ANEXA 4
Analiză matematică, AIA

Funcţii $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ elementare: funcţia polinomială, funcţia raţională, funcţia putere, funcţia radical, funcţia logaritm, funcţia exponenţială, funcţii trigonometrice, funcţii hiperbolice. Definiţii, grafice şi lecturi grafice (intersecţia cu axele, monotonie, semn)

Se reaminteşte că pentru $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, imaginea şi graficul sunt mulţimile
$f(A) = \{y \in \mathbb{R}; \exists x \in A \text{ a.î. } f(x) = y\}$ şi $G_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in A \text{ şi } y = f(x)\right\}$.
Geometric, reprezentarea geometrică a mulţimii $f(A)$ este proiecţia pe axa Oy a reprezentării graficului funcţiei, G_f.

1°. Funcţii polinomiale.

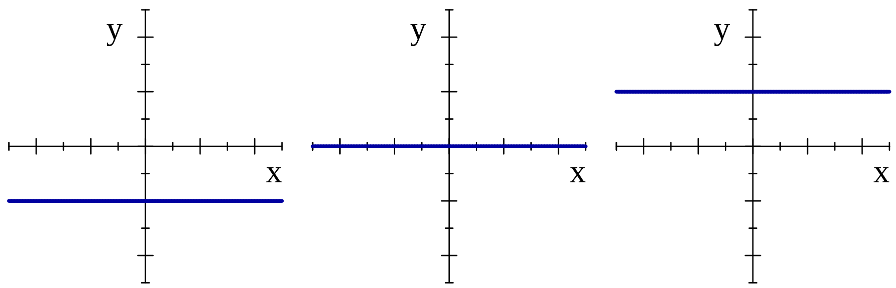
Definiţia 1. Fie $n \in \mathbb{N}$, $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Se numeşte *funcţie polinomială* funcţia
$P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$.
Numărul natural n se numeşte *gradul funcţiei polinomiale.*

Particularizări.

$\boxed{n=0}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a$, unde $a \in \mathbb{R}$.

Graficul funcţiei f reprezintă *o dreaptă* în plan care este paralelă sau coincide cu axa Ox.

$a < 0$	$a = 0$	$a > 0$
$f(x) = -2$	$f(x) = 0$	$f(x) = 2$
$y = -2$	$y = 0$-axa Ox	$y = 2$

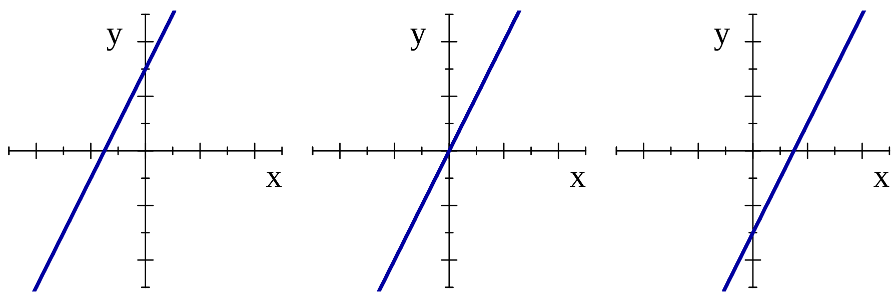


$\boxed{n=1}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$.

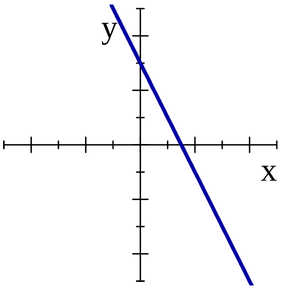
Ecuaţia de gradul 1 : $ax + b = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a} \in \mathbb{R}$.

Graficul funcţiei f reprezintă *o dreaptă* în plan care se intersectează cu axele.

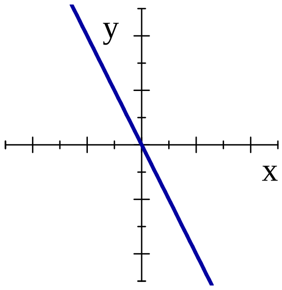
$a > 0, b > 0$	$a > 0, b = 0$	$a > 0, b < 0$
$f(x) = 2x + 3$	$f(x) = 2x$	$f(x) = 2x - 3$
$y = 2x + 3$	$y = 2x$	$y = 2x - 3$



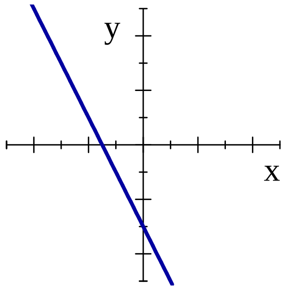
$a < 0, b > 0$
$f(x) = -2x + 3$
$y = -2x + 3$



$a < 0, b = 0$
$f(x) = -2x$
$y = -2x$



$a < 0, b < 0$
$f(x) = -2x - 3$
$y = -2x - 3$



Teorema 1.**(monotonie)** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$.
Dacă $a > 0$ atunci f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.
Dacă $a < 0$ atunci f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

Teorema 2. **(semn)** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$. Atunci

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		semn contrar lui a	0	semnul lui a	

$\boxed{n = 2}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a \in \mathbb{R}^*, b, c \in \mathbb{R}$.

Ecuaţia de gradul al 2-lea: $ax^2 + bx + c = 0$.

Rezolvare. $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} =$
$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right).$

Se notează $\Delta = b^2 - 4ac$.

Dacă $\Delta > 0 \Rightarrow$ecuaţia are două rădacini reale distincte:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ şi } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Dacă $\Delta = 0 \Rightarrow$ecuaţia are două rădacini reale ce coincid:

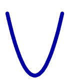
$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a}.$$

Dacă $\Delta < 0 \Rightarrow$ecuaţia nu are rădăcini reale, are două rădacini complexe conjugate:

$$x_1 = \frac{-b + \mathrm{j}\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ şi } x_2 = \frac{-b - \mathrm{j}\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Descompunerea în factori: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

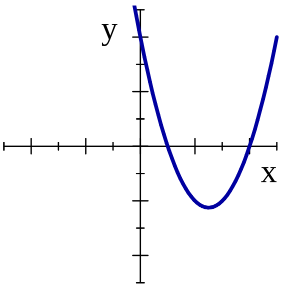
Graficul funcţiei f reprezintă *o parabolă* în plan.
Graficul intersectează axa Oy în punctul $(0, c)$.

$a > 0 \Rightarrow$ramuri în sus  ; $a < 0 \Rightarrow$ramuri în jos 

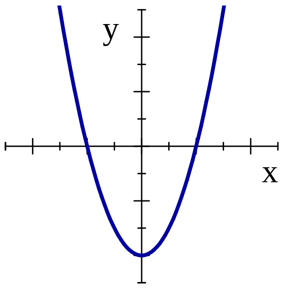
"Varful" $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

Dacă $\Delta > 0 \Rightarrow$ parabola intersectează axa Ox în două puncte: $(x_1, 0), (x_2, 0)$.

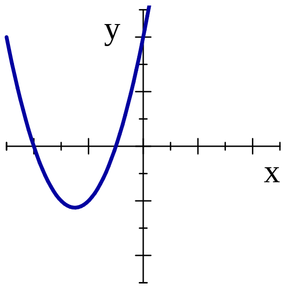
$f(x) = x^2 - 5x + 4$
$y = x^2 - 5x + 4$



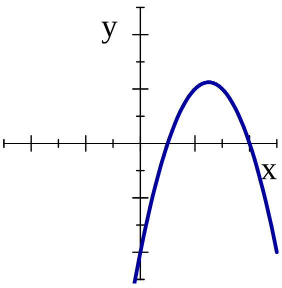
$f(x) = x^2 - 4$
$y = x^2 - 4$



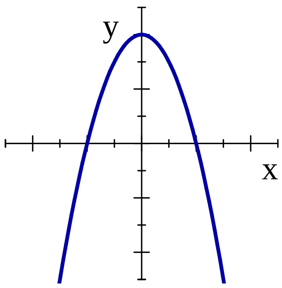
$f(x) = x^2 + 5x + 4$
$y = x^2 + 5x + 4$



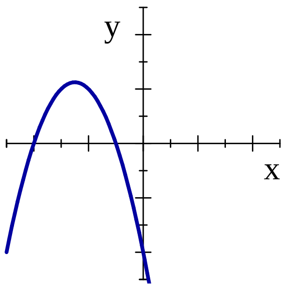
$f(x) = -x^2 + 5x - 4$
$y = -x^2 + 5x - 4$



$f(x) = -x^2 + 4$
$y = -x^2 + 4$

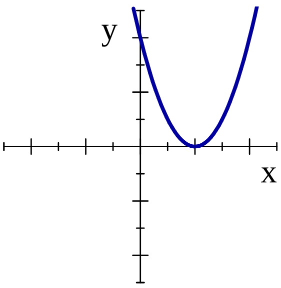


$f(x) = -x^2 - 5x - 4$
$y = -x^2 - 5x - 4$

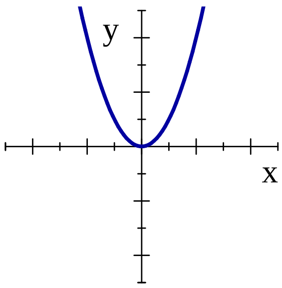


Dacă $\Delta = 0 \Rightarrow$ parabola intersectează axa Ox într-un singur punct: $(x_1, 0)$.

