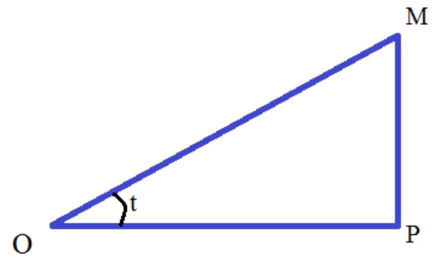
ANEXA. 2
Analiză matematică, AIA

2.TRIGONOMETRIE

2.1. Funcţiile trigonometrice $\cos, \sin$

A se vedea *Trigonometry*, de profesor Eugene Khutoryansky:
https://www.youtube.com/watch?v=ovLbCvq7FNA&t=16s

Preliminarii 1.



Fie ΔMOP dreptunghic şi t măsura unghiului POM în grade/ radiani. Se reaminteşte:
π radiani ... 180^0; 1 rad ...$\frac{180^0}{\pi} \simeq 57.3^0$; 1^0 ... $\frac{\pi}{180} \simeq 0.0175$ rad.

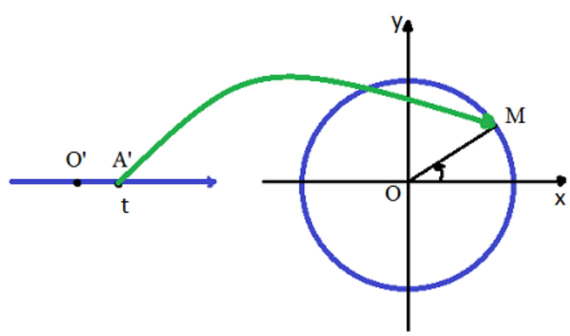
$$\begin{cases} \sin t = \dfrac{|PM|}{|OM|}; & \operatorname{tg} t = \dfrac{|PM|}{|OP|}; \\ \cos t = \dfrac{|OP|}{|OM|}; & \operatorname{ctg} t = \dfrac{|OP|}{|PM|}. \end{cases}$$

măs. în grade/ radiani	sin	cos	tg	ctg
$0°/0$	0	1	0	$\nexists$ în $\mathbb{R}$
$30°/\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$45°/\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60°/\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$90°/\frac{\pi}{2}$	1	0	$\nexists$ în $\mathbb{R}$	0

Preliminarii 2.

Se presupun cunoscute de la ALGA noţiunile din temele "Coordonate în plan" şi "Distanţa dintre două puncte în plan".

Fie dreapta reală $\mathbb{R}$ şi cercul trigonometric $\mathcal{C}((0,0),1)$.



Definiţie Funcţia

$f : \mathbb{R} \to \mathcal{C}, f(t) = M(x_M, y_M)$

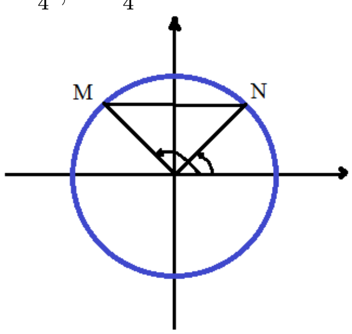
prin care unui număr real t de pe dreapta reală îi asociem puncul $M(x_M, y_M)$ construit astfel încât unghiul orientat în sens direct $\widehat{xOM}$ (sens trigonometric, al acelor de ceas) să aibă măsura în radiani t se numeşte *funcţia acoperire a cercului unitate*.

Proprietăţi
a) Funcţia f este periodică, de perioadă principală 2π,
$f(t+2\pi) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}$.
b) Funcţia f este surjectivă,
$\forall M \in \mathcal{C}((0,0),1), \exists t \in \mathbb{R}$ a.î. $f(t) = M$.

Definiţie. a) Se numeşte funcţia *cosinus* funcţia
$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \cos t = x_M$.
b) Se numeşte funcţia *sinus* funcţia
$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \sin t = y_M$.

