ANEXA 3
Analiză matematică, AIA

○Mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$
Definiţii. Exemple. Structura algebrică a mulţimii $\mathbb{C}$

Definiţie. Fie mulţimea

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y)\,; x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$,

cu operaţiile interne

$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\,,$

$\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)\,.$

Fiecare element al mulţimii $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pe care sunt definite cele două operaţii precedente se numeşte *număr complex*. Se notează cu $\mathbb{C}$ *mulţimea numerelor complexe*.

Teoremă. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ este corp comutativ cu elementul zero $(0, 0)$, iar elementul unitate $(1, 0)$.

Observaţie. **a)** $(\mathbb{C}, +, \cdot, \mathbb{R})$ este spaţiu liniar real, unde $+$ este adunarea numerelor complexe şi $\cdot$ este înmulţirea numerelor complexe cu scalari reali.

b) $(\mathbb{C}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ este spaţiu liniar euclidian, unde produsul scalar euclidian este

$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2.$

c) $(\mathbb{C}, \|\cdot\|)$ este spaţiu liniar normat, unde norma euclidiană este

$\|\cdot\| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$

Norma este indusă de produsul scalar anterior, adică

$\|(x, y)\| = \sqrt{\langle (x, y), (x, y) \rangle}, \forall\, (x, y) \in \mathbb{C}.$

d) Pe $\mathbb{C}$ nu se poate introduce o relaţie de ordine totală.

Observaţie. (**Forma algebrică sau carteziană a numerelor complexe):** Fie submulţimea din $\mathbb{C}$ dată prin

$\mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, y)\,; x \in \mathbb{R}, y = 0\} \subset \mathbb{C}.$

Aplicaţia

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \{0\}\,, \varphi(x) = (x, 0)$

este un izomorfism de corpuri. Se poate considera $\mathbb{R}$ *ca şi submulţime a corpului* $\mathbb{C}$ şi se poate **identifica** $x \in \mathbb{R}$ cu $(x, 0) \in \mathbb{C}$. Atunci

$(x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0)\,.$

Se notează $\boxed{(0, 1) = \mathrm{j}}$ (cu $\mathrm{j}^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$, adică $\boxed{\mathrm{j}^2 = -1}$)

Orice număr complex $z = (x, y)$ *se poate reprezenta în mod unic prin*

$\boxed{z = x + \mathrm{j}\, y, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R},}$ *unde* $\mathrm{j} = (0, 1) \in \mathbb{C}$ *se numeşte unitate imaginară*. $(1, 0)$ se va numi *unitate reală*.

Numerele de forma $\mathrm{j} \cdot y, y \in \mathbb{R}$ se numesc *imaginare*.

În multe aplicaţii **se foloseşte** i **(de la imaginar) în loc de** j.

A se urmări profesor Eugene Khutoryansky, "Trigonometry" şi "Imaginary Numbers and functions of complex variables"

https://www.youtube.com/watch?v=ovLbCvq7FNA

https://www.youtube.com/watch?v=bIY6ahHVgqA

Definiţie. Fie $z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C}$.

a) Se numeşte *partea reală* a lui z numărul real $\mathrm{Re}\,(z) = x$;

b) Se numeşte *partea imaginară* a lui z numărul complex $\mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{j}\, y$, unde y este număr real numit şi coeficientul părţii imaginare;

c) Se numeşte *conjugatul lui* z numărul complex $\overline{z} = x - \mathrm{j}\, y$;

d) Se numeşte *modulul lui* z numărul real pozitiv $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Observaţie. Operaţiile cu numere complexe sub formă algebrică devin

$$z_1 + z_2 = (x_1 + \mathrm{j}\, y_1) + (x_2 + \mathrm{j}\, y_2) = x_1 + x_1 + \mathrm{j}\,(y_1 + y_2)$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + \mathrm{j}\, y_1) \cdot (x_2 + \mathrm{j}\, y_2) = x_1x_2 + \mathrm{j}\, x_1y_2 + \mathrm{j}\, y_1x_2 + \mathrm{j}^2\, y_1y_2 =$$
$$= x_1x_2 - y_1y_2 + \mathrm{j}\,(x_1x_2 + x_2y_1)\,.$$

Propoziţie. **a)** $\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ şi $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2\,\mathrm{j}}(z - \overline{z})\,;$

b) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im} z = 0 \Leftrightarrow z = \overline{z}$; **c)** $\forall z \in \mathbb{C}, \overline{(\overline{z})} = z$.

d) $\forall z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C}, z + \overline{z} = 2x \in \mathbb{R}$ şi $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$;

e) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ şi $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Propoziţie. **a)** $\forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq 0$ şi $[|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0]$.

b) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ şi $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

În general, $\forall z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}, |z_1 \cdot ... \cdot z_n| = |z_1| \cdot ... \cdot |z_n|$ şi $|z_1 + ... + z_n| \leq |z_1| + ... + |z_n|$.

c) $\forall z \in \mathbb{C}, z \cdot \overline{z} = |z|^2$;**d)** $\forall z \in \mathbb{C}, |z| = |-z| = |\overline{z}|\,;$

e) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$

f) $\forall z \in \mathbb{C}, |\operatorname{Re} z| \leq |z|\,, \ |\operatorname{Im} z| \leq |z|\,, |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|\,.$

Propoziţie.(**puterile numărului complex** j) :

$$\mathrm{j} = (0, 1)\,; \mathrm{j}^2 = (-1, 0) \simeq -1; \mathrm{j}^3 = -\,\mathrm{j}; \mathrm{j}^4 = 1;...$$

Prin inducţie matematică se arată că, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{j}^n = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n = 4k, k \in \mathbb{N}^* \\ \mathrm{j}, & \text{dacă } n = 4k+1, k \in \mathbb{N} \\ -1 & \text{dacă } n = 4k+2, k \in \mathbb{N} \\ -\,\mathrm{j} & \text{dacă } n = 4k+3, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Exemplul 1. Să se determine conjugatele următoarelor numere complexe:

a) $z = 1 + \dfrac{1}{\pi}\,\mathrm{j}; \overline{z} = 1 - \dfrac{1}{\pi}\,\mathrm{j}$.**b)** $z = 3 - \sqrt{2}\,\mathrm{j}; \overline{z} = 3 + \sqrt{2}\,\mathrm{j}$.

c) $z = \dfrac{7}{8}\,\mathrm{j} - 5 = -5 + \dfrac{7}{8}\,\mathrm{j}; \overline{z} = -5 - \dfrac{7}{8}\,\mathrm{j}$.**d)** $z = 2000 = 2000 + 0\,\mathrm{j}; \overline{z} = 2000 - 0\,\mathrm{j} = 2000$.

e) $z = 14\,\mathrm{j} = 0 + 14\,\mathrm{j}; \overline{z} = 0 - 14\,\mathrm{j}$.**f)** $z = 0 = 0 + 0\,\mathrm{j}; \overline{z} = 0 - 0\,\mathrm{j} = 0$.