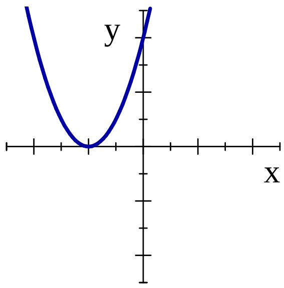
$f(x) = x^2 - 4x + 4$
$y = x^2 - 4x + 4$



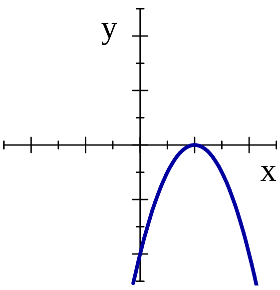
$f(x) = x^2$
$y = x^2$



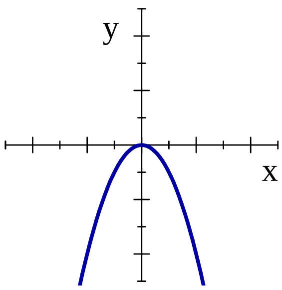
$f(x) = x^2 + 4x + 4$
$y = x^2 + 4x + 4$



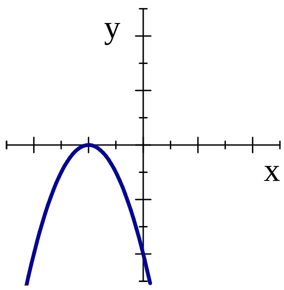
$f(x) = -x^2 + 4x - 4$
$y = -x^2 + 4x - 4$



$f(x) = -x^2$
$y = -x^2$

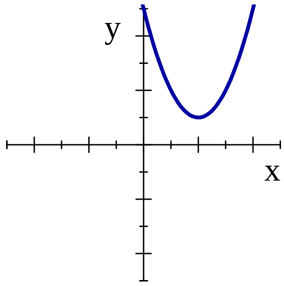


$f(x) = -x^2 - 4x - 4$
$y = -x^2 - 4x - 4$

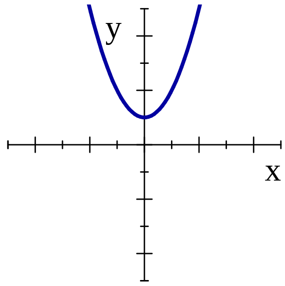


Dacă $\underline{\underline{\Delta < 0}}$⇒parabola nu intersectează axa Ox.

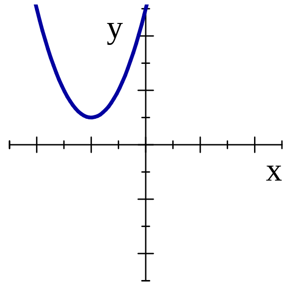
$f(x) = x^2 - 4x + 5$
$y = x^2 - 4x + 5$



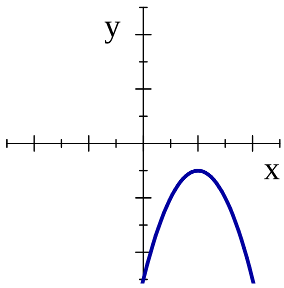
$f(x) = x^2 + 1$
$y = x^2 + 1$



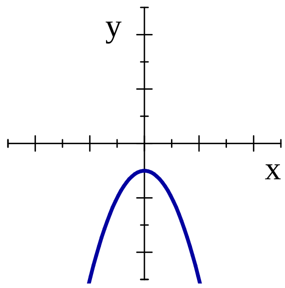
$f(x) = x^2 + 4x + 5$
$y = x^2 + 4x + 5$



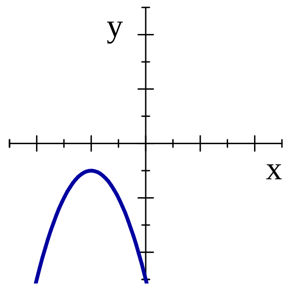
$f(x) = -x^2 + 4x - 5$
$y = -x^2 + 4x - 5$



$f(x) = -x^2 - 1$
$y = -x^2 - 1$



$f(x) = -x^2 - 4x - 5$
$y = -x^2 - 4x - 5$



Teorema 3. **(monotonie)** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a \in \mathbb{R}^*, b, c \in \mathbb{R}$.
Dacă $a > 0$ atunci f este strict descrescătoare pe $\left]-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$ şi strict crescătoare pe $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right[$.

În $x = \frac{-b}{2a}$ funcţia îşi atinge valoarea minimă $f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$.

Dacă $a < 0$ atunci f este strict crescătoare pe $\left]-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$ şi strict descrescătoare pe $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right[$.

În $x = \frac{-b}{2a}$ funcţia îşi atinge valoarea maximă $f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$.

Teorema 4. **(semn)** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a \in \mathbb{R}^*, b, c \in \mathbb{R}$.

Dacă $\Delta > 0$ atunci:

x	$-\infty$		x_1/x_2		x_2/x_1		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		semnul lui a	0	semn contrar lui a	0	semnul lui a	

Dacă $\Delta = 0$ atunci:

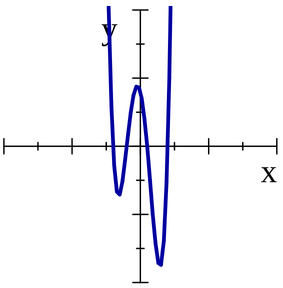
x	$-\infty$		$x_1 = x_2$		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		semnul lui a	0	semnul lui a	

Dacă $\Delta < 0$ atunci:

x	$-\infty$		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		semnul lui a	

$\boxed{n \geq 3}$

Ecuaţia de gradul al n-lea: -se rezolvă cu metode specifice pentru fiecare ecuaţie în parte.
Exemplu. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4$.



$(*)\, 2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4 = 0;$
$D_2 = \{\pm 1, \pm 2\}\,;$

$f(-1) = 0, f(2) = 0, f(-2) = 0 \Rightarrow f(x) \vdots (x+1), f(x) \vdots (x-2), f(x) \vdots (x+2) \Rightarrow$

$f(x) \vdots (x+1)(x-2)(x+2)\,.$

Se efectuează direct împărţirea

$\left(2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4\right) : \left(x^3 + x^2 - 4x - 4\right) = 2x - 1$

sau se foloseşte schema lui Horner şi se obţine

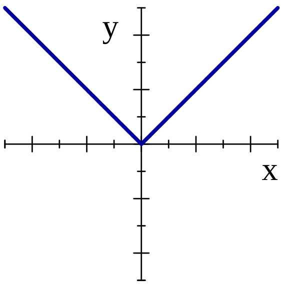
$$(*) \Leftrightarrow 2\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^1 (x+2)^1 (x+1)^1 (x-2)^1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2, m(x_1) = 1 \\ x_2 = -1, m(x_2) = 1 \\ x_3 = \frac{1}{2}, m(x_3) = 1 \\ x_4 = 2, m(x_4) = 1 \end{cases}$$

2°. Funcţia modul.

Definiţia 2. Se numeşte *funcţie modul* funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{dacă } x < 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ x, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

Graficul funcţiei f este reuniunea a două semidrepte.



Teorema 5. (monotonie) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|\,.$

Funcţia f este strict descrescătoare pe $]-\infty, 0]$ şi strict crescătoare pe $[0, +\infty[$.

În $x = 0$ funcţia îşi atinge valoarea minimă $f(0) = 0$.

Teorema 6. (semn) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$. Atunci

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\|x\|$		$+++$	0	$+++$	

3°. Funcţii raţionale.

Definiţia 3. Fie $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$ şi $b_0, ..., b_m \in \mathbb{R}, b_m \neq 0$. Se numeşte *funcţie raţională* funcţia

$$R = \frac{P}{Q} : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, R(x) = \frac{P}{Q}(x) = \frac{a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + ... + b_{m-1}x^{n-1} + b_m x^m}.$$

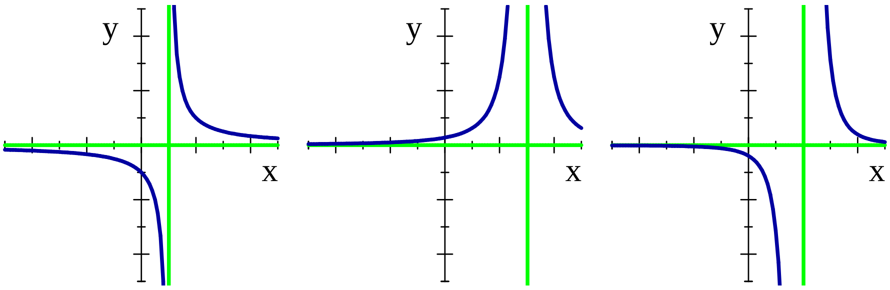
Observaţie. Sunt fracţii simple fracţiile de forma:

a) $\frac{A}{(x-a)^m}$, unde $A \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}^*$.