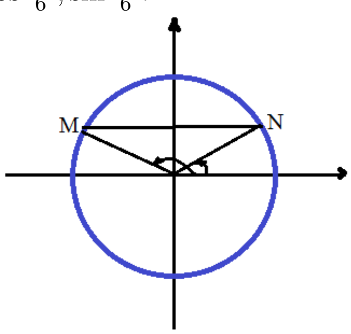
Teoremă. a) Funcţiile cos şi sin sunt **mărginite**,
$-1 \leq \cos t \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}; -1 \leq \sin t \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}$.
b) $\sin^2 t + \cos^2 t = 1, \forall t \in \mathbb{R}$.
c) Funcţiile cos şi sin sunt **periodice**, de perioadă principală 2π,
$\cos(t+2\pi) = \cos t, \forall t \in \mathbb{R}; \sin(t+2\pi) = \sin t, \forall t \in \mathbb{R}$.
$\cos(t+2k\pi) = \cos t, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall t \in \mathbb{R}; \sin(t+2k\pi) = \sin t, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall t \in \mathbb{R}$.
d) Funcţia cos este **pară** pe $\mathbb{R}$ sau pe orice interval simetric centrat în 0 :
$\cos(-t) = \cos t, \forall t \in \mathbb{R}$.
e) Funcţia sin este **impară** pe $\mathbb{R}$ sau pe orice interval simetric centrat în 0 :
$\sin(-t) = -\sin t, \forall t \in \mathbb{R}$.

Exemplul 1 (*reducerea la primul cadran*). Să se determine:
a) $\cos\frac{3\pi}{4}, \sin\frac{3\pi}{4}$.



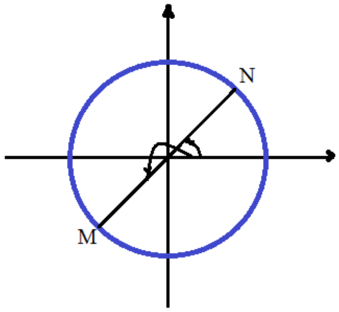
$\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$;
Se construieşte unghiul orientat $\widehat{xOM}$.
Se observă că M este în cadr. II.
Se construieşte N, simetricul lui M faţă de Oy
$\cos\frac{3\pi}{4} = x_M = -x_N = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
$\sin\frac{3\pi}{4} = y_M = y_N = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\cos\frac{5\pi}{6}, \sin\frac{5\pi}{6}$.



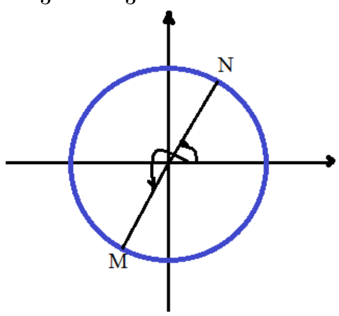
$\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$;
Se construieşte unghiul orientat $\widehat{xOM}$.
Se observă că M este în cadr. II.
Se construieşte N, simetricul lui M faţă de Oy
$\cos\frac{5\pi}{6} = x_M = -x_N = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
$\sin\frac{5\pi}{6} = y_M = y_N = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

c) $\cos\frac{5\pi}{4}, \sin\frac{5\pi}{4}$.



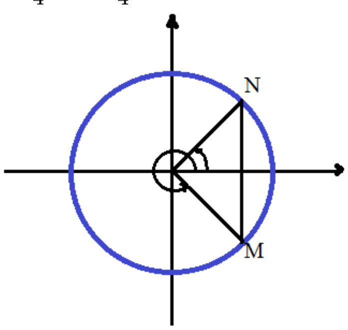
$\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$;
Se construieşte unghiul orientat $\widehat{xOM}$.
Se observă că M este în cadr. III.
Se construieşte N, simetricul lui M faţă de O
$\cos\frac{5\pi}{4} = x_M = -x_N = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
$\sin\frac{5\pi}{4} = y_M = -y_N = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

d) $\cos\frac{4\pi}{3}, \sin\frac{4\pi}{3}$.



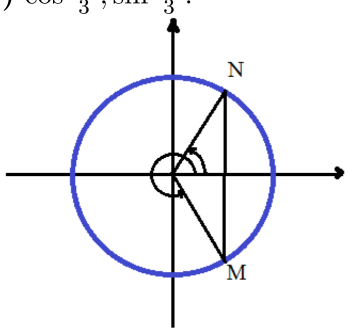
$\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$;
Se construieşte unghiul orientat $\widehat{xOM}$.
Se observă că M este în cadr. III.
Se construieşte N, simetricul lui M faţă de O
$\cos\frac{4\pi}{3} = x_M = -x_N = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.
$\sin\frac{4\pi}{3} = y_M = -y_N = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

e) $\cos\frac{7\pi}{4}, \sin\frac{7\pi}{4}$.