Exemplul 2. Să se calculeze:

a) $(2 + 3\,\mathrm{j}) + (2 - \mathrm{j})\,(3 + 2\,\mathrm{j}) = 2 + 3\,\mathrm{j} + 6 + 4\,\mathrm{j} - 3\,\mathrm{j} - 2\,\mathrm{j}^2 = 10 + 4\,\mathrm{j}$;

b) $\left(\sqrt{2} + 3\,\mathrm{j}\right)\left(3 - \sqrt{2}\,\mathrm{j}\right) = 3\sqrt{2} - 2\,\mathrm{j} + 9\,\mathrm{j} - 3\sqrt{2}\,\mathrm{j}^2 = 6\sqrt{2} + 7\,\mathrm{j}$;

c) $\dfrac{^{1+2\,\mathrm{j})}4}{1 - 2\,\mathrm{j}} = \dfrac{4\,(1 + 2\,\mathrm{j})}{(1 - 2\,\mathrm{j})\,(1 + 2\,\mathrm{j})} = \dfrac{4 + 8\,\mathrm{j}}{1 - 4\,\mathrm{j}^2} = \dfrac{4 + 8\,\mathrm{j}}{5} = \dfrac{4}{5} + \dfrac{8}{5}\,\mathrm{j}$.

d) $\dfrac{^{1+\mathrm{j}\sqrt{3})}1 + \mathrm{j}\sqrt{3}}{1 - \mathrm{j}\sqrt{3}} = \dfrac{\left(1 + \mathrm{j}\sqrt{3}\right)^2}{\left(1 - \mathrm{j}\sqrt{3}\right)\left(1 + \mathrm{j}\sqrt{3}\right)} = \dfrac{1 + 3\,\mathrm{j}^2 + 2\,\mathrm{j}\sqrt{3}}{1 - 3\,\mathrm{j}^2} =$

$= \dfrac{-2 + 2\,\mathrm{j}\sqrt{3}}{4} = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{j}$;

Exemplul 3. Să se calculeze:

a) $E_1 = \mathrm{j}^6 + \mathrm{j}^{16} + \mathrm{j}^{26} + \mathrm{j}^{36} + \mathrm{j}^{46}$

Rezolvare: <u>modul 1.</u> $E_1 = \left(\mathrm{j}^2\right)^3 + \left(\mathrm{j}^2\right)^8 + \left(\mathrm{j}^2\right)^{13} + \left(\mathrm{j}^2\right)^{18} + \left(\mathrm{j}^2\right)^{23} =$

$= (-1)^3 + (-1)^8 + (-1)^{13} + (-1)^{18} + (-1)^{23} = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 = -1.$

<u>modul 2.</u> $E_1 = \mathrm{j}^{4\cdot 1+2} + \mathrm{j}^{4\cdot 4+0} + \mathrm{j}^{4\cdot 6+2} + \mathrm{j}^{4\cdot 9+0} + \mathrm{j}^{4\cdot 11+2} =$

$= \left(\mathrm{j}^4\right)^1 \cdot \mathrm{j}^2 + \left(\mathrm{j}^4\right)^4 + \left(\mathrm{j}^4\right)^6 \cdot \mathrm{j}^2 + \left(\mathrm{j}^4\right)^9 + \left(\mathrm{j}^4\right)^{11} \cdot \mathrm{j}^2 = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 = -1.$

b) $E_2 = \mathrm{j}^1 + \mathrm{j}^2 + ... + \mathrm{j}^n, n \in \mathbb{N}, n \geq 4.$

Rezolvare: $E_2 = \mathrm{j}^1 + \mathrm{j}^2 + ... + \mathrm{j}^n = \mathrm{j} \cdot \dfrac{\mathrm{j}^n - 1}{\mathrm{j} - 1}$.

<u>cazul 1.</u> $n = 4k, k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \mathrm{j}^n = \left(\mathrm{j}^4\right)^k = 1 \Rightarrow E_2 = \mathrm{j} \cdot \dfrac{1-1}{\mathrm{j}-1} = 0.$

<u>cazul 2.</u> $n = 4k+1, k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \mathrm{j}^n = \left(\mathrm{j}^4\right)^k \cdot \mathrm{j} = \mathrm{j} \Rightarrow E_2 = \mathrm{j} \cdot \dfrac{\mathrm{j}-1}{\mathrm{j}-1} = \mathrm{j}\,.$

<u>cazul 3.</u> $n = 4k+2, k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \mathrm{j}^n = \left(\mathrm{j}^4\right)^k \cdot \mathrm{j}^2 = -1 \Rightarrow E_2 = \mathrm{j} \cdot \dfrac{-1-1}{\mathrm{j}-1} = \mathrm{j} \cdot \dfrac{{}^{1+\mathrm{j})}2}{1-\mathrm{j}} = -1 + \mathrm{j}\,.$

<u>cazul 4.</u> $n = 4k+3, k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \mathrm{j}^n = \left(\mathrm{j}^4\right)^k \cdot \mathrm{j}^3 = -\mathrm{j} \Rightarrow E_2 = \mathrm{j} \cdot \dfrac{-\mathrm{j}-1}{\mathrm{j}-1} = \mathrm{j} \cdot \dfrac{{}^{1+\mathrm{j})}\,\mathrm{j}+1}{1-\mathrm{j}} = -1.$

c) $E_3 = \mathrm{j}^1 \cdot \mathrm{j}^2 \cdot ... \cdot \mathrm{j}^{100}$.

Rezolvare: $E_3 = \mathrm{j}^{\frac{100 \cdot 101}{2}} = \mathrm{j}^{5050} = \mathrm{j}^{1262 \cdot 4 + 2} = -1.$

d) $E_4 = \mathrm{j}^n + \mathrm{j}^{n+1} + \mathrm{j}^{n+2} + \mathrm{j}^{n+3}, n \in \mathbb{N}.$

Rezolvare: $E_4 = \mathrm{j}^n \left(1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 + \mathrm{j}^3\right) = 0.$

Exemplul 4. Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ din ecuaţiile:

a) $(*)\,(5x + 3\,\mathrm{j}\,y) + (2y - \mathrm{j}\,x) = (3 - \mathrm{j})\,;$

Rezolvare: $(*) \Leftrightarrow (5x + 2y) + \mathrm{j}\,(3y - x) = 3 - \mathrm{j} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2y = 3 \\ -x + 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{17} \\ y = \frac{-2}{17} \end{cases}.$

b) $(*)\left(-3y + \frac{1}{2}\,\mathrm{j}\,x\right) - (-8x + 5\,\mathrm{j}\,y) = -2 + 12\,\mathrm{j};$

Rezolvare: $(*) \Leftrightarrow (-3y + 8x) + \mathrm{j}\left(\frac{1}{2}x - 5y\right) = -2 + 12\,\mathrm{j} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 3y = -2 \\ \frac{1}{2}x - 5y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-92}{77} \\ y = \frac{-194}{77} \end{cases}.$

c) $(*)\,\dfrac{x-2}{1-\mathrm{j}} + \dfrac{y-3}{1+\mathrm{j}} = 1 - 3\,\mathrm{j};$

Rezolvare: $(*) \Leftrightarrow \dfrac{{}^{1+\mathrm{j})}x-2}{1-\mathrm{j}} + \dfrac{{}^{1-\mathrm{j})}y-3}{1+\mathrm{j}} = 1 - 3\,\mathrm{j} \Leftrightarrow \dfrac{x - 2 + \mathrm{j}\,(x-2)}{2} + \dfrac{y - 3 - \mathrm{j}\,(y-3)}{2} = 1 - 3\,\mathrm{j} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 2 + y - 3) + \mathrm{j}\,(x - 2 - y + 3) = 2 - 6\,\mathrm{j} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 5 = 2 \\ x - y + 1 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 7 \end{cases}.$

d) $(*)\,(\mathrm{j}\,x - y)^2 = 6 - 8\,\mathrm{j} + (x + \mathrm{j}\,y)^2\,;$

Rezolvare: $(*) \Leftrightarrow -x^2 + y^2 - 2\,\mathrm{j}\,xy = 6 - 8\,\mathrm{j} + x^2 - y^2 + 2\,\mathrm{j}\,xy \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + y^2 = 6 + x^2 - y^2 \\ -2xy = -8 + 2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ xy = 2 \end{cases}$

$y = \frac{2}{x} \Rightarrow x^2 - \frac{4}{x^2} = -3 \Rightarrow x^4 + 3x^2 - 4 = 0.$