Exemple:

$f(x) = \frac{1}{(x-1)^1}$ $\quad$ $f(x) = \frac{e}{(x-3)^2}$ $\quad$ $f(x) = \frac{\pi}{(x-2)^3}$

$y = \frac{1}{(x-1)^1}$ $\quad$ $y = \frac{e}{(x-3)^2}$ $\quad$ $y = \frac{\pi}{(x-2)^3}$

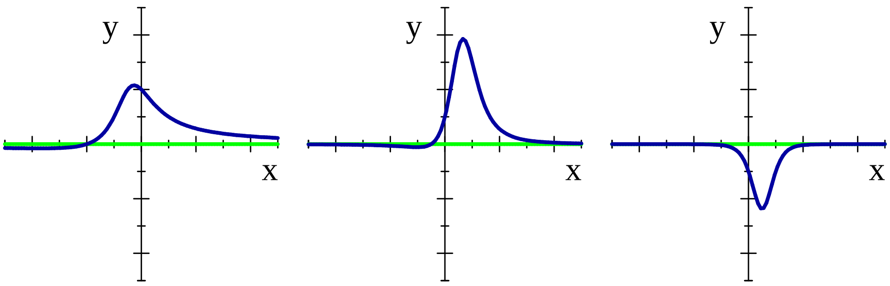


b) $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^m}$, unde $A, B \in \mathbb{R}$ cu $A^2 + B^2 \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$ cu $a \neq 0$ şi $\Delta < 0, m \in \mathbb{N}^*$.

Exemple:

$f(x) = \frac{x+2}{x^2+x+1}$ $\quad$ $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2-x+1)^2}$ $\quad$ $f(x) = \frac{-1}{(x^2-x+1)^3}$

$y = \frac{x+2}{x^2+x+1}$ $\quad$ $y = \frac{2x+1}{(x^2-x+1)^2}$ $\quad$ $y = \frac{-1}{(x^2-x+1)^3}$



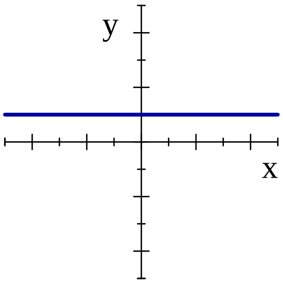
Monotonia şi **semnul** funcţiilor raţionale se studiază pentru fiecare exemplu, corespunzător.

4°. Funcţia putere

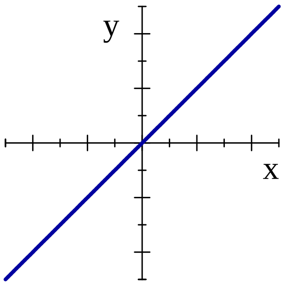
Definiţia 4. Fie $n \in \mathbb{N}$. Se numeşte *funcţie putere de exponent natural* n funcţia polinomială $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^n$.

Exemple:

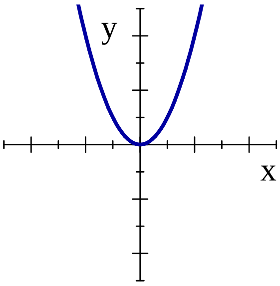
$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=1$
$y=1$



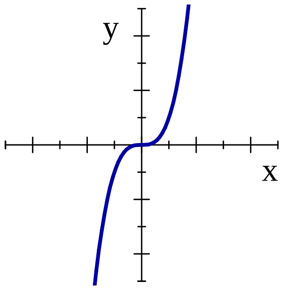
$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=x$
$y=x$



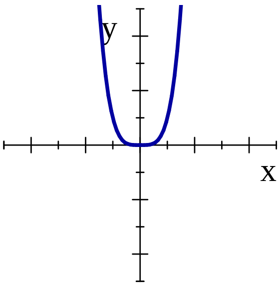
$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=x^2$
$y=x^2$



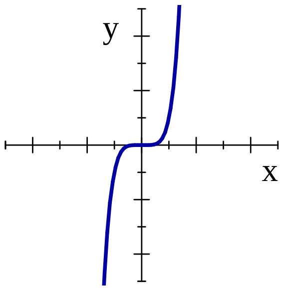
$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=x^3$
$y=x^3$



$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=x^4$
$y=x^4$



$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=x^5$
$y=x^5$



Teorema 7. **(monotonie)** Fie $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=x^n$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

Dacă n este par atunci f este strict descrescătoare pe $]-\infty,0]$ şi strict crescătoare pe $[0,+\infty[$.În $x=0$ funcţia îşi atinge valoarea minimă $f(0)=0$.

Dacă n este impar atunci f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Teorema 8. **(semn)** Fie $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=x^n$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

Dacă n este par, atunci:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^n		$+++$	0	$+++$	

Dacă n este impar, atunci:

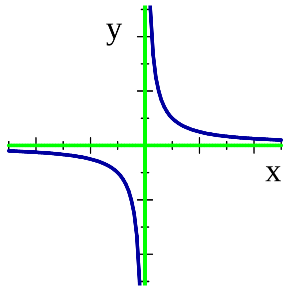
x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^n		$---$	0	$+++$	

Definiţia 5. Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Se numeşte *funcţie putere de exponent întreg negativ* n funcţia

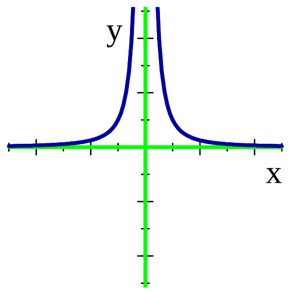
$f:\mathbb{R}^*\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=x^{-n}=(x^n)^{-1}=\dfrac{1}{x^n}$.

Exemple:

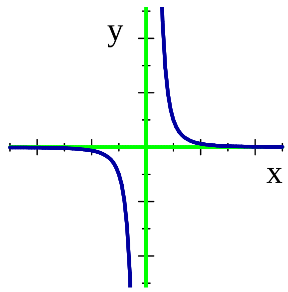
$$f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x}$$
$$y=\frac{1}{x}$$



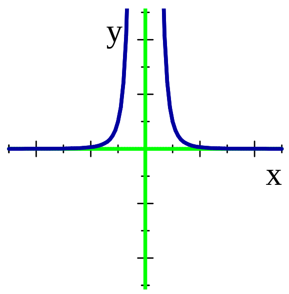
$$f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^2}$$
$$y=\frac{1}{x^2}$$



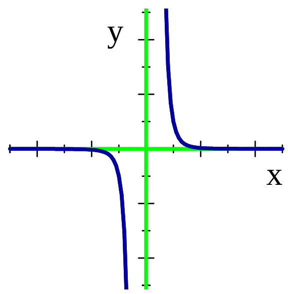
$$f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^3}$$
$$y=\frac{1}{x^3}$$



$$f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^4}$$
$$y=\frac{1}{x^4}$$



$$f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^5}$$
$$y=\frac{1}{x^5}$$



Teorema 9. **(monotonie)** Fie $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x)=x^{-n}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

Dacă n este par atunci f este strict crescătoare pe $]-\infty,0[$ şi strict descrescătoare pe $]0,+\infty[$.

Dacă n este impar atunci f este strict descrescătoare pe $]-\infty,0[$ şi strict descrescătoare pe $]0,+\infty[$.

Teorema 10. **(semn)** Fie $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x)=x^{-n}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

Dacă n este par, atunci:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^{-n}		$+++$	0	$+++$	

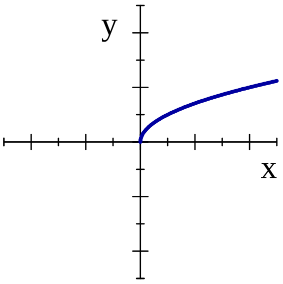
Dacă n este impar, atunci:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^{-n}		$---$	0	$+++$	

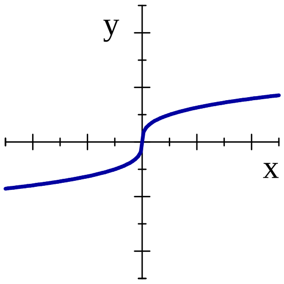
Definiţia 6. Fie $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

a) Dacă n este impar atunci se numeşte *funcţie radical de ordin impar* n funcţia
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$ definită astfel încât $x^{\frac{1}{n}}=y \Leftrightarrow x=y^n$.
b) Dacă n este par atunci se numeşte *funcţie radical de ordin par* n funcţia
$f:[0,+\infty[\,\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$ definită astfel încât $x^{\frac{1}{n}}=y \Leftrightarrow x=y^n$.
Graficul funcţiei f este simetric faţă de prima bisectoare cu graficul restricţiei funcţiei putere $f(x)=x^n, n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

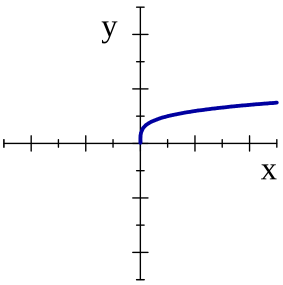
$f:[0,+\infty[\,\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x}$



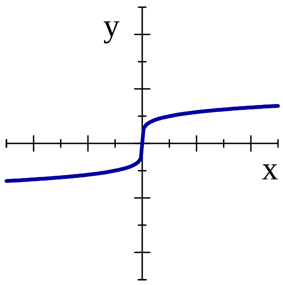
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x}$

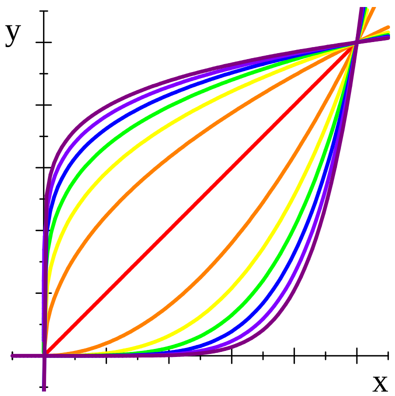


$f:[0,+\infty[\,\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[4]{x}$



$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[5]{x}$





Teorema 11. **(monotonie)** Fie $n\in\mathbb{N}^*$.
Dacă n este par atunci $f:[0,+\infty[\,\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[n]{x}$ este strict crescătoare pe $[0,+\infty[$.
Dacă n este impar atunci $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[n]{x}$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.
Teorema 12. **(semn)** Fie $n\in\mathbb{N}^*$.

