$.
Definiţia 1.0.3. Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic, $A \subseteq X$ o submulţime şi $x \in X$ un punct. Punctul $x \in X$ se numeşte
a) *punct interior în* X *al mulţimii* A dacă
$\exists V \in \mathcal{V}(x)$ a.î. $V \subseteq A$;
Se notează cu $\mathrm{int}_X A$ mulţimea tuturor punctelor interioare în X ale mulţimii A şi se numeşte *interiorul în* X *al mulţimii* A;
b) *punct exterior în* X *al mulţimii* A dacă
$\exists V \in \mathcal{V}(x)$ a.î. $V \subseteq c_X A$;
Se notează cu $\mathrm{ext}_X A$ mulţimea tuturor punctelor exterioare în X ale mulţimii A şi se numeşte *exteriorul în* X *al mulţimii* A;
c) *punct frontieră în* X *al mulţimii* A dacă
$\forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow [V \cap A \neq \emptyset$ şi $V \cap c_X A \neq \emptyset]$;
Se notează cu $\mathrm{fr}_X A$ mulţimea tuturor punctelor frontieră în X ale mulţimii A şi se numeşte *frontiera în* X *a mulţimii* A;
d) *punct aderent în* X *al mulţimii* A dacă
$\forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset$;
Se notează cu $\mathrm{ad}_X A$ mulţimea tuturor punctelor aderente în X ale mulţimii A şi se numeşte *aderenţa în* X *a mulţimii* A;
e) *punct de acumulare în* X *al mulţimii* A dacă

$\forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow V \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$;
Se notează cu $\mathrm{ac}_X A$ (sau cu A') mulţimea tuturor punctelor de acumulare în X ale mulţimii A şi se numeşte *mulţimea derivată sau a punctelor de acumulare în X a mulţimii A*;
f) *punct izolat în X al mulţimii A* dacă
$\exists V \in \mathcal{V}(x)$ a.î. $V \cap A = \{a\}$;
Se notează cu $\mathrm{iz}_X A$ mulţimea tuturor punctelor izolate în X ale mulţimii A şi se numeşte *mulţimea punctelor izolate în X ale mulţimii A.*
Propoziţia 1.0.2. Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic şi $A \subseteq X$ o submulţime. Atunci
a) $\mathrm{int}_X A \subseteq A$;
b) $\mathrm{int}_X (c_X A) = \mathrm{ext}_X A \subseteq c_X A$;
c) $A' \subseteq \mathrm{ad}_X A$;
d) $\mathrm{iz}_X A \subseteq A$ şi $\mathrm{iz}_X A \subseteq \mathrm{ad}_X A$;
e) Sistemul $(\mathrm{int}_X A, \mathrm{fr}_X A, \mathrm{ext}_X A)$ este o partiţie a mulţimii X;
Definiţia 1.0.4. Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic, $A \subseteq X$ o submulţime. Se numeşte *închiderea în X a mulţimii A* mulţimea
$\overline{A}^X = \mathrm{int}_X A \cup \mathrm{fr}_X A$.
Propoziţia 1.0.3. Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic şi $A \subseteq X$ o submulţime. Atunci
a) $\overline{A}^X = \mathrm{ad}_X A$;
b) $\mathrm{fr}_X A = \overline{A}^X \cap \overline{c_X A}^X$;
c) $\overline{A}^X = A \cup A'$;
d) Sistemul $(A', \mathrm{iz}_X A)$ este o partiţie a mulţimii $\overline{A}^X$.
Teorema 1.0.2. (**de caracterizare a interiorului şi a închiderii unei mulţimi în spaţii topologice**) Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic şi $A \subseteq X$ o submulţime.
a) $\mathrm{int}_X A$ este reuniunea mulţimilor deschise incluse în A
$\mathrm{int}_X A = \cup \{D \in \mathcal{T}; D \subseteq A\} \in \mathcal{T}$;
b) $\overline{A}^X$ este intersecţia mulţimilor închise care includ A
$\overline{A}^X = \cap \{F \in \mathcal{F}; A \subseteq F\} \in \mathcal{F}$.
Teorema 1.0.3. (**de caracterizare a mulţimilor deschise şi a mulţimilor închise în spaţii topologice**) Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic şi $A \subseteq X$ o submulţime.
a) $A \in \mathcal{T}$(este mulţime <u>deschisă</u> în X) $\Leftrightarrow \mathrm{int}_X A = A$;
b) $A \in \mathcal{F}$(este mulţime <u>închisă</u> în X) $\Leftrightarrow \overline{A}^X = A$
$\Leftrightarrow \overline{A}^X \subseteq A$
$\Leftrightarrow A' \subseteq A$.

Spaţii metrice.

Definiţia 1.0.2. Fie $X \neq \emptyset$ o mulţime şi o funcţie $d : X \times X \to \mathbb{R}$. Funcţia d se numeşte *distanţă* (*metrică*) *în* X dacă
(M_1) $\forall (x, y, z) \in X^3 : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
(inegalitatea triunghiulară sau Minkovski);
(M_2) $\forall (x, y) \in X^2 : d(x, y) = d(y, x)$;
(M_3) $\forall (x, y) \in X^2 : [d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y]$.
În acest caz, perechea ordonată (X, d) se numeşte *spaţiu metric*.

Propoziţia 1.0.2. Fie (X, d) un spaţiu metric. Atunci:
(M_4) $\forall (x, y) \in X^2 : d(x, y) \geq 0$;
(M_5) $\forall (x, y, z) \in X^3 : |d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$.