$x^2 = 1 \overset{x,y \in \mathbb{R}}{\Rightarrow} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$

$x^2 = -4$ nu are soluţii $x, y \in \mathbb{R}$.

e) $(*)\,\dfrac{\mathrm{j}}{x} + \dfrac{\mathrm{j}}{y} + \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} + \dfrac{b\,\mathrm{j}}{y}, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 2;$

Rezolvare: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{b}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{a} \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{b}{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{a} \\ \dfrac{2}{y} - \dfrac{b}{y} = \dfrac{1}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{ya}{y+a} \\ y = a\,(2-b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a\,(2-b)}{1-b} \\ y = a\,(2-b) \end{cases}.$

Observaţie (**Forma matriceală a numerelor complexe):** Fie submulţimea din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dată prin

$$\mathcal{C} = \left\{ Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Aplicaţia

$$\varphi : \mathbb{C} \to \mathcal{C}, \varphi(z) = Z$$

este un izomorfism de corpuri şi se poate **identifica**

$$z = x \cdot 1 + y \cdot \mathrm{j} \in \mathbb{C} \text{ cu } Z = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}.$$

Mai mult, se observă că

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ şi } J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ verifică } J_2^2 = -I_2 \text{ (analog cu } \mathrm{j}^2 = -1).$$

Se poate introduce $\mathrm{Re}(Z) = x$, $\mathrm{coefIm}(Z) = y, |Z| = \sqrt{\det Z}$.

Observaţie ○. Numerele naturale $a, b, c \in \mathbb{N}$ ce verifică $a^2 + b^2 = c^2$ se numesc *numere pitagoreice*.

Fie $z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C}$. Atunci

$$x^2 + y^2 = |z|^2 = \left|z^2\right| = \left|x^2 - y^2 + \mathrm{j} \cdot 2xy\right| = \sqrt{\left(x^2 - y^2\right)^2 + (2xy)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (*) \left(x^2 - y^2\right)^2 + (2xy)^2 = \left(x^2 + y^2\right)^2.$$

Alegând în $(*)$ $x, y \in \mathbb{N}$ cu $x \geq y$, obţinem că

$$\boxed{a = x^2 - y^2, b = 2xy, c = x^2 + y^2}$$

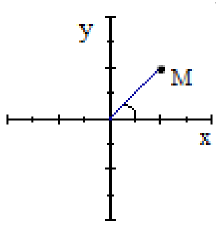
sunt numere pitagoreice. De exemplu,

$x = 2, y = 1 \Rightarrow (a, b, c) = (3, 4, 5)$
$x = 3, y = 2 \Rightarrow (a, b, c) = (5, 12, 13)$
$x = 4, y = 2 \Rightarrow (a, b, c) = (12, 16, 20)$
$x = 4, y = 3 \Rightarrow (a, b, c) = (7, 24, 25)$.

Observaţie.(**Interpretare geometrică**) Fie un plan (π) şi $\mathcal{R} = \left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un reper ortonormat în planul (π). Atunci aplicaţia

$$\psi : \mathbb{C} \to (\pi), \psi(z) = M,$$

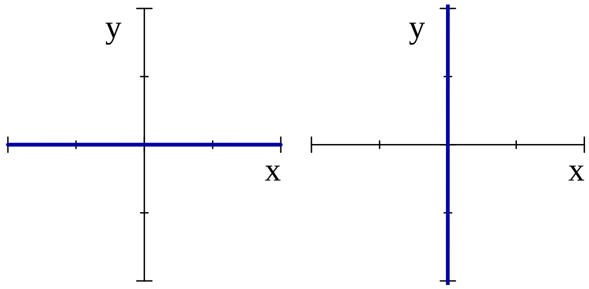
ce face să corespundă numărului complex $z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C}$ punctul $M(x, y) \in (\pi)$ este o aplicaţie bijectivă. Punctul $M(x, y)$ se numeşte *imaginea geometrică* a numărului z, iar numărul z se numeşte *afixul* punctului M. Prin identificare, numărul complex z se numeşte punct. Diagrama de reprezentare se numeşte **diagrama Argand.**



a) Planul (π) se numeşte *planul complex.*
b) Mulţimile de puncte din (π) corespunzătoare pentru

$$\{z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C}; y = 0\}, \{z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C}; x = 0\}$$

sunt respectiv *axa reală* Ox, *axa imaginară* Oy.

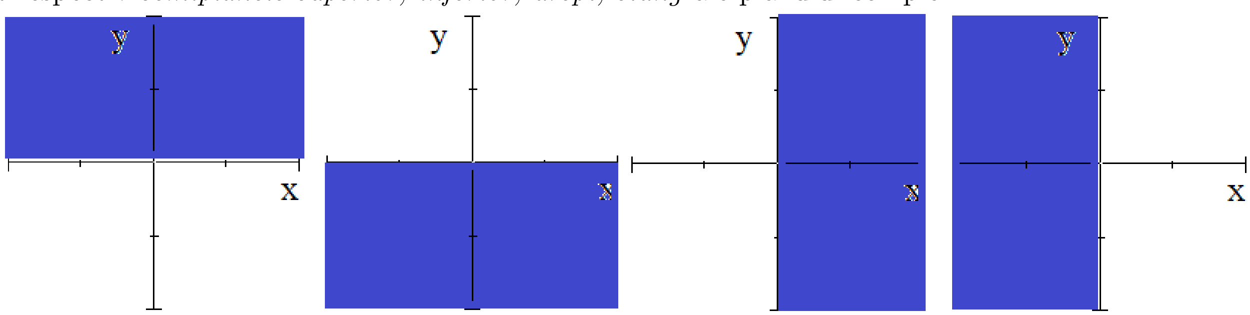


c) Mulţimile de puncte din (π) corespunzătoare pentru

$\{z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C}; y > 0\}, \{z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C}; y < 0\},$

$\{z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C}; x > 0\}, \{z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C}; x < 0\}$

sunt respectiv *semiplanele superior, inferior, drept, stâng* ale planului complex.

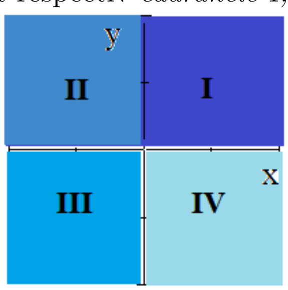


Mulţimile de puncte din (π) corespunzătoare pentru

$\{z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C}; x > 0, y > 0\}, \{z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C}; x < 0, y > 0\},$

$\{z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C}; x < 0, y < 0\}, \{z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C}; x > 0, y < 0\}$

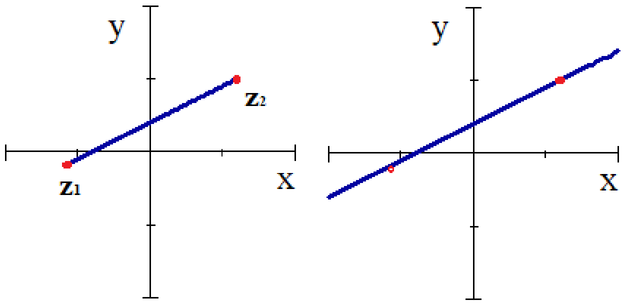
sunt respectiv *cadranele I, al II-lea, al III-lea, al IV-lea* ale planului complex.



d) Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ numere complexe oarecare date. Mulţimile de puncte din (π) corespunzătoare pentru

$\{z \in \mathbb{C}; z = z_1 + t\,(z_2 - z_1), t \in [0,1]\}, \{z \in \mathbb{C}; z = z_1 + t\,(z_2 - z_1), t \in \mathbb{R}\}$