Dacă n este par, atunci:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\sqrt[n]{x}$		$\vert\vert\vert$	0	$+++$	

Dacă n este impar, atunci:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\sqrt[n]{x}$		$---$	0	$+++$	

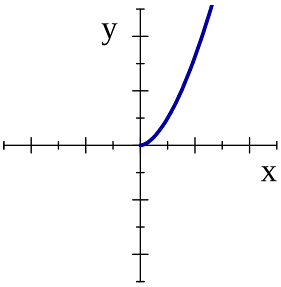
Observaţie. $\boxed{\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}}$

Definiţia 7. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Se numeşte *funcţie putere de exponent real* α funcţia

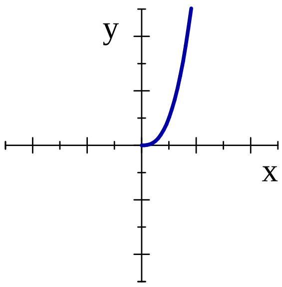
$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = x^\alpha$ ($y = x^\alpha$ se defineşte prin aproximare).

Grafice-exemple:

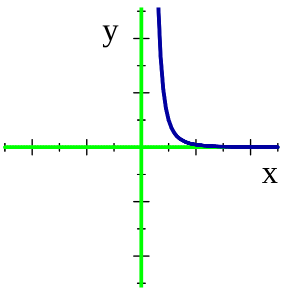
$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = x^{\sqrt{3}}$



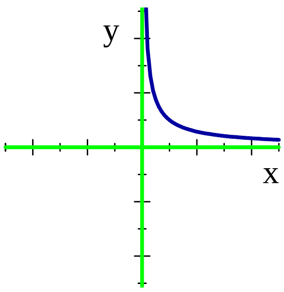
$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = x^e$



$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = x^{-\pi}$



$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = x^{-\frac{\sqrt{10}}{4}}$



Teorema 13. **(monotonie)** Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = x^\alpha$.

Dacă $\alpha > 0$ atunci f este strict crescătoare pe $]0, +\infty[$.

Dacă $\alpha < 0$ atunci f este strict descrescătoare pe $]0, +\infty[$.

Teorema 14. **(semn)** Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = x^\alpha$. Atunci:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^α		$\vert\vert\vert$	$\vert$	$+++$	

Propoziţia 1. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci:

a) $\forall x_1, x_2 \in]0, +\infty[: (x_1 \cdot x_2)^\alpha = x_1^\alpha \cdot x_2^\alpha$;**b)** $\forall x_1, x_2 \in]0, +\infty[: \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^\alpha = \frac{x_1^\alpha}{x_2^\alpha}$;

c) $\forall x_1, x_2 \in]0, +\infty[: x_1^\alpha = x_2^\alpha \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

5°. Funcţia exponenţială

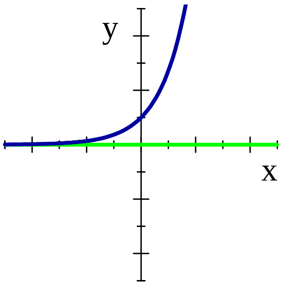
Definiţia 8. Fie $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$. Se numeşte *funcţie exponenţială de bază* a funcţia

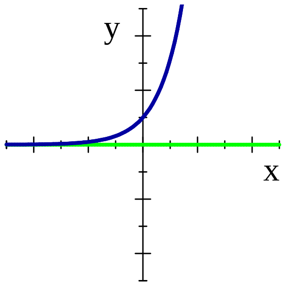
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a^x$.

($y = a^x$ se defineşte prin aproximare). Este funcţia utilizată în modelarea şi rezolvarea multor ecuaţii diferenţiale. A se vedea EDCO-semestrul al II-lea.

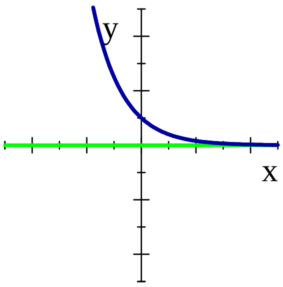
Grafice-exemple:

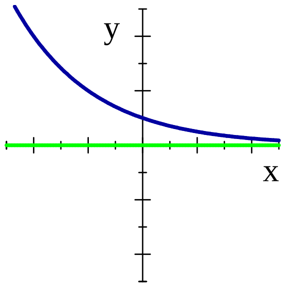
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{x}$ $\qquad$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\pi^{x}$





$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left(\frac{2}{5}\right)^{x}$ $\qquad$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{x}$





Teorema 15. **(monotonie)** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=a^{x}$, unde $a\in\mathbb{R}, a>0, a\neq 1$..

Dacă $a>1$ atunci f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Dacă $0<a<1$ atunci f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

Teorema 16. **(semn)** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=a^{x}$, unde $a\in\mathbb{R}, a>0, a\neq 1$. Atunci:

x	$-\infty$		$+\infty$
a^{x}		$+++$	

Propoziţia 2. Fie $a\in\mathbb{R}, a>0, a\neq 1$. Atunci:

a) $\forall x\in\mathbb{R}, a^{x}\neq 0$;**b)** $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}: a^{x_1+x_2}=a^{x_1}\cdot a^{x_2}$;**c)** $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}: a^{x_1-x_2}=\dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}}$;
d) $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}: a^{x_1\cdot x_2}=\left(a^{x_1}\right)^{x_2}=\left(a^{x_2}\right)^{x_1}$;**e)** $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}: a^{x_1}=a^{x_2}\Leftrightarrow x_1=x_2$.

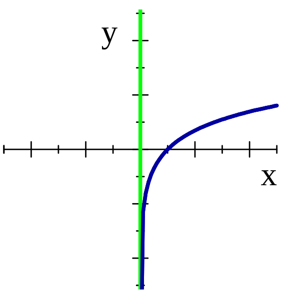
6°. Funcţia logaritmică

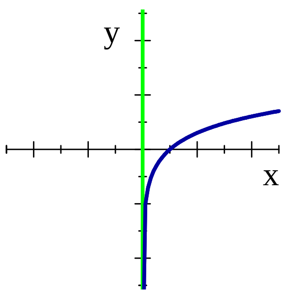
Definiţia 9. Fie $a\in\mathbb{R}, a>0, a\neq 1$. Se numeşte *funcţie logaritmică de bază a* funcţia

$f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}, f(x)=\log_a x$ $(y=\log_a x\Leftrightarrow a^{y}=x)$.

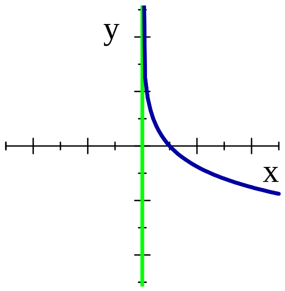
Graficul funcţiei f este simetric faţă de prima bisectoare cu graficul funcţiei exponenţiale de aceeaşi bază.

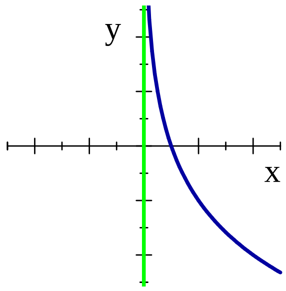
$f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x$ $\qquad$ $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}, f(x)=\log_{\pi} x$





$f:]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}, f(x)=\log_{\frac{2}{5}}x$ $\qquad$ $f:]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}, f(x)=\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}x$





Teorema 17. **(monotonie)** Fie $f:]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}, f(x)=\log_a x$, unde $a\in\mathbb{R}, a>0, a\neq 1$.
Dacă $a>1$ atunci f este strict crescătoare pe $]0,+\infty[$.
Dacă $0<a<1$ atunci f este strict descrescătoare pe $]0,+\infty[$.
Teorema 18. **(semn)** Fie $f:]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}, f(x)=\log_a x$, unde $a\in\mathbb{R}, a>0, a\neq 1$.

Dacă $a>1$ atunci:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\log_a x$		$- - -$	0	$+ + +$	

Dacă $0<a<1$ atunci:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\log_a x$		$+ + +$	0	$- - -$	

Propoziţia 3. Fie $a\in\mathbb{R}, a>0, a\neq 1$ şi $\alpha\in\mathbb{R}$. Atunci:
a) $\forall x_1,x_2\in\,]0,+\infty[\,:\log_a(x_1x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2$;
b) $\forall x_1,x_2\in\,]0,+\infty[\,:\log_a\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)=\log_a x_1-\log_a x_2$;
c) $\forall x\in\,]0,+\infty[\,:\log_a(x^\alpha)=\alpha\log_a x$;**d)** $\forall x\in\,]0,+\infty[\,:\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$;
e) $\forall x_1,x_2\in\,]0,+\infty[\,:\log_a x_1=\log_a x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$.
Propoziţia 4. Fie $a\in\mathbb{R}, a>0, a\neq 1$. Atunci:
a) $a^{\log_a x}=x,\forall x\in\,]0,+\infty[\,; e^{\ln x}=x,\forall x\in\,]0,+\infty[\,$;
b) $\log_a a^x=x,\forall x\in\mathbb{R}; \ln e^x=x,\forall x\in\mathbb{R}$.