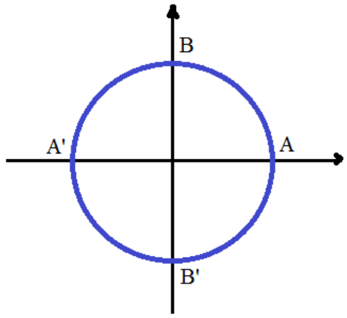
$\frac{7\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4}$;
Se construieşte unghiul orientat $\widehat{xOM}$.
Se observă că M este în cadr. IV.
Se construieşte N, simetricul lui M faţă de Ox
$\cos\frac{7\pi}{4} = x_M = x_N = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
$\sin\frac{7\pi}{4} = y_M = -y_N = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

f) $\cos\frac{5\pi}{3}, \sin\frac{5\pi}{3}$.



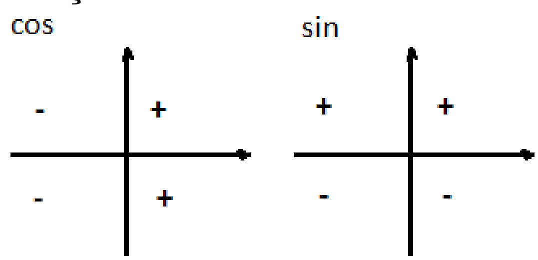
$\frac{5\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$;
Se construieşte unghiul orientat $\widehat{xOM}$.
Se observă că M este în cadr. IV.
Se construieşte N, simetricul lui M faţă de Ox
$\cos\frac{5\pi}{3} = x_M = x_N = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.
$\sin\frac{5\pi}{3} = y_M = -y_N = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

g) $\cos 0, \sin 0, \cos\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2}, \cos\pi, \sin\pi, \cos\frac{3\pi}{2}, \sin\frac{3\pi}{2}, \cos 2\pi, \sin 2\pi.$



$\cos 0 = x_A = 1, \sin 0 = y_A = 0.$
$\cos\frac{\pi}{2} = x_B = 0, \sin\frac{\pi}{2} = y_B = 1.$
$\cos\pi = x_{A'} = -1, \sin\pi = y_{A'} = 0.$
$\cos\frac{3\pi}{2} = x_{B'} = 0, \sin\frac{3\pi}{2} = y_{B'} = -1.$
$\cos 2\pi = x_A = 1, \sin 2\pi = y_A = 0.$

Observaţie.



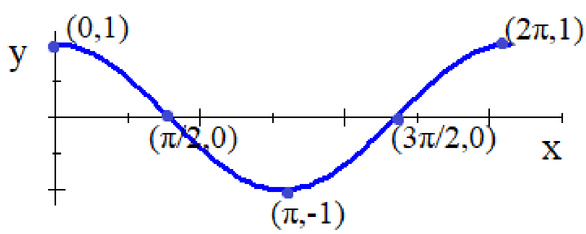
Observaţie.

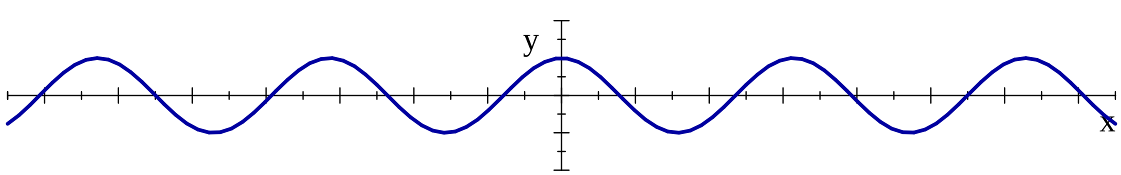
a) $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \begin{cases} \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} \\ \sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} \end{cases}$;**b)** $t \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\Rightarrow \begin{cases} \cos t = -\sqrt{1-\sin^2 t} \\ \sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} \end{cases}$;

c) $t \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[\Rightarrow \begin{cases} \cos t = -\sqrt{1-\sin^2 t} \\ \sin t = -\sqrt{1-\cos^2 t} \end{cases}$;**d)** $t \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[\Rightarrow \begin{cases} \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} \\ \sin t = -\sqrt{1-\cos^2 t} \end{cases}$.