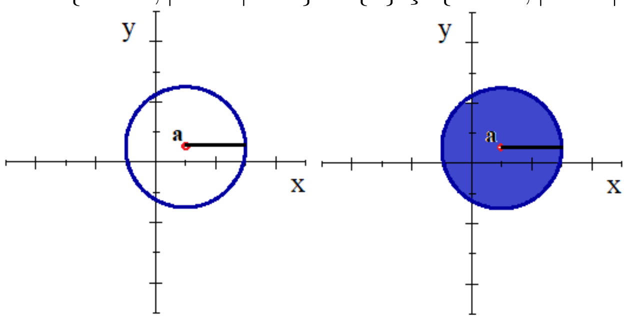
sunt *segmentul de capete* z_1, z_2, respectiv *dreapta ce trece prin punctele* z_1, z_2.



e) Fie $a \in \mathbb{C}$ număr complex oarecare dat şi fie $r \geq 0$ număr real dat. Mulţimile de puncte din (π) corespunzătoare pentru

$\{z \in \mathbb{C}; |z-a| = r\}, \{z \in \mathbb{C}; |z-a| < r\}$

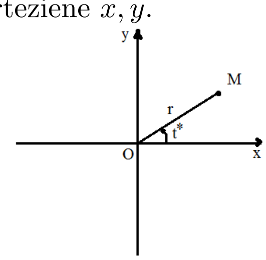
sunt *cercul centrat în* a *şi de rază* r, respectiv *interiorul cercului centrat în* a *şi de rază* r (pentru $r = 0 \Rightarrow \{z \in \mathbb{C}; |z-a| = 0\} = \{a\}$ şi $\{z \in \mathbb{C}; |z-a| < 0\} = \emptyset$).



În particular, numerele complexe cu modulul egal cu r se reprezintă în planul complex prin punctele cercului cu centrul în origine şi de rază egală cu r.

Observaţie. (**Forma trigonometrică a numerelor complexe):**

Fie $\forall z = x + \mathrm{j}\, y \in \mathbb{C}$ şi $M(x, y)$ imaginea lui geometrică în planul complex dată prin coordonatele carteziene x, y.



Fie $r \geq 0, r = \mathrm{dist}(O, M)$ şi $t^* \in [0, 2\pi[\,, t^*$ măsura în radiani a unghiului orientat făcut de Ox cu OM *coordonatele polare* ale lui M, definite unic prin

$$\begin{cases} x = r\cos t^* \\ y = r\sin t^* \end{cases}.$$

Atunci $z = r(\cos t^* + \mathrm{j}\sin t^*), r \geq 0, t^* \in [0, 2\pi[\,$. De menţionat că studiul se poate reface şi pentru $t^* \in [\alpha + 0, \alpha + 2\pi[\,, \alpha \in \mathbb{R}$ dat, corespunzător altei tăieturi decât Ox_+.

Se observă că *raza polară* a imaginii lui z este egală cu modulul lui z,

$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|.}$$

Argumentul polar t^* al imaginii lui $z \in \mathbb{C}^*$ se numeşte *argumentul redus al lui* z şi se notează $\arg z$. Dacă $z = 0$, modulul este egal cu 0, iar argumentul său redus se poate lua drept orice număr din $[0, 2\pi[$ Dacă $z \neq 0$, modulul şi argumentul redus ale lui z sunt determinate unic. Cum

$t^* = \mu\left(\widehat{Ox, \overrightarrow{OM}}\right)$ (unghiul orientat cu care se roteşte versorul $\overrightarrow{i}$ al axei Ox în sens pozitiv, trigonometric încât să se obţină orientarea lui $\left[\overrightarrow{OM}\right]$), se deduce:

$$\boxed{\arg z = t^* = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + \widetilde{k}\pi, \text{ unde } \begin{cases} \widetilde{k} = 0 \text{ dacă } M \text{ este în cadranul } I \\ \widetilde{k} = 1 \text{ dacă } M \text{ este în cadranele } II \text{ sau } III \\ \widetilde{k} = 2 \text{ dacă } M \text{ este în cadranul } IV \end{cases} \\ 0, \text{ dacă } y = 0, x > 0 \\ \pi, \text{ dacă } y = 0, x < 0 \\ \frac{\pi}{2}, \text{ dacă } x = 0, y > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, \text{ dacă } x = 0, y < 0 \end{cases}}$$

Se notează $\operatorname{Arg} z = \{t \in \mathbb{R}; t = \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Atunci orice număr complex $z \in \mathbb{C}$ poate fi scris sub forma

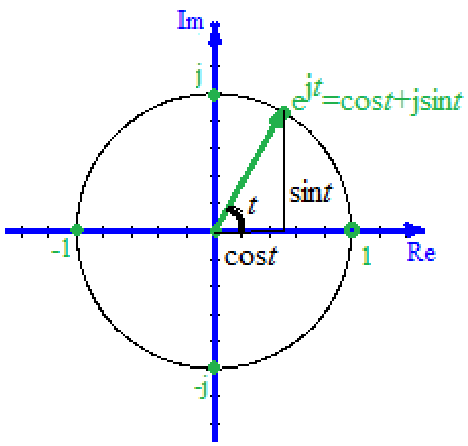
$\boxed{z = r(\cos t + \mathrm{j} \sin t), r \geq 0, t \in \mathbb{R},}$

numită *forma trigonometrică au polară a lui z*.

După studiul funcţiilor complexe, se va introduce şi *forma exponenţială* a lui z,

$\boxed{z = re^{\mathrm{j}\,t}, r \geq 0, t \in \mathbb{R},}$

bazându-se pe *formula Euler* $e^{\mathrm{j}\,t} = \cos t + \mathrm{j} \sin t$, din care se deduce identitatea Euler $e^{\mathrm{j}\,\pi} = -1$.



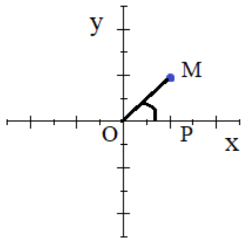
Interpretare fizică: Când electronii oscilează în jurul unei poziţii de echilibru, poziţia lor este dată de o ecuaţie de tipul

$z = Ae^{-\frac{ht}{2m} + \mathrm{j}\frac{\sqrt{4mf - h^2}}{2m - a}t}$, unde literele reprezintă mărimi cu interpretări caracteristice.

Exemplul 5. Să se scrie sub formă trigonometrică numerele

a) $z = 1 + \mathrm{j}$

Rezolvare. Se reprezintă z în planul complex: $z = 1 + \mathrm{j} \rightsquigarrow M(1, 1) \in CI$



$r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$

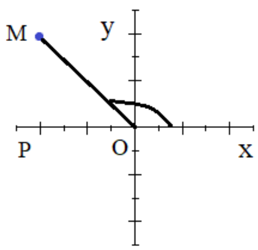
$t^* \overset{\text{formulă}}{=} \arg z = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{1} + 0 \cdot \pi = \frac{\pi}{4}.$

Sau $t^* \overset{\text{desen}}{=} \alpha, \alpha = \mu\left(\widehat{POM}\right), P = pr_{Ox}M$, unde $\operatorname{tg}\alpha \overset{\text{în } \Delta POM}{=} \frac{MP}{PO} = \frac{|1|}{|1|}.$

Atunci $1 + \mathrm{j} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{4}\right).$

b) $z = -2 + 2\,\mathrm{j}$

Rezolvare. Se reprezintă z în planul complex: $z = -2 + 2\,\mathrm{j} \rightsquigarrow M\,(1, 1) \in CII$



$r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}.$

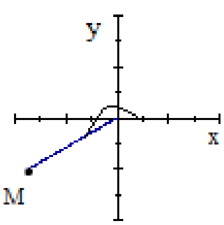
$t^* \overset{\text{formulă}}{=} \arg z = \operatorname{arctg} \dfrac{2}{-2} + 1 \cdot \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}.$