7°. Funcţii trigonometrice şi funcţii hiperbolice

Definiţia 10. Se numesc *funcţii trigonometrice reale cosinus, sinus, cotangentă, tangentă, cosecantă, secantă* funcţiile (vezi Anexa 2):

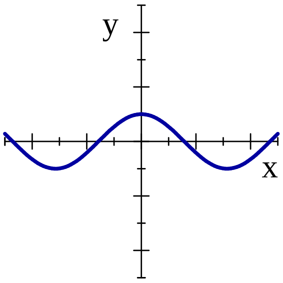
$f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_1(x)=\cos x$; $\qquad$ $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_2(x)=\sin x$;

$f_3:A_3\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_3(x)=\operatorname{ctg}x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$; $\qquad$ $f_4:A_4\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_4(x)=\operatorname{tg}x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$;

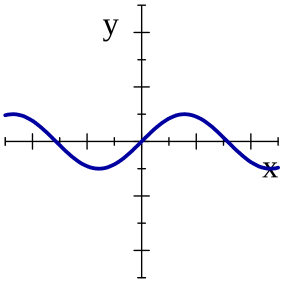
$f_5:A_3\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_5(x)=\operatorname{cosec}x=\dfrac{1}{\sin x}$; $\qquad$ $f_6:A_4\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_6(x)=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$;

unde $A_3=\mathbb{R}\setminus\{k\pi;k\in\mathbb{Z}\}, A_4=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$.
Funcţiile *cosecantă* şi *secantă* se numesc reciproce pentru sinus şi cosinus.
Grafice:

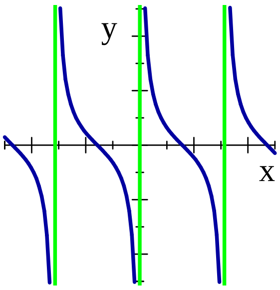
$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = \cos x$



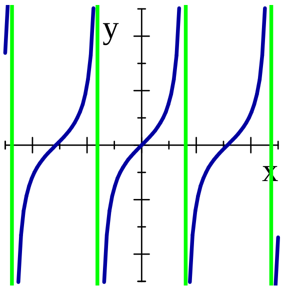
$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_2(x) = \sin x$



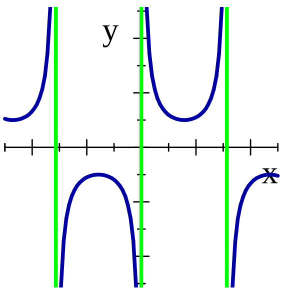
$f_3 : A_3 \to \mathbb{R}, f_3(x) = \operatorname{ctg} x$



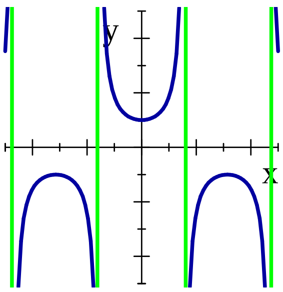
$f_4 : A_4 \to \mathbb{R}, f_4(x) = \operatorname{tg} x$:



$f_5 : A_3 \to \mathbb{R}, f_5(x) = \operatorname{cosec} x$



$f_6 : A_4 \to \mathbb{R}, f_6(x) = \sec x$



Definiţia 11. Se numesc *funcţii hiperbolice reale cosinus hipebolic, sinus hiperbolic, cotangentă hiperbolică, tangentă hiperbolică* funcţiile:

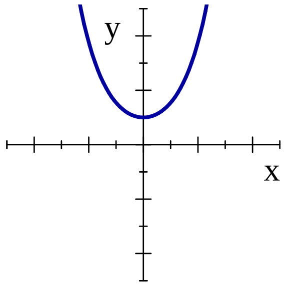
$f_7 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_7(x) = \boxed{\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}}$; $\quad f_8 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_8(x) = \boxed{\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}}$;

$f_9 : A_9 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_9(x) = \operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$; $\quad f_{10} : A_{10} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_{10}(x) = \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$;

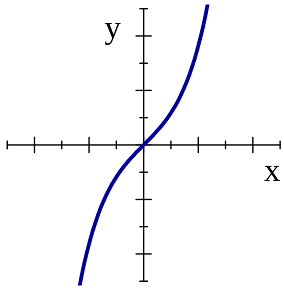
$A_9 = \{x \in \mathbb{R}; \operatorname{sh} x \neq 0\}, A_{10} = \{x \in \mathbb{R}; \operatorname{ch} x \neq 0\}.$

Grafice:

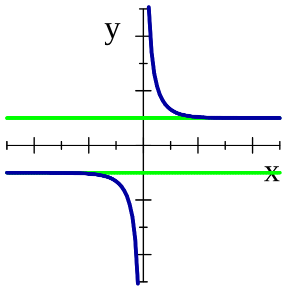
$f_7 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_7(x) = \operatorname{ch} x$



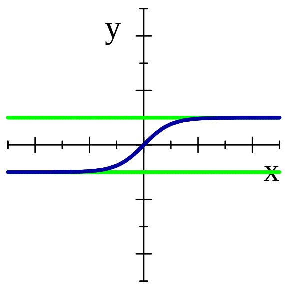
$f_8 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_8(x) = \operatorname{sh} x$



$f_9 : A_9 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_9(x) = \operatorname{cth} x$



$f_{10} : A_{10} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_{10}(x) = \operatorname{th} x$



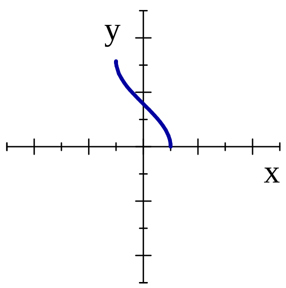
Propoziţia 5. **a)** $\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$;
b) $\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$;
$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$;
c) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \forall x \in \mathbb{R}; \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$;
d) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$;
e) $\operatorname{ch}(x_1 + x_2) = \operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} x_2 + \operatorname{sh} x_1 \operatorname{sh} x_2, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$;
$\operatorname{sh}(x_1 + x_2) = \operatorname{sh} x_1 \operatorname{ch} x_2 + \operatorname{ch} x_1 \operatorname{sh} x_2, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$;
f) $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x, \forall x \in \mathbb{R}; \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Definiţia 12. Se numesc *funcţii trigonometrice inverse reale arccosinus, arcsinus, arccotangentă, arctangentă, arccosecantă, arcsecantă* funcţiile (a se vedea Anexa 2):

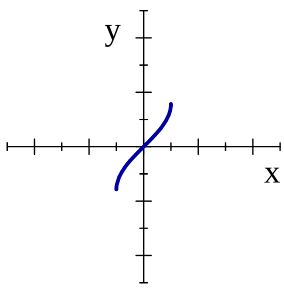
$f_1 : [-1, 1] \to \mathbb{R}, f_1(x) = \arccos x$; $f_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}, f_2(x) = \arcsin x$;
$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_3(x) = \operatorname{arcctg} x$; $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_4(x) = \operatorname{arctg} x$;
$f_5 : A_5 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_5(x) = \operatorname{arccosec} x$; $f_6 : A_6 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_6(x) = \operatorname{arcsec} x$.

Grafice:

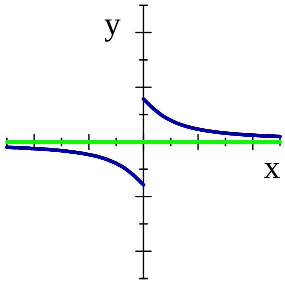
$f_1 : [-1, 1] \to \mathbb{R}, f_1(x) = \arccos x$



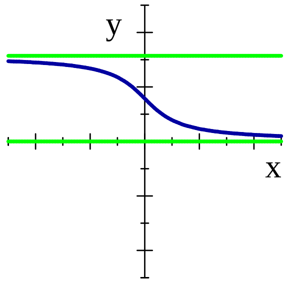
$f_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}, f_2(x) = \arcsin x$

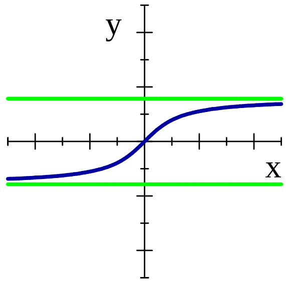


$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = \operatorname{arcctg} x$ $\qquad$ $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_4(x) = \operatorname{arctg} x$

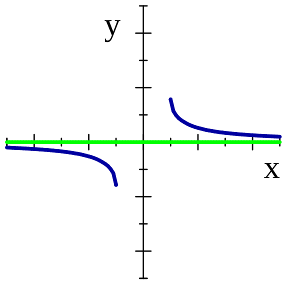


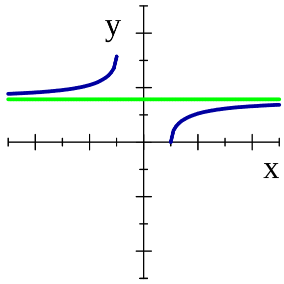
sau





$f_5 : A_5 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_5(x) = \operatorname{arccosec} x$ $\qquad$ $f_6 : A_6 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_6(x) = \operatorname{arcsec} x$





Definiţia 13. Se numesc *funcţii hiperbolice inverse reale* funcţiile:

$f_7 : [1, \infty[\to \mathbb{R}$, $f_7(x) = \operatorname{arcch} x = (\operatorname{ch})^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$;

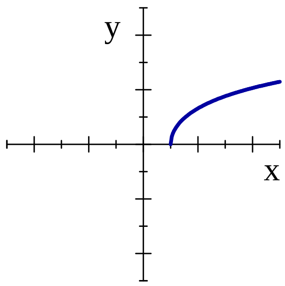
$f_8 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_8(x) = \operatorname{arcsh} x = (\operatorname{sh})^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$;

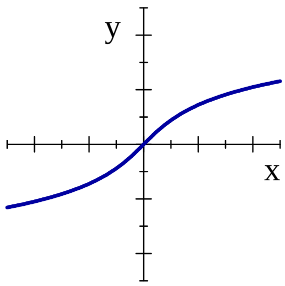
$f_9 : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_9(x) = \operatorname{arccth} x = (\operatorname{cth})^{-1} x$;

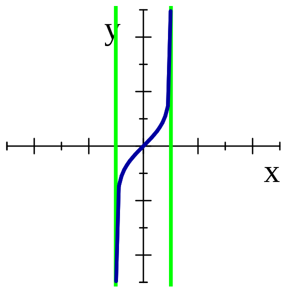
$f_{10} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$, $f_{10}(x) = \operatorname{arcth} x = (\operatorname{th})^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$.