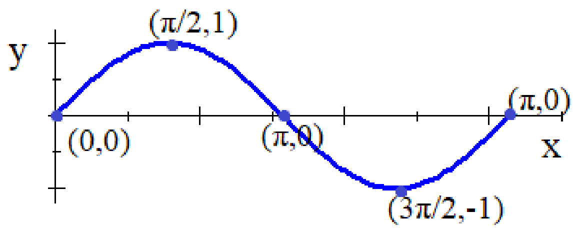
Grafice (renotând sistemul cartezian de coordonate cu xOy, pentru Anexa 4).

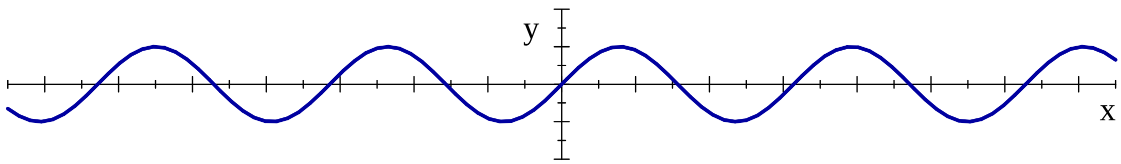
a) $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$





b) $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$





Observaţie (formule pentru *sume şi diferenţe* de unghiuri)**.** $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

a) $\boxed{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b;}$ **b)** $\boxed{\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b;}$

c) $\boxed{\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b;}$ **d)** $\boxed{\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.}$

Exemplul 2.

$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$

$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$

Exemplul 3. $\forall t \in \mathbb{R}$:

a) $\cos(\pi - t) = \cos\pi\cos t + \sin\pi\sin t = -\cos t.$

$\sin(\pi - t) = \sin\pi\cos t - \cos\pi\sin t = \sin t.$

b) $\cos(\pi + t) = \cos\pi\cos t - \sin\pi\sin t = -\cos t.$

$\sin(\pi + t) = \sin\pi\cos t + \cos\pi\sin t = -\sin t.$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t.$ **d)** $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t.$

Observaţie (*reducere la primul cadran*)**.** $\forall t \in \mathbb{R}$:

II. $\cos t = \cos(\pi - t)$, $\sin t = \sin(\pi - t)$	I. $\cos t =$ din tabel, $\sin t =$ din tabel
III. $\cos t = -\cos(\pi + t)$, $\sin t = -\sin(\pi + t)$	IV. $\cos t = \cos(2\pi - t)$, $\sin t = -\sin(2\pi - t)$

Exemplul 4 (*unghi dublu, unghi triplu*). $\forall t \in \mathbb{R}$:

a) $\cos(2t) = \cos t\cos t - \sin t\sin t = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t \Rightarrow$

$\boxed{\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t.}$

$\sin(2t) = \sin t\cos t + \cos t\sin t = 2\sin t\cos t \Rightarrow$

$\boxed{\sin(2t) = 2\sin t\cos t}$

În plus,

$$\boxed{\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2},\ \sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}.}$$

b) $\cos(3t) = \cos 2t \cos t - \sin 2t \sin t = 4\cos^3 t - 3\cos t \Rightarrow$

$\boxed{\cos(3t) = 4\cos^3 t - 3\cos t.}$

$\sin(3t) = \sin 2t \cos t + \cos 2t \sin t = 3\sin t - 4\sin^3 t \Rightarrow$

$\boxed{\sin(3t) = 3\sin t - 4\sin^3 t.}$

În plus,

$$\boxed{\cos^3 t = \frac{\cos 3t + 3\cos t}{4},\ \sin^3 t = \frac{3\sin t - \sin 3t}{4}.}$$

Observaţie (*transformarea sumelor în produse*)**.** $\forall p, q \in \mathbb{R}:$

a) $\boxed{\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2};}$ **b)** $\boxed{\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2};}$

c) $\boxed{\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2};}$ **d)** $\boxed{\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}.}$

Observaţie (*transformarea produselor în sume*)**.** $\forall a, b \in \mathbb{R}:$

a) $\boxed{\sin a \cos b = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2};}$ **b)** $\boxed{\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2};}$

c) $\boxed{\sin a \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}.}$

Observaţie. Se numeşte *oscilaţie armonică* orice mişcare descrisă de un parametru de stare de forma "legii sinusului"

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$, unde A, ω, φ sunt constante reale date.