Definiţia 1.0.3. Fie (X, d) un spaţiu metric, $a \in X$ şi $r \in \mathbb{R}_+^*$.
a) Se numeşte *sferă deschisă* în X de centru a şi rază r mulţimea
$B(a, r) = \{x \in X; d(a, x) < r\}$.
b) Se numeşte *sferă închisă* în X de centru a şi rază r mulţimea
$B'(a, r) = \{x \in X; d(a, x) \leq r\}$.
c) Se numeşte *sferă* în X de centru a şi rază r mulţimea
$S(a, r) = \{x \in X; d(a, x) = r\}$.

Observaţia 1.0.1.
$a \in B(a, r) \subset B'(a, r)$
$B'(a, r) = B(a, r) \cup S(a, r)$ cu $B(a, r) \cap S(a, r) = \emptyset$.

Exemplul 1.0.1$^{\bigcirc}$. Fie $X \neq \emptyset$ o mulţime. Să se arate că X poate fi structurată ca spaţiu metric in raport cu *metrica discretă*

$$d : X \times X \to \mathbb{R},\ d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = y \\ 1, & \text{dacă } x \neq y \end{cases}.$$

Să se precizeze sferele din X centrate în $a \in X$ şi de rază $r > 0$ relativ la d.

Definiţia 1.0.4. Fie (X, d) un spaţiu metric. Mulţimea $D \subseteq X$ se numeşte mulţime *deschisă în spaţiul metric* (X, d) dacă
$D = \emptyset$ sau
$\forall x \in D, \exists r_x > 0$ a.î. $B(x, r_x) \subseteq D$.
Se notează cu $\mathcal{T}_d$ mulţimea tuturor mulţimilor deschise din (X, d).

Teorema 1.0.2. Fie (X, d) un spaţiu metric şi $\mathcal{T}_d$ mulţimea tuturor mulţimilor deschise din (X, d). Atunci $\mathcal{T}_d$ este o topologie în X, numită *topologia indusă de metrică*, şi $(X, \mathcal{T}_d)$ este spaţiu topologic.

Observaţia 1.0.2. Fie (X, d) un spaţiu metric. Atunci orice sferă deschisă $B(a, r)$ este o mulţime deschisă în (X, d), este în $\mathcal{T}_d$.

Definiţia 1.0.5. Fie (X, d) un spaţiu metric. Mulţimea $A \subseteq X$ se numeşte mulţime *mărginită în spaţiul metric* (X, d) dacă
$\exists a \in X$ şi $r > 0$ a.î. $A \subseteq B(a, r)$.

Teorema 1.0.3. (**de caracterizare a vecinătăţilor în spaţii metrice**) Fie (X, d) un spaţiu metric, $x \in X$ un punct şi $V \subseteq X$ o submulţime. Mulţimea V este o vecinătate în X a punctului x, $V \in \mathcal{V}(x) \Leftrightarrow$
$\exists r_x > 0$ a.î. $B(x, r_x) \subset V$.
În particular, rezultă că ă sferă deschisă $B(a, r)$ este o vecinătate în X a punctului $a \in X$.

Exemplul 1.0.2$^{\bigcirc}$. **Spaţiul metric al funcţiilor mărginite**
Fie $X \neq \emptyset$ o mulţime şi (Y, d) un spaţiu metric. Fie
$\mathcal{M}(A, Y) = \{f : A \subset X \to Y; f \text{ mărginită pe } A\}$.

Să se arate că funcţia

$$d_\infty : \mathcal{M}(A,Y) \times \mathcal{M}(A,Y) \to \mathbb{R},\ d_\infty(f,g) = \sup_{x\in A} d(f(x), g(x))$$

este o metrică pe $\mathcal{M}(A,Y)$, numită *metrica uniformă* sau *metrica supremum.* Perechea ordonată $(\mathcal{M}(A,Y), d_\infty)$ se numeşte *spaţiul metric al funcţiilor mărginite pe A cu valori în Y.*

Spaţii normate.

Definiţia 1.0.6. Fie $X \neq \emptyset$ o mulţime şi o funcţie $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$. Funcţia $\|\cdot\|$ se numeşte *normă în* X dacă

(N_1) $\forall (x,y) \in X^2 : \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

(inegalitatea triunghiulară sau Minkovski);

(N_2) $\forall (\alpha, x) \in \mathbb{R} \times X : \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;

(N_3) $\forall x \in X : [\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0]$.

În acest caz, perechea ordonată $(X, \|\cdot\|)$ se numeşte *spaţiu normat.*

Propoziţia 1.0.3. Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu normat. Atunci:

(N_4) $\forall x \in X : \|x\| \geq 0$;

(N_5) $\forall (x,y) \in X^2 : |\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$.

Teorema 1.0.4. Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu normat. Atunci funcţia $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definită prin

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

este o metrică pe X, numită *metrica indusă de normă* şi (X,d) este un spaţiu metric. În consecinţă, dacă $\mathcal{T}_d$ este mulţimea tuturor mulţimilor deschise din (X,d), atunci $\mathcal{T}_d$ este o topologie în X şi $(X, \mathcal{T}_d)$ este spaţiu topologic.

Observaţia 1.0.3. Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu normat. Atunci, pentru $a \in X$ şi $r \in \mathbb{R}_+^*$, sferele sunt

a) *sfera deschisă* în X de centru a şi rază r

$$B(a,r) = \{x \in X; \|x-a\| < r\};$$

b) *sfera închisă* în X de centru a şi rază r

$$B'(a,r) = \{x \in X; \|x-a\| \leq r\};$$

c) *sfera* în X de centru a şi rază r

$$S(a,r) = \{x \in X; \|x-a\| = r\}.$$