Grafice:

$f_7 : [1, \infty[\to \mathbb{R}$, $f_7(x) = \operatorname{arcch} x$; $f_8 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_8(x) = \operatorname{arcsh} x$; $f_{10} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$, $f_{10}(x) = \operatorname{arcth} x$







Funcţii $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ elementare: funcţia polinomială, funcţia raţională, funcţia putere, funcţia radical, funcţia logaritm, funcţia exponenţială, funcţii trigonometrice, funcţii hiperbolice. Ecuaţii şi inecuaţii ataşate, sisteme de ecuaţii şi inecuaţii

De recapitulat din manualele de liceu.

Exerciţiul 1. Să se rezolve (să se scrie mulţimea tuturor soluţiilor) pentru:

a) $(*)\, 2x + 3 = 0.$

Rezolvare. $(*) \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = \dfrac{-3}{2}; S = \left\{\dfrac{-3}{2}\right\}.$

b) $(*)\, \pi x - e\sqrt{3} = 0.$

Rezolvare. $(*) \Leftrightarrow \pi x = e\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{e\sqrt{3}}{\pi}; S = \left\{\dfrac{e\sqrt{3}}{\pi}\right\}.$

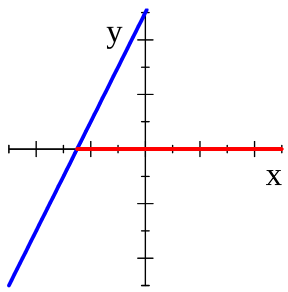
c) $(*)\, 2x = \ln 7.$

Rezolvare. $(*) \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 7}{2}; S = \left\{\dfrac{\ln 7}{2}\right\}.$

d) $(*)\, 2x + 5 > 0.$

Rezolvare. $(*) \Leftrightarrow 2x > -5 \Leftrightarrow x > \dfrac{-5}{2} \Leftrightarrow x \in \left]\dfrac{-5}{2}, +\infty\right[; S = \left]\dfrac{-5}{2}, +\infty\right[.$

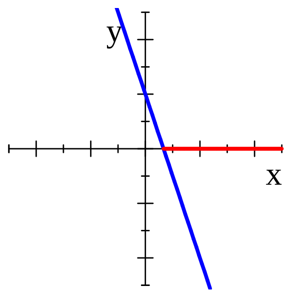
Se poate rezolva şi utilizând reprezentarea grafică a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 5$ (pentru ce x graficul este deasupra axei Ox) sau semnul funcţiei f.



e) $(*) - 3x + 2 \leq 0.$

Rezolvare. $(*) \Leftrightarrow -3x \leq -2 \Leftrightarrow 3x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x \in \left[\dfrac{2}{3}, +\infty\right[; S = \left[\dfrac{2}{3}, +\infty\right[.$

Se poate rezolva şi utilizând reprezentarea grafică a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 2$ (pentru ce x graficul este sub axa Ox reunit cu punctul de intersecţie cu axa Ox) sau semnul funcţiei f.



Exerciţiul 2. Să se rezolve (să se scrie mulţimea tuturor soluţiilor) pentru:

a) $(*)\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 3x-6<0 \end{cases}$

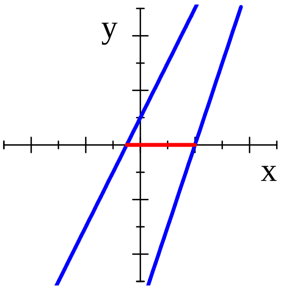
Rezolvare.

$2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{-1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\dfrac{-1}{2}, +\infty\right[; S_1 = \left[\dfrac{-1}{2}, +\infty\right[.$

$3x-6<0 \Leftrightarrow 3x<6 \Leftrightarrow x<2 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, 2\right[; S_2 = \left]-\infty, 2\right[.$

$S = S_1 \cap S_2 = \left[\dfrac{-1}{2}, +\infty\right[\cap \left]-\infty, 2\right[= \left[\dfrac{-1}{2}, 2\right[.$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x+1$	$-$	$---$	0	$+++$	$+$	$+++$	$-$
$3x-6$	$-$	$---$	$-$	$---$	0	$+++$	$-$
S			[	/////////	[		



Se poate rezolva şi utilizând reprezentarea grafică a

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = 2x+1$ şi $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2(x) = 3x-6$,

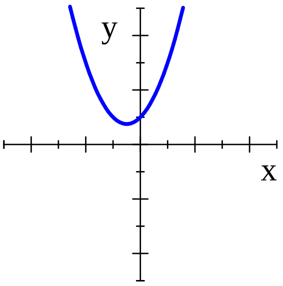
(pentru ce x, G_{f_1} este deasupra axei Ox reunit cu punctul de intersecţie cu axa Ox, simultan cu pentru ce x, G_{f2}este sub axa Ox) sau semnul funcţiilor f_1, f_2.

Exerciţiul 3. Să se determine următoarele mulţimi:

a) $A = \left\{x \in \mathbb{R}; x^2+x+1=0\right\};$

Rezolvare. $(*)\ x^2+x+1=0; \Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = -3 < 0 \Rightarrow$

$(*)$ nu are rădăcini reale$\Rightarrow A = \emptyset$.



Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2+x+1$ nu intersectează axa Ox.

b) $B = \left\{x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}; x^2+x+1=0\right\};$

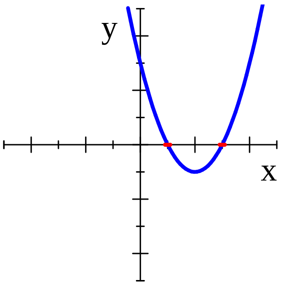
Rezolvare. $(*)\ x^2+x+1=0; \Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = -3 < 0 \Rightarrow$

$x_1 = \dfrac{-1+\mathrm{j}\sqrt{3}}{2\cdot 1}$ şi $x_2 = \dfrac{-1-\mathrm{j}\sqrt{3}}{2\cdot 1}; B = \left\{\dfrac{-1+\mathrm{j}\sqrt{3}}{2}, x_2 = \dfrac{-1-\mathrm{j}\sqrt{3}}{2}\right\}.$

c) $C = \left\{x \in \mathbb{R}; x^2-4x+3=0\right\};$

Rezolvare. $(*)\ x^2-4x+3=0; \Delta = 4^2 - 4\cdot 1\cdot 3 = 4 > 0 \Rightarrow$

$x_1 = \dfrac{4+\sqrt{4}}{2 \cdot 1}$ şi $x_2 = \dfrac{-4-\sqrt{4}}{2 \cdot 1}$.$C = \{3, 1\}$.



Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3$ intersectează axa Ox în punctele de abscise $x_1 = 3, x_2 = 1$.

d) $D = \left\{x \in \mathbb{R}; x^2 - 5x + 6 \geq 0\right\}$;

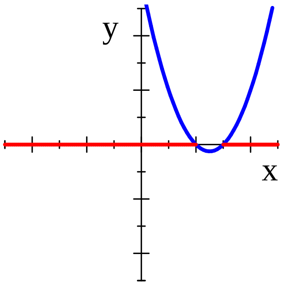
Rezolvare. $(*)$ $x^2 - 5x + 6 = 0; \Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1 > 0 \Rightarrow$

$x_1 = \dfrac{5+\sqrt{1}}{2 \cdot 1} = 3$ şi $x_2 = \dfrac{5-\sqrt{1}}{2 \cdot 1} = 2$.

Precizăm că $1 \cdot x^2 - 5x + 6 = 1 \cdot (x-2)(x-3)$.Precizăm că $a = 1 > 0$.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$		$+++$	0	$---$	0	$+++$	

$D = \left]-\infty, 2\right] \cup \left[3, +\infty\right[$.



Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 5x + 6$ este situat deasupra axei Ox şi intersectează axa Ox corespunzător punctelor cu abscisele $x \in \left]-\infty, 2\right] \cup \left[3, +\infty\right[$.

e) $E = \left\{x \in \mathbb{R}; x^2 + 2x - 4 < 0\right\}$;

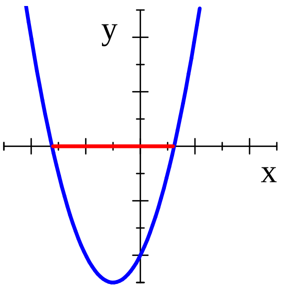
Rezolvare. $(*)$ $x^2 + 2x - 4 = 0; \Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 20 > 0 \Rightarrow$

$x_1 = \dfrac{-2+\sqrt{20}}{2 \cdot 1}$ şi $x_2 = \dfrac{-2+\sqrt{20}}{2 \cdot 1}$.