Sau $t^* \overset{\text{desen}}{=} \pi - \alpha, \alpha = \mu\left(\widehat{POM}\right), P = pr_{Ox}M$, unde $\operatorname{tg}\alpha \overset{\text{în } \Delta POM}{=} \frac{MP}{PO} = \frac{|2|}{|-2|}.$

Atunci $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{3\pi}{4}\right).$

c) $z = -\sqrt{3} - \mathrm{j}$

Rezolvare. Se reprezintă z în planul complex: $z = -\sqrt{3} - \mathrm{j} \rightsquigarrow M\left(-\sqrt{3}, -1\right) \in CIII$



$r = |z| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2.$

$t^* \overset{\text{formulă}}{=} \arg z = \operatorname{arctg} \dfrac{-1}{-\sqrt{3}} + \pi = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}.$

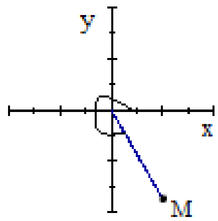
Sau $t^* \overset{\text{desen}}{=} \pi + \alpha, \alpha = \mu\left(\widehat{POM}\right), P = pr_{Ox}M$, unde $\operatorname{tg}\alpha \overset{\text{în } \Delta POM}{=} \frac{MP}{PO} = \frac{|-1|}{\left|-\sqrt{3}\right|}.$

Atunci $-\sqrt{3} - \mathrm{j} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + \mathrm{j}\sin\frac{7\pi}{6}\right).$

Comentariu: $z = -\sqrt{3} - \mathrm{j} = -2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{6}\right)$ este corect din punct de vedere algebric, dar $\frac{\pi}{6} \neq \arg z, -2$ nu poate fi $r \geq 0$; adică relaţia nu reprezintă forma trigonometrică a numărului.

d) $z = 1 - \mathrm{j}\sqrt{3}$

Rezolvare. Se reprezintă z în planul complex: $z = 1 - \mathrm{j}\sqrt{3} \rightsquigarrow M\left(1, -\sqrt{3}\right) \in CIV$



$r = |z| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2.$

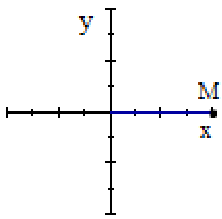
$t^* \overset{\text{formulă}}{=} \arg z = \operatorname{arctg} \dfrac{-\sqrt{3}}{1} + 2\pi = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}.$

Sau $t^* \overset{\text{desen}}{=} 2\pi - \alpha, \alpha = \mu\left(\widehat{POM}\right), P = pr_{Ox}M,$ unde $\operatorname{tg}\alpha \overset{\text{în } \Delta POM}{=} \frac{MP}{PO} = \frac{|-\sqrt{3}|}{|-1|}.$

Atunci $1 - \mathrm{j}\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{5\pi}{3}\right).$

e) $z = 2$

Rezolvare. Se reprezintă z în planul complex: $z = 2 + \mathrm{j}\cdot 0 \rightsquigarrow M(2,0)$



$r = |z| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2.$

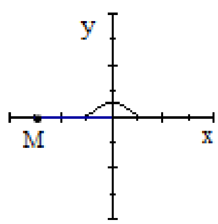
$t^* \overset{\text{formulă}}{=} \arg z = 0.$

Sau $t^* \overset{\text{desen}}{=} \mu\left(\widehat{Ox, \overrightarrow{OM}}\right) = 0.$

Atunci $2 = 2(\cos 0 + \mathrm{j}\sin 0).$

f) $z = -\frac{3}{2}$

Rezolvare. Se reprezintă z în planul complex: $z = -\frac{3}{2} + \mathrm{j}\cdot 0 \rightsquigarrow M\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$



$r = |z| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{3}{2}.$

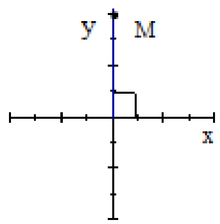
$t^* \overset{\text{formulă}}{=} \arg z = \pi.$

Sau $t^* \overset{\text{desen}}{=} \mu\left(\widehat{Ox, \overrightarrow{OM}}\right) = \pi.$

Atunci $-\frac{3}{2} = \frac{3}{2}(\cos\pi + \mathrm{j}\sin\pi).$

g) $z = 2\mathrm{j}$

Rezolvare. Se reprezintă z în planul complex: $z = 0 + \mathrm{j}\cdot 2 \rightsquigarrow M(0,2)$



$r = |z| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2.$

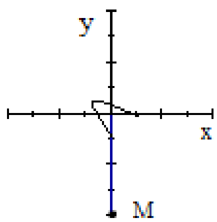
$t^* \overset{\text{formulă}}{=} \arg z = \frac{\pi}{2}.$

Sau $t^* \overset{\text{desen}}{=} \mu\left(\widehat{Ox, \overrightarrow{OM}}\right) = \frac{\pi}{2}.$

Atunci $2\,\mathrm{j} = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{2}\right).$

h) $z = -2\,\mathrm{j}$

Rezolvare. Se reprezintă z în planul complex: $z = 0 - \mathrm{j}\cdot 2 \rightsquigarrow M\,(0, -2)$



$r = |z| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$

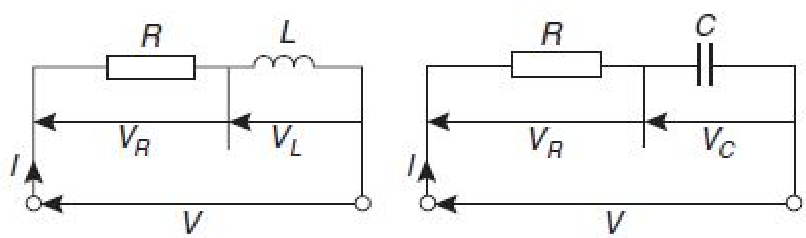
$t^* \overset{\text{formulă}}{=} \arg z = \frac{3\pi}{2}.$

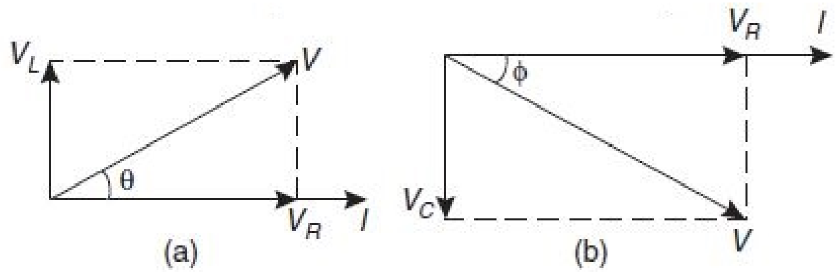
Sau $t^* \overset{\text{desen}}{=} \mu\left(\widehat{Ox, \overrightarrow{OM}}\right) = \frac{3\pi}{2}.$

Atunci $-2\,\mathrm{j} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{j}\sin\frac{3\pi}{2}\right).$

Interpretare fizică: Există aplicaţii ale numerelor complexe în ştiinţă şi inginerie, în particular în teoria curentului electric alternativ şi în mecanica vectorială.

A. Efectul multiplicării cu j unui fazor (vector rotitor reprezentând, de exemplu, una dintre mărimile caracteristice ale curentului alternativ - intensitate, tensiune) reprezentat în diagrama Argand constă în rotirea în sens trigonometric cu $\dfrac{\pi}{2}$ fără a-i modifica lungimea. Similar, efectul multiplicării cu $-\mathrm{j}$ a unui fazor constă în rotirea cu $-\dfrac{\pi}{2}$ fără a-i modifica lungimea. Acestea se utilizează în teoria curentului alternativ, deoarece anumite mărimi reprezentate vectorial sunt la unghi de $\dfrac{\pi}{2}$ una de alta.