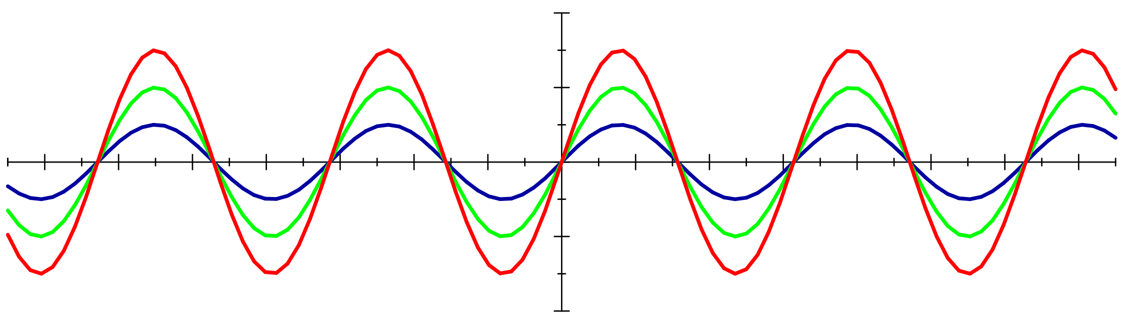
Se poate presupune că $\omega > 0$, deoarece

$\sin(\omega t + \varphi) = -\sin(-\omega t - \varphi)$.

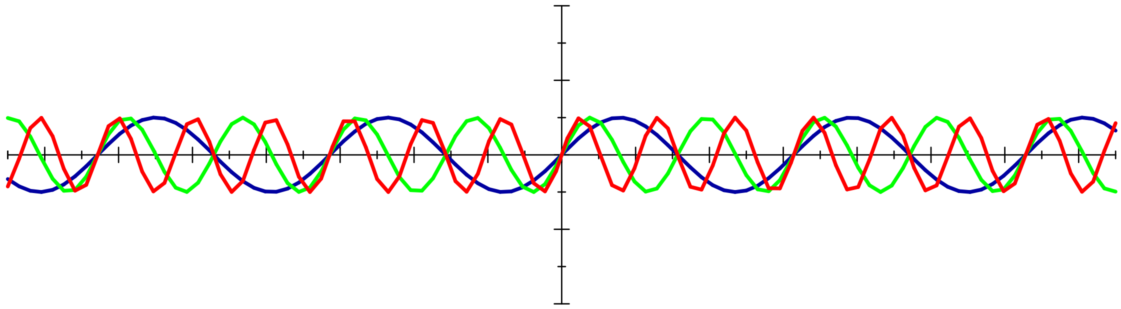
Numărul $A = \max\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$ se numeşte *amplitudinea oscilaţiei*, iar numărul $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ se numeşte *perioada oscilaţiei* (în *s*). Numărul $\omega = \frac{2\pi}{T}$ se numeşte *frecvenţa ciclică, pulsaţia oscilaţiei* (în *rad/s*), iar numărul φ *frecvenţa iniţială a oscilaţiei* (în *rad*).

Amplitudinile oscilaţiilor armonice au importanţa dată de faptul că energia oscilaţiei depinde de pătratul amplitudinii, iar fazele pentru a observa defazajul dintre diferite oscilaţii.

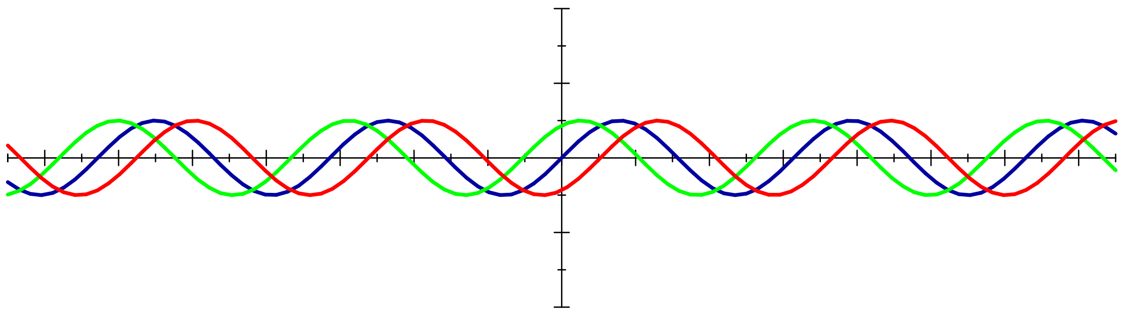
De exemplu, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t) = 1\sin(1t + 0),\ f(t) = 2\sin(1t + 0),\ f(t) = 3\sin(1t + 0)$.