Precizăm că $a = 1 > 0$.

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{5}$		$-1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$x^2 + 2x - 4$		$+++$	0	$---$	0	$+++$	

$E = \left]-1-\sqrt{5}, -1+\sqrt{5}\right[$



Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x - 4$ este situat sub Ox corespunzător punctelor cu abscisele $x \in \left]-1 - \sqrt{5}, -1 + \sqrt{5}\right[$.

Exerciţiul 4. Să se rezolve (să se scrie toate soluţiile, precizând multiplicitatea lor algebrică) pentru:

a) $(*)\, x^3 - 2x + 1 = 0.$

Rezolvare. $f(x) = x^3 - 2x + 1$ este funcţie polinomială de gradul 3. Rezolvarea ecuaţiei $(*)$ este legată de descompunerea în factori a polinomului f ataşat funcţiei f.

modul 1. $(*) \Leftrightarrow x^3 - x - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - 1\right) - (x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)\left[x(x + 1) - 1\right] = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 1)\left(x^2 + x - 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, m(x_1) = 1 \\ x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, m(x_2) = 1 \\ x_3 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, m(x_3) = 1 \end{cases}$$

Precizăm că $f(x) = (x - 1)\left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

modul 2. Folosim:

Teorema împărţirii cu rest. Fie $P(X)$ şi $Q(X)$ două polinoame cu $\operatorname{grad} P \geq \operatorname{grad} Q$. Atunci $\exists K(X)$ un polinom şi $\exists R(X)$ un polinom cu $\operatorname{grad} R < \operatorname{grad} Q$ astfel încât

$P(X) = K(X) \cdot Q(X) + R(X)$.

Teorema Bezout. Fie $P(X)$ un polinom şi $a \in \mathbb{R}$(sau $\in \mathbb{C}$). Atunci restul împărţirii lui $P(X)$ la $X - a$, calculat în a, este şi $P(a)$.

Observaţie. Dacă a este rădăcină a $P(X)$ (adică $P(X)$ se împarte exact la $X - a$) atunci $P(a) = 0$ şi reciproc.

$f(x) = x^3 - 2x + 1.$

Cum coeficientul lui x^3 este $1 \Rightarrow$ se caută rădăcini întregi ale f printre divizorii termenului liber. $D_1 = \{\pm 1\}$.

$f(1) = 0 \Rightarrow 1$ este rădăcină a f.

$f(-1) = 2 \neq 0 \Rightarrow -1$ nu este rădăcină a f.

modul 2.1. Cu schema lui Horner.

	x^3	x^2	x^1	x^0
	1	0	-2	1
	x^2	x^1	x^0	
$x = 1$	1	1	-1	0

sau

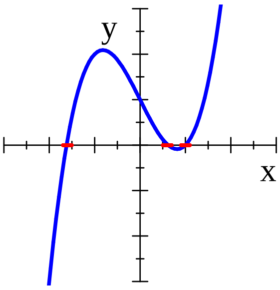
	x^3	x^2	x^1	x^0	
	1	0	-2	1	
$x = 1$		1	1	-1	0

$$(*)\, x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)\left(x^2 + x - 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, m(x_1) = 1 \\ x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, m(x_2) = 1 \\ x_3 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, m(x_3) = 1 \end{cases}$$

modul 2.2.

$$\begin{array}{l|l} x^3-2x+1 & \underline{x-1} \\ \underline{-x^3+x^2} & x^2+x-1 \\ /x^2-2x+1 & \\ \underline{-x^2+x} & \\ / \quad\quad -x+1 & \\ \quad\quad \underline{x-1} & \\ \quad\quad / \quad / & \end{array}$$

$$x^3-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x-1\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=1, m(x_1)=1 \\ x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, m(x_2)=1 \\ x_3=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, m(x_3)=1 \end{cases}$$



b) $(*)\, x^4-x^3-2x^2+6x-4=0$, ştiind că admite rădăcina $x_1=1+\mathrm{i}$.
Rezolvare. $f(x)=x^4-x^3-2x^2+6x-4$ este o funcţie polinomială de gradul 3, cu coeficienţi reali. Deoarece admite rădăcina complexă $x_1=1+\mathrm{i}$, atunci admite ca rădăcină şi conjugata ei, $x_2=1-\mathrm{i}$.

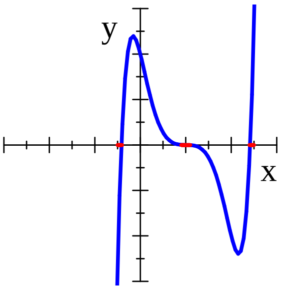
$f(x) \vdots (x-x_1)$ şi $f(x) \vdots (x-x_2) \Rightarrow f(x) \vdots (x-x_1)(x-x_2)$.
$(x-(1+\mathrm{i}))(x-(1-\mathrm{i}))=x^2-2x+2$.

$$\begin{array}{l|l} x^4-x^3-2x^2+6x-4 & \underline{x^2-2x+2} \\ \underline{-x^4+2x^3-2x^2} & x^2+x-2 \\ / \quad x^3-4x^2+6x-4 & \\ \quad \underline{-x^3+2x^2-2x} & \\ \quad\quad /-2x^2+4x-4 & \\ \quad\quad\quad \underline{2x^2-4x+4} & \\ \quad\quad\quad / \quad / \quad / & \end{array}$$

$$(*)\, x^4-x^3-2x^2+6x-4=0 \Leftrightarrow \left(x^2-2x+2\right)\left(x^2+x-2\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=1+\mathrm{i}, m(x_1)=1 \\ x_2=1-\mathrm{i}, m(x_2)=1 \\ x_3=1, m(x_3)=1 \\ x_4=-2, m(x_4)=1 \end{cases}$$

Exerciţiul 5. Să se determine un polinom cu coeficienţi întregi, de grad minim, ce admite rădăcinile $1+\sqrt{2}, 1+\mathrm{i}$ şi rădăcina triplă 1.
Propoziţie. Dacă $P(X)$ are coeficienţi întregi şi admite ca rădăcină numărul $a+b\sqrt{d}$, cu $a,b\in\mathbb{Z}$ şi $\sqrt{d}\notin\mathbb{Z}$ atunci $P(x)$ admite ca rădăcină şi numărul $a-b\sqrt{d}$.
Propoziţie. Dacă $P(X)$ are coeficienţi reali şi admite ca rădăcină numărul $a+b\,\mathrm{i}$, cu $a,b\in\mathbb{R}$ atunci $P(x)$ admite ca rădăcină şi numărul $a-b\,\mathrm{i}$.
Rezolvare. $P(X)$ are coeficienţi întregi şi admite ca rădăcină $x_1=1+\sqrt{2}\Rightarrow$admite ca rădăcină $x_2=1-\sqrt{2}$.

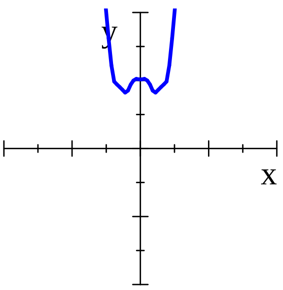
$P(X)$ are coeficienţi reali şi admite ca rădăcină $x_3 = 1 + \mathrm{i} \Rightarrow$admite ca rădăcină $x_4 = 1 - \mathrm{i}$.
Atunci un polinom de grad minim ce verifică cerinţele este
$P(X) = \left(X - \left(1+\sqrt{2}\right)\right)\left(X - \left(1-\sqrt{2}\right)\right)\left(X - (1+\mathrm{i})\right)\left(X - (1-\mathrm{i})\right)(X-1)^3 =$
$= \left(X^2 - 2X - 1\right)\left(X^2 - 2X + 2\right)\left(X^3 - 3X^2 + 3X - 1\right) =$
$= X^7 - 7X^6 + 20X^5 - 30X^4 + 23X^3 - 5X^2 - 4X + 2.$



Exerciţiul 6. Să se explicitaze funcţia
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \left|x^2 - 1\right| + \left|4 - x^2\right| + |x|$.
Rezolvare. Se utilizează
$$|u(x)| = \begin{cases} -u(x), & \text{dacă } u(x) < 0 \\ 0, & \text{dacă } u(x) = 0 \\ u(x), & \text{dacă } u(x) > 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$u_1(x) = x^2 - 1$		$+++$	$+$	$+++$	0	$---$	$-$	$---$	0	$+++$	$+$	$+++$	
$u_2(x) = 4 - x^2$		$---$	0	$+++$	$+$	$+++$	$+$	$+++$	$+$	$+++$	0	$---$	
$u_3(x) = x$		$---$	$-$	$---$	$-$	$---$	0	$+++$	$+$	$+++$	$+$	$+++$	