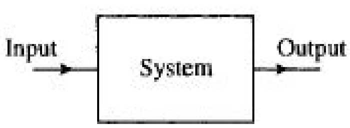


De exemplu, în circuitele RLC din figură.

În circuitul (a), V_L şi I fac un unghi de 90^0, ceea ce se poate scrie ca $\mathrm{j}\, V_L$, axa verticală fiind axa imaginară din diagrama Argand. Astfel, $V_R + \mathrm{j}\, V_L = V$. Dar $V_R = IR, V = IX_L$ (unde X_L =reactanţa inductivă, $2\pi Lf$ ohmi)$, V = IZ$ (unde Z =impedanţa)$\Rightarrow R + \mathrm{j}\, X_L = Z$

În circuitul b) I şi V_C de 90^0, ceea ce se poate scrie $V_R - \mathrm{j}\, V_C = V \Rightarrow R - \mathrm{j}\, X_C = Z$. (unde X_C =reactanţa capacitivă, $\dfrac{1}{2\pi Lf}$ ohmi).

B. O undă de frecvenţă singulară se poate reprezenta printr-un fazor. În teoria sistemelor liniare, un sistem în care inputul (intrarea) este o undă de frecvenţă singulară produce un output (ieşire) de aceeaşi frecvenţă, ce poate fi defazat şi cu amplitudinea scalată. Utilizând numerele complexe, sistemul poate fi reprezentat printr-un număr care multiplică fazorul de input, având efectul de rotire a fazorului şi de scalare a amplitudinii. Se poate defini j ca fiind un număr ce multiplică fazorul de input, având efectul de rotire cu $\dfrac{\pi}{2}$, fără să schimbe amplitudinea. Dacă multiplicarea se repetă, atunci, rotind fazorul cu $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \pi$, atunci outputul sistemului se inversează. Astfel obţinem interpretarea ecuaţiei $\mathrm{j}^2 = -1$.



Propoziţie. $\forall z \in \mathbb{C} : \arg \overline{z} = 2\pi - \arg z$.

Propoziţie. **a)** $\forall z_1 = r_1 (\cos t_1 + \mathrm{j} \sin t_1) \in \mathbb{C}$ şi $\forall z_2 = r_2 (\cos t_2 + \mathrm{j} \sin t_2) \in \mathbb{C}$:

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos (t_1 + t_2) + \mathrm{j} \sin (t_1 + t_2))$;

b) $\forall z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$:

$z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot ... \cdot r_n (\cos (t_1 + t_2 + ... + t_n) + \mathrm{j} \sin (t_1 + t_2 + ... + t_n))$;

c) $\forall z = r (\cos t + \mathrm{j} \sin t) \in \mathbb{C}$ şi $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$z^n = r^n (\cos (nt) + \mathrm{j} \sin (nt))$.

În particular, are loc *formula lui Moivre*

$$\boxed{(\cos t + \mathrm{j} \sin t)^n = \cos (nt) + \mathrm{j} \sin (nt), \forall n \in \mathbb{N}^*}$$

d) $\forall z = r (\cos t + \mathrm{j} \sin t) \in \mathbb{C}^*$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} (\cos (-t) + \mathrm{j} \sin (-t))$$

e) $\forall z_1 = r_1 (\cos t_1 + \mathrm{j} \sin t_1) \in \mathbb{C}$ şi $\forall z_2 = r_2 (\cos t_2 + \mathrm{j} \sin t_2) \in \mathbb{C}^*$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos (t_1 - t_2) + \mathrm{j} \sin (t_1 - t_2)).$$

Exemplul 6. Să se calculeze

a) $E_1 = \left(-1 + \mathrm{j}\sqrt{3}\right)^{10}$;**b)** $E_2 = \dfrac{(1+\mathrm{j})^{2013}}{(1-\mathrm{j})^{2000}}$.

Rezolvare. Reamintim că, $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$\cos(t + 2k\pi) = \cos t$ şi $\sin(t + 2k\pi) = \sin t$.

a) modul 1. (algebric-mai ales dacă se cere forma algebrică a E_1)

O variantă de calcul algebric este:

$z = -1 + \mathrm{j}\sqrt{3}$

$z^2 = \left(-1 + \mathrm{j}\sqrt{3}\right)^2 = -2 - 2\,\mathrm{j}\sqrt{3}$

$z^3 = 2\left(-1 - \mathrm{j}\sqrt{3}\right)\left(-1 + \mathrm{j}\sqrt{3}\right) = 2^3$

$E_1 = z^{10} = z^{3\cdot 3+1} = \left(z^3\right)^3 \cdot z = \left(2^3\right)^3 \cdot \left(-1 + \mathrm{j}\sqrt{3}\right) = -2^9 + \mathrm{j}\cdot 2^9\sqrt{3}$.

modul 2. (trigonometric-mai ales dacă se cere forma trigonometrică a E_1)

Analog cu exerciţiul 1.1.4, se reprezintă trigonometric

$$z = -1 + \mathrm{j}\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

$$E_1 = z^{10} = \left(-1 + \mathrm{j}\sqrt{3}\right)^{10} = \left(2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right)^{10} = 2^{10}\left(\cos\frac{20\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{20\pi}{3}\right) =$$

$$= 2^{10}\left(\cos\left(6\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{j}\sin\left(6\pi + \frac{2\pi}{3}\right)\right) \overset{k=3}{=}$$

$$= 2^{10}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

b) modul 1. (algebric-mai ales dacă se cere forma algebrică a E_2)

O variantă de calcul algebric este:

$z_1 = 1 + \mathrm{j}$

$z_1^2 = (1+\mathrm{j})^2 = 2\,\mathrm{j}$

$z_1^4 = (2\,\mathrm{j})^2 = -2^2$

$z_1^{2013} = z_1^{503\cdot 4+1} = \left(z_1^4\right)^{503} \cdot z = \left(-2^2\right)^{503} \cdot (1+\mathrm{j}) = -2^{1006} \cdot (1+\mathrm{j}) = -2^{1006} - 2^{1006}\,\mathrm{j}$.

$z_2 = 1 - \mathrm{j}$

$z_2^2 = (1-\mathrm{j})^2 = -2\,\mathrm{j}$

$z_2^4 = (-2\,\mathrm{j})^2 = -2^2$

$z_2^{2000} = z_2^{500\cdot 4+0} = \left(z_2^4\right)^{500} = \left(-2^2\right)^{500} = 2^{1000}$

$E_2 = \dfrac{-2^{1006}\cdot(1+\mathrm{j})}{2^{1000}\cdot 1} = -2^6\cdot(1+\mathrm{j}) = -2^6 - 2^6\,\mathrm{j}$.

modul 2. (trigonometric-mai ales dacă se cere forma trigonometrică a E_2)

Analog cu exerciţiul 6, se reprezintă trigonometric

$$z_1 = 1 + \mathrm{j} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{4}\right);\, z_2 = 1 - \mathrm{j} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{7\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

$$E_2 = \frac{(z_1)^{2013}}{(z_2)^{2000}} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2013}\left(\cos\dfrac{2013\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\dfrac{2013\pi}{4}\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^{2000}\left(\cos\dfrac{2000\cdot 7\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\dfrac{2000\cdot 7\pi}{4}\right)} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2013}\left(\cos\left(503\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{j}\sin\left(502\pi + \dfrac{5\pi}{4}\right)\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^{2000}\left(\cos(3500\pi) + \mathrm{j}\sin(3500\pi)\right)} =$$

$$= \frac{(\sqrt{2})^{2013}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{j}\sin\frac{5\pi}{4}\right)}{(\sqrt{2})^{2000}\left(\cos(0\pi)+\mathrm{j}\sin(0\pi)\right)} = (\sqrt{2})^{13}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}-0\pi\right)+\mathrm{j}\sin\left(\frac{5\pi}{4}-0\pi\right)\right) =$$
$$= (\sqrt{2})^{13}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{j}\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