De exemplu, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = 1\sin(1t + 0)$, $f(t) = 1\sin(2t + 0)$, $f(t) = 1\sin(3t + 0)$.



De exemplu, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = 1\sin(1t + 0)$, $f(t) = 1\sin\left(1t + \frac{\pi}{3}\right)$, $f(t) = 1\sin\left(1t - \frac{\pi}{3}\right)$.



A se vedea *Fourier Transform, Fourier Series, and frequency spectrum*, de profesor Eugene Khutoryansky: https://www.youtube.com/watch?v=r18Gi8lSkfM

La EDCO se va studia *ecuaţia diferenţială a oscilaţiilor armonice de pulsaţie* ω,

$(*)\ x''(t) + \omega^2 x(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R},$

şi se va arăta că are toate soluţiile de forma

$x(t) = c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t), \forall t \in \mathbb{R}, \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

Se pot găsi constantele $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ şi φ din $\operatorname{tg}\varphi = \frac{c_1}{c_2}$ astfel încât

$c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t) = A\sin(\omega t + \varphi), \forall t \in \mathbb{R}.$

Ecuaţia modelează *oscilaţiile unui resort* ($\omega^2 = \frac{k}{m}$), *oscilaţiile mici ale unui pendul matematic* ($\omega^2 = \frac{g}{l}$), *oscilaţiile armonice ale unui circuit electric* ($\omega^2 = \frac{1}{LC}$).

2.2. Funcţiile trigonometrice ctg, tg

Definiţie. a) Se numeşte funcţia *cotangentă* funcţia

$\operatorname{ctg} : D_1 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \operatorname{ctg} t = \dfrac{\cos t}{\sin t}$, unde $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

b) Se numeşte funcţia *tangentă* funcţia

$\operatorname{tg} : D_2 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \operatorname{tg} t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$, unde $D_2 = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Teoremă.

a) Funcţiile ctg şi tg sunt **periodice**, de perioadă principală π,

$\operatorname{ctg}(t + \pi) = \operatorname{ctg} t, \forall t \in D_1$; $\operatorname{tg}(t + \pi) = \operatorname{tg} t, \forall t \in D_2$.

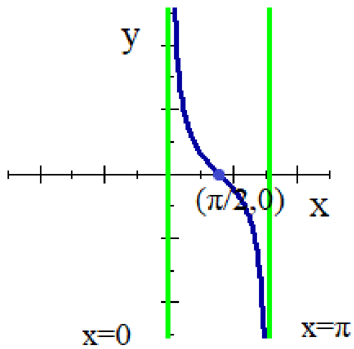
b) Funcţia ctg este **impară**: $\operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t, \forall t \in D_1$.
c) Funcţia tg este **impară**: $\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t, \forall t \in D_2$.
Observaţie. Pe domeniile corespunzătoare au loc:

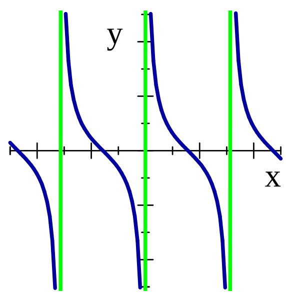
a) $\boxed{\operatorname{ctg} t = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right);}$ **b)** $\boxed{\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b};}$ **c)** $\boxed{\operatorname{tg}(a-b) = \dfrac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b};}$

d) $\boxed{\operatorname{tg}(2t) = \dfrac{2\operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg}^2 t};}$ **e)** $\boxed{\operatorname{tg}\frac{t}{2} = \dfrac{\sin t}{1 + \cos t};}$ **f)** $\boxed{\cos t = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}};}$ **g)** $\boxed{\sin t = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}};}$

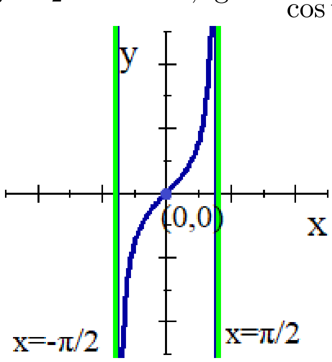
h) $\boxed{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \dfrac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cos b}.}$

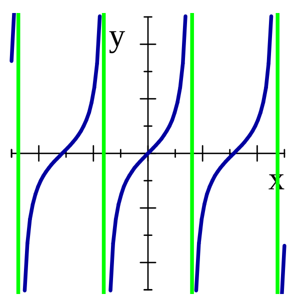
Grafice (renotând sistemul cartezian de coordonate cu xOy, pentru Anexa 4).
a) $\operatorname{ctg} : D_1 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \operatorname{ctg} t = \dfrac{\cos t}{\sin t}$,unde $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.





b) $\operatorname{tg} : D_2 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \operatorname{tg} t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$,unde $D_2 = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

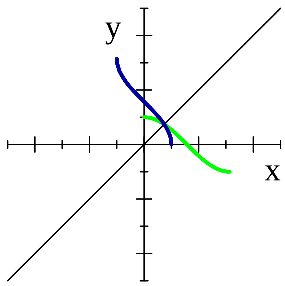




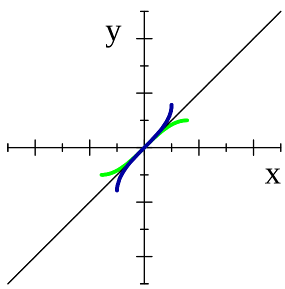
2.3. Funcţiile trigonometrice inverse $\arccos, \arcsin, \text{arcctg}, \text{arctg}$

Definiţie şi grafice (renotând sistemul cartezian de coordonate cu xOy, pentru Anexa 4).

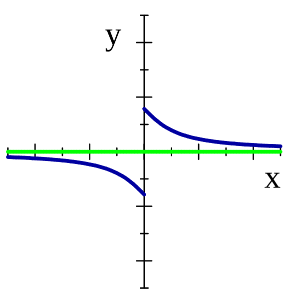
a) $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ bijectivă $\rightsquigarrow \arccos : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \arccos x = y$ a.î. $\cos y = x$.
(graficele arccos şi restricţiei cos sunt simetrice faţă de prima bisectoare)



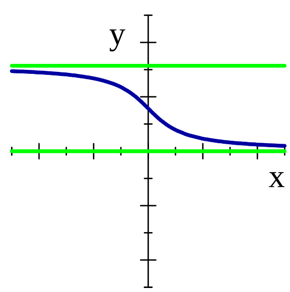
b) $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ bijectivă $\rightsquigarrow \arcsin : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \arcsin x = y$ a.î. $\sin y = x$.
(graficele arcsin şi restricţiei sin sunt simetrice faţă de prima bisectoare)



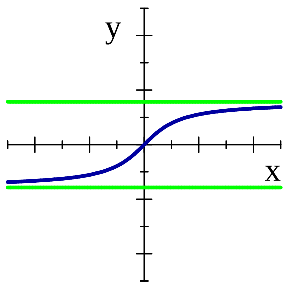
c) $\text{ctg} :]0, \pi[\to \mathbb{R}$ bijectivă $\rightsquigarrow \text{arcctg} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{arcctg}\, x = y$ a.î. $\text{ctg}\, y = x$.
(graficele arcctg şi restricţiei ctg sunt simetrice faţă de prima bisectoare)



sau



d) $\text{tg} : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ bijectivă $\rightsquigarrow \text{arctg} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{arctg}\, x = y$ a.î. $\text{tg}\, y = x$.
(graficele arctg şi restricţiei tg sunt simetrice faţă de prima bisectoare)



Exemplul 5.
a) $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$; **b)** $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$; **c)** $\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$; **d)** $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.
Exemplul 6. Să se determine domeniul maximal de definiţie pentru funcţiile:
a) $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \arccos 3x$.
Rezolvare. $3x \in [-1, 1] \Leftrightarrow -1 \leq 3x \leq 1 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right].D = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right].$
b) $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \arcsin(1 - 2x)$.
Rezolvare. $1 - 2x \in [-1, 1] \Leftrightarrow -1 \leq 1 - 2x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [0, 1].D = [0, 1].$