Definiţie. Fie $z = r(\cos t^* + \mathrm{j}\sin t^*) \in \mathbb{C}^*$, cu $r = |z|, t^* = \arg z \in [0, 2\pi[$(dacă se lucrează cu tăietura Ox_+). Numărul complex z are exact n rădăcini complexe de ordin n, şi anume

$$\boxed{(\sqrt[n]{z})_{\mathbb{C}} = \left\{Z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{t^*+2k\pi}{n}+\mathrm{j}\sin\frac{t^*+2k\pi}{n}\right); k\in\{0,1,...,n-1\}\right\}.}$$

○**Exemplul 7**. Fie $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze $\mathrm{Re}[s(z)]$ pentru

$s(z) = 1 + z + ... + z^n$, unde $z = \dfrac{1+\mathrm{j}}{1-\mathrm{j}}$.

Rezolvare. $s(z) = 1 + z + ... + z^n = 1\cdot\dfrac{z^{n+1}-1}{z-1}, z \neq 1.$

$$z = \frac{^{1+\mathrm{j})}1+\mathrm{j}}{1-\mathrm{j}} = \frac{1+2\mathrm{j}+\mathrm{j}^2}{1-\mathrm{j}^2} = \mathrm{j} = 1\left(\cos\tfrac{\pi}{2}+\mathrm{j}\sin\tfrac{\pi}{2}\right).$$

$$s\left(\tfrac{1+\mathrm{j}}{1-\mathrm{j}}\right) = 1\cdot\frac{\left(\frac{1+\mathrm{j}}{1-\mathrm{j}}\right)^{n+1}-1}{z-1} = \frac{1^{n+1}\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{j}\sin\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}-1}{1\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{j}\sin\frac{\pi}{2}\right)-1} =$$
$$= \frac{\cos\frac{(n+1)\pi}{2}+\mathrm{j}\sin\frac{(n+1)\pi}{2}-1}{\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{j}\sin\frac{\pi}{2}-1} = \frac{2\sin^2\frac{(n+1)\pi}{2\cdot2}-2\mathrm{j}\sin\frac{(n+1)\pi}{2\cdot2}\cos\frac{(n+1)\pi}{2\cdot2}}{2\sin^2\frac{\pi}{2\cdot2}-2\mathrm{j}\sin\frac{\pi}{2\cdot2}\cos\frac{\pi}{2\cdot2}} =$$
$$= \frac{^{\mathrm{j})}2\sin\frac{(n+1)\pi}{4}\left(\sin\frac{(n+1)\pi}{4}-\mathrm{j}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}\right)}{2\sin\frac{\pi}{4}\left(\sin\frac{\pi}{4}-\mathrm{j}\cos\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{4}\left(\cos\frac{(n+1)\pi}{4}+\mathrm{j}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\pi}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{j}\sin\frac{\pi}{4}\right)} =$$
$$= \frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}\left(\cos\left(\tfrac{(n+1)\pi}{4}-\tfrac{\pi}{4}\right)+\mathrm{j}\sin\left(\tfrac{(n+1)\pi}{4}-\tfrac{\pi}{4}\right)\right) =$$
$$= \frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}\left(\cos\tfrac{n\pi}{4}+\mathrm{j}\sin\tfrac{n\pi}{4}\right).$$

În consecinţă, $\mathrm{Re}\left(s\left(\frac{1+\mathrm{j}}{1-\mathrm{j}}\right)\right) = \dfrac{\sin\frac{(n+1)\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}\cdot\cos\frac{n\pi}{4}.$

○**Exemplul 8**. Folosind numere sub formă trigonometrică şi formula lui Moivre, să se arate că, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, are loc

$$\cos x+\cos 2x+...+\cos nx = \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos\left(\tfrac{(n+1)x}{2}\right); \sin x+\sin 2x+...+\sin nx = \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\sin\left(\tfrac{(n+1)x}{2}\right).$$

Rezolvare. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Se notează

$$A_n = \cos x + \cos 2x + ... + \cos nx = \sum_{k=1}^{n}\cos kx; B_n = \sin x + \sin 2x + ... + \sin nx = \sum_{k=1}^{n}\sin kx.$$

$$A_n + \mathrm{j}B_n = \sum_{k=1}^{n}\cos kx + \mathrm{j}\sum_{k=1}^{n}\sin kx = \sum_{k=1}^{n}(\cos kx + \mathrm{j}\sin kx) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(\cos x+\mathrm{j}\sin x)^k = (\cos x+\mathrm{j}\sin x)\frac{(\cos x+\mathrm{j}\sin x)^n-1}{(\cos x+\mathrm{j}\sin x)-1} =$$
$$= (\cos x+\mathrm{j}\sin x)\frac{(\cos nx+\mathrm{j}\sin nx)-1}{(\cos x+\mathrm{j}\sin x)-1} = (\cos x+\mathrm{j}\sin x)\frac{^{\mathrm{j})}2\sin^2\frac{nx}{2}+2\mathrm{j}\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}+2\mathrm{j}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$= (\cos x + \mathrm{j}\sin x)\,\frac{\sin\frac{nx}{2}\left(\cos\frac{nx}{2} + \mathrm{j}\sin\frac{nx}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + \mathrm{j}\sin\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\left(x + \frac{nx}{2} - \frac{x}{2}\right) + \mathrm{j}\sin\left(x + \frac{nx}{2} - \frac{x}{2}\right)\right).$$

Deci $A_n = \dfrac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)$ şi $B_n = \dfrac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)$.

Exemplul 9. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţiile

a) $(2+\mathrm{j})\,Z^3 - 3 + \mathrm{j} = 0$;

Rezolvare.$(*) \Leftrightarrow Z^3 = \dfrac{^{2-\mathrm{j})}3 - \mathrm{j}}{2+\mathrm{j}} \Leftrightarrow Z^3 = \dfrac{6 - 1 - 5\,\mathrm{j}}{5} \Leftrightarrow Z^3 = 1 - \mathrm{j}$.

Se scrie sub formă trigonometrică $1 - \mathrm{j} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{7\pi}{4}\right)$. Atunci

$Z^3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{7\pi}{4}\right) \Rightarrow$

$$Z \in \left(\sqrt[3]{1-\mathrm{j}}\right)_{\mathbb{C}} = \left\{ Z_k = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right); k \in \{0,1,2\} \right\}$$

$$Z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4} + 0}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{\frac{7\pi}{4} + 0}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + \mathrm{j}\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

$$Z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4} + 2\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{\frac{7\pi}{4} + 2\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

$$Z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4} + 4\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{\frac{7\pi}{4} + 4\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + \mathrm{j}\sin\frac{23\pi}{12}\right).$$

Dacă se reprezintă soluţiile ecuaţiei, Z_0, Z_1, Z_2, în planul complex, ele sunt vârfurile unui triunghi echilateral încris într-un cerc de rază $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$.

b) $\left(\sqrt{3} - \mathrm{j}\right) Z^4 - 4\,\mathrm{j} = 0$;

Rezolvare.$(*) \Leftrightarrow Z^4 = \dfrac{^{\sqrt{3}+\mathrm{j})}4\,\mathrm{j}}{\sqrt{3} - \mathrm{j}} \Leftrightarrow Z^4 = \dfrac{4\,\mathrm{j}\left(\sqrt{3} + \mathrm{j}\right)}{3+1} \Leftrightarrow Z^4 = -1 + \mathrm{j}\,\sqrt{3}$.

Se scrie sub formă trigonometrică $-1 + \mathrm{j}\,\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. Atunci

$Z^4 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow$

$$Z \in \left(\sqrt[4]{-1 + \mathrm{j}\,\sqrt{3}}\right)_{\mathbb{C}} = \left\{ Z_k = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right); k \in \{0,1,2,3\} \right\}$$

$$Z_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3} + 0}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{\frac{2\pi}{3} + 0}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

$$Z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

$$Z_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3} + 4\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{\frac{2\pi}{3} + 4\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + \mathrm{j}\sin\frac{7\pi}{6}\right).$$

$$Z_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3} + 6\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{\frac{2\pi}{3} + 6\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{5\pi}{3}\right).$$

Dacă se reprezintă soluţiile ecuaţiei, Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, în planul complex, ele sunt vârfurile unui pătrat încris într-un cerc de rază $\sqrt[4]{2}$.

c) $5\,(1 - 3\,\mathrm{j})\,Z^5 + 4\,(2 - \mathrm{j}) = 0$;

Rezolvare.$(*) \Leftrightarrow Z^5 = \dfrac{^{1+3\mathrm{j})}\left[-4\,(2-\mathrm{j})\right]}{5\,(1 - 3\,\mathrm{j})} \Leftrightarrow Z^5 = \dfrac{4\,\mathrm{j}\left(\sqrt{3} + \mathrm{j}\right)}{3+1} \Leftrightarrow Z^5 = -\frac{2}{5} - \frac{2}{5}\,\mathrm{j}$.

Se scrie sub formă trigonometrică $-\frac{2}{5} - \frac{2}{5}\,\mathrm{j} = \frac{2\sqrt{2}}{5}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{5\pi}{4}\right)$. Atunci

$Z^5 = \frac{2\sqrt{2}}{5}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{5\pi}{4}\right) \Rightarrow$

$Z \in \left(\sqrt[5]{-\frac{2}{5} - \frac{2}{5}\,\mathrm{j}}\right)_{\mathbb{C}} = \left\{ Z_k = \sqrt[5]{\frac{2\sqrt{2}}{5}} \left(\cos\frac{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi}{5} + \mathrm{j}\sin\frac{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi}{5} \right); k \in \{0,1,2,3,4\} \right\}$

$Z_0 = ..., Z_4 = ...$

Dacă se reprezintă soluţiile în planul complex, ele sunt vârfurile unui pentagon regulat încris într-un cerc de rază $\sqrt[5]{\frac{2\sqrt{2}}{5}}$.

d) $Z^6 - 9Z^3 + 8 = 0;$

Rezolvare. $w^2 - 9w + 8 = 0; \Delta = 81 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 49 \Rightarrow w_1 = 1$ şi $w_2 = 8.$

$(*_1)$ $Z^3 = 1 + 0\,\mathrm{j}$. Se scrie sub formă trigonometrică $1 + 0\,\mathrm{j} = 1(\cos 0 + \mathrm{j}\sin 0)$. Atunci

$Z^3 = 1(\cos 0 + \mathrm{j}\sin 0) \Rightarrow$

$Z \in \left(\sqrt[3]{1 + 0\,\mathrm{j}}\right)_{\mathbb{C}} = \left\{ Z_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{0 + 2k\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{0 + 2k\pi}{3}\right); k \in \{0,1,2\} \right\}$

$Z_0 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{0+0}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{0+0}{3}\right) = \cos 0 + \mathrm{j}\sin 0.$

$Z_1 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{0+2\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{0+2\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{2\pi}{3}.$

$Z_2 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{0+4\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{0+4\pi}{3}\right) = \cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{4\pi}{3}.$

$(*_2)$ $Z^3 = 8 + 0\,\mathrm{j}$. Se scrie sub formă trigonometrică $8 + 0\,\mathrm{j} = 8(\cos 0 + \mathrm{j}\sin 0)$. Atunci

$Z^3 = 8(\cos 0 + \mathrm{j}\sin 0) \Rightarrow$

$Z \in \left(\sqrt[3]{8 + 0\,\mathrm{j}}\right)_{\mathbb{C}} = \left\{ Z_k = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{0 + 2k\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{0 + 2k\pi}{3}\right); k \in \{0,1,2\} \right\}$

$Z_3 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{0+0}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{0+0}{3}\right) = 2(\cos 0 + \mathrm{j}\sin 0).$

$Z_4 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{0+2\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{0+2\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{2\pi}{3}\right).$

$Z_5 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{0+4\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{0+4\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{4\pi}{3}\right).$

Dacă se reprezintă soluţiile în planul complex, ele sunt vârfurile a două triunghiuri echilaterale, unul încris într-un cerc de rază 1, celălalt într-un cerc de rază 2.

e) $Z^8 + (1 - \mathrm{j})Z^4 - \mathrm{j} = 0;$

Rezolvare. $w^2 + (1 - \mathrm{j})w - \mathrm{j} = 0; \Delta = (1 - \mathrm{j})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\mathrm{j}) = 1 + 2\mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = (1 + \mathrm{j})^2$

$w_1 = \frac{-(1-\mathrm{j}) - (1+\mathrm{j})}{2 \cdot 1} = -1$ şi $w_2 = \frac{-(1-\mathrm{j}) + (1+\mathrm{j})}{2 \cdot 1} = \mathrm{j}.$

$(*_1)$ $Z^4 = -1$. Se scrie sub formă trigonometrică $-1 + 0 \cdot \mathrm{j} = 1(\cos\pi + \mathrm{j}\sin\pi)$. Atunci

$Z^4 = 1(\cos\pi + \mathrm{j}\sin\pi) \Rightarrow$

$Z \in \left(\sqrt[4]{-1 + 0 \cdot \mathrm{j}}\right)_{\mathbb{C}} = \left\{ Z_k = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right); k \in \{0,1,2,3\} \right\}$

$Z_0 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi+0}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi+0}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{4}.$

$Z_1 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi+2\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{3\pi}{4}.$

$Z_2 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi+4\pi}{4}\right) = \cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{5\pi}{4}.$

$Z_3 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi+6\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi+6\pi}{4}\right) = \cos\frac{7\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{7\pi}{4}.$

$(*_2)$ $Z^4 = \mathrm{j}$. Se scrie sub formă trigonometrică $0 + 1 \cdot \mathrm{j} = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{2}\right)$. Atunci
$Z^4 = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$
$Z \in \left(\sqrt[4]{-1+0\cdot\mathrm{j}}\right)_{\mathbb{C}} = \left\{ Z_k = \sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\dfrac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}\right); k \in \{0,1,2,3\}\right\}$
$Z_4 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\dfrac{\frac{\pi}{2}+0}{4} + \mathrm{j}\sin\dfrac{\frac{\pi}{2}+0}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{8} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{8}$.
$Z_5 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\dfrac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\dfrac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{4}\right) = \cos\frac{5\pi}{8} + \mathrm{j}\sin\frac{5\pi}{8}$.
$Z_6 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\dfrac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\dfrac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{4}\right) = \cos\frac{9\pi}{8} + \mathrm{j}\sin\frac{9\pi}{8}$.
$Z_7 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\dfrac{\frac{\pi}{2}+6\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\dfrac{\frac{\pi}{2}+6\pi}{4}\right) = \cos\frac{13\pi}{8} + \mathrm{j}\sin\frac{13\pi}{8}$.

Dacă se reprezintă soluţiile în planul complex, ele sunt vârfurile a două pătrate, ambele încrise într-un cerc de rază $\sqrt[4]{1}$.