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} \left(x^2-1\right) - \left(4-x^2\right) - x, & \text{dacă } x \in \left]-\infty,-2\right[\\ 3+0+2, & \text{dacă } x = -2 \\ \left(x^2-1\right) + \left(4-x^2\right) - x, & \text{dacă } x \in \left]-2,-1\right[\\ 0+3+1, & \text{dacă } x = -1 \\ -\left(x^2-1\right) + \left(4-x^2\right) - x, & \text{dacă } x \in \left]-1,0\right[\\ 1+4+0, & \text{dacă } x = 0 \\ -\left(x^2-1\right) + \left(4-x^2\right) + x, & \text{dacă } x \in \left]0,1\right[\\ 0+3+1, & \text{dacă } x = 1 \\ \left(x^2-1\right) + \left(4-x^2\right) + x, & \text{dacă } x \in \left]1,2\right[\\ 3+0+2, & \text{dacă } x = 2 \\ \left(x^2-1\right) - \left(4-x^2\right) + x, & \text{dacă } x \in \left]2,+\infty\right[\end{cases} = \begin{cases} 2x^2 - x - 5, & \text{dacă } x \in \left]-\infty,-2\right[\\ 5, & \text{dacă } x = -2 \\ -x+3, & \text{dacă } x \in \left]-2,-1\right[\\ 4, & \text{dacă } x = -1 \\ -2x^2 - x + 3, & \text{dacă } x \in \left]-1,0\right[\\ 5, & \text{dacă } x = 0 \\ -2x^2 + x + 3, & \text{dacă } x \in \left]0,1\right[\\ 4, & \text{dacă } x = 1 \\ x+3, & \text{dacă } x \in \left]1,2\right[\\ 5, & \text{dacă } x = 2 \\ 2x^2 + x - 5, & \text{dacă } x \in \left]2,+\infty\right[\end{cases}.$$



Exerciţiul 7. Să se rezolve inecuaţia (să se scrie mulţimea tuturor soluţiilor) :

$(*)\ |x-2|+|x+1|+|3-x|\leq 5$

Rezolvare.

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$u_1(x)=x-2$		$---$	$-$	$---$	0	$+++$	$+$	$+++$	
$u_2(x)=x+1$		$---$	0	$+++$	$+$	$+++$	$+$	$+++$	
$u_3(x)=3-x$		$+++$	$+$	$+++$	$+$	$+++$	0	$---$	

Dacă $x\in\,]-\infty,-1[$ atunci

$(*)\Leftrightarrow-(x-2)-(x+1)+(3-x)\leq 5\Leftrightarrow -3x+4\leq 5\Leftrightarrow -3x\leq 1\Leftrightarrow x\geq\frac{-1}{3}$.

$S_1=\,]-\infty,-1[\,\cap\left[\frac{-1}{3},+\infty\right[\,=\emptyset$.

Dacă $x=-1$ atunci

$(*)\Leftrightarrow|-1-2|+|-1+1|+|3-(-1)|\leq 5\Leftrightarrow 3+0+4\leq 5-$fals.

$S_2=\emptyset$.

Dacă $x\in\,]-1,2[$ atunci

$(*)\Leftrightarrow-(x-2)+(x+1)+(3-x)\leq 5\Leftrightarrow -x+6\leq 5\Leftrightarrow -x\leq -1\Leftrightarrow x\geq 1$.

$S_3=\,]-1,2[\,\cap[1,+\infty[\,=[1,2[\,$.

Dacă $x=2$ atunci

$(*)\Leftrightarrow|2-2|+|2+1|+|3-2|\leq 5\Leftrightarrow 0+3+1\leq 5-$adevărat.

$S_4=\{2\}$.

Dacă $x\in\,]2,3[$ atunci

$(*)\Leftrightarrow+(x-2)+(x+1)+(3-x)\leq 5\Leftrightarrow x+2\leq 5\Leftrightarrow x\leq 3$.

$S_5=\,]2,3[\,\cap\,]-\infty,3]=\,]2,3[\,$.

Dacă $x=3$ atunci

$(*)\Leftrightarrow|3-2|+|3+1|+|3-3|\leq 5\Leftrightarrow 1+4+0\leq 5-$adevărat.

$S_6=\{3\}$.

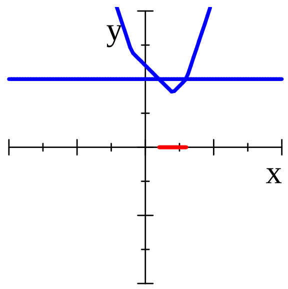
Dacă $x\in\,]3,+\infty[$ atunci

$(*)\Leftrightarrow+(x-2)+(x+1)-(3-x)\leq 5\Leftrightarrow 3x-4\leq 5\Leftrightarrow 3x\leq 9\Leftrightarrow x\leq 3$.

$S_7=\,]3,+\infty[\,\cap\,]-\infty,3]=\emptyset$.

Concluzie:

$S=S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4\cup S_5\cup S_6\cup S_7==\emptyset\cup\emptyset\cup[1,2[\,\cup\{2\}\cup\,]2,3[\,\cup\{3\}\cup\emptyset=[1,3]$.



Graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x-2|+|x+1|+|3-x|$ este situat sub dreapta de ecuaţie $y=5$ corespunzător punctelor cu abscisele $x\in[1,3]$.

Exerciţiul 8. Să se descompună următoarele fracţii în fracţii simple pe un interval $\mathbb{I}$ pe care fracţia este definită:

a) $f:\mathbb{I}\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x^2-9}$.

Rezolvare. $P(x)=1,\operatorname{grad}P=0.Q(x)=x^2-9,\operatorname{grad}Q=2.\operatorname{grad}P<\operatorname{grad}Q$.

$Q(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3, m(x_1) = 1 \\ x_2 = -3, m(x_2) = 1 \end{cases}$.

Se caută A, B a.î.$(*)$ $\dfrac{1}{x^2-9} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x+3}, \forall x \in \mathbb{I}$.

<u>modul 1.</u> -se aplică pentru orice fracţie, pentru găsirea tuturor coeficienţilor. Se aduc fracţiile din cei doi mebri ai egalităţii $(*)$ la acelaşi numitor, se elimină numitorul, apoi se identifică coeficienţii polinoamelor care apar.

$(*)\ \dfrac{1}{x^2-9} = \dfrac{^{x+3)}A}{x-3} + \dfrac{^{x-3)}B}{x+3}, \forall x \in \mathbb{I} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2-9} = \dfrac{A(x+3) + B(x-3)}{(x-3)(x+3)}, \forall x \in \mathbb{I} \Leftrightarrow$

$1 = A(x+3) + B(x-3), \forall x \in \mathbb{I} \Leftrightarrow \begin{matrix} x^1: \\ x^0: \end{matrix} \begin{cases} 0 = A + B \\ 1 = 3A - 3B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{6} \\ B = \frac{-1}{6} \end{cases}$

<u>modul 2.</u> -se aplică numai pentru găsirea coeficientului lui $\dfrac{1}{x-a}$, atunci când a este rădăcină reală simplă pentru $Q(x)$.

•pentru $A = ?$

$(*)|\cdot(x-3) \Rightarrow \dfrac{1}{x+3} = A + B\dfrac{x-3}{x+3}$

$x \to 3 \Rightarrow \frac{1}{6} = A + 0.$

•pentru $B = ?$

$(*)|\cdot(x+3) \Rightarrow \dfrac{1}{x-3} = A\dfrac{x+3}{x-3} + B$

$x \to -3 \Rightarrow \frac{1}{-6} = 0 + B.$

Concluzie: $\dfrac{1}{x^2-9} = \dfrac{\frac{1}{6}}{x-3} + \dfrac{\frac{-1}{6}}{x+3}, \forall x \in \mathbb{I}.$

b) $f : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{x^2+x-2}$.

Rezolvare.$P(x) = 1, \operatorname{grad} P = 0. Q(x) = x^2 + x - 2, \operatorname{grad} Q = 2. \operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q$.

$Q(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, m(x_1) = 1 \\ x_2 = -2, m(x_2) = 1 \end{cases}$.

Se caută A, B a.î.$(*)$ $\dfrac{1}{x^2+x-2} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+2}, \forall x \in \mathbb{I}$.

<u>modul 1.</u>$(*)\ \dfrac{1}{x^2+x-2} = \dfrac{^{x+2)}A}{x-1} + \dfrac{^{x-1)}B}{x+2}, \forall x \in \mathbb{I} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2+x-2} = \dfrac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)}, \forall x \in \mathbb{I} \Leftrightarrow$

$1 = A(x+2) + B(x-1), \forall x \in \mathbb{I} \Leftrightarrow \begin{matrix} x^1: \\ x^0: \end{matrix} \begin{cases} 0 = A + B \\ 1 = 2A - B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = \frac{-1}{3} \end{cases}$

<u>modul 2.</u>

•pentru $A = ?$

$(*)|\cdot(x-1) \Rightarrow \dfrac{1}{x+2} = A + B\dfrac{x-1}{x+2}$

$x \to 1 \Rightarrow \frac{1}{3} = A + 0.$

•pentru $B = ?$

$(*)|\cdot(x+2) \Rightarrow \dfrac{1}{x-1} = A\dfrac{x+2}{x-1} + B$

$x \to -2 \Rightarrow \frac{1}{-3} = 0 + B.$

Concluzie: $\dfrac{1}{x^2+x-2} = \dfrac{\frac{1}{3}}{x-1} + \dfrac{\frac{-1}{3}}{x+2}, \forall x \in \mathbb{I}.$

c) $f : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$.

Rezolvare.$P(x) = 1, \operatorname{grad} P = 0. Q(x) = x^3 + 1, \operatorname{grad} Q = 3. \operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q$.

$$Q(x)=0\Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-x+1\right)=0\Rightarrow\begin{cases} x_1=-1, m(x_1)=1\\ x_2=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}, m(x_2)=1\\ x_3=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, m(x_3)=1\end{cases}.$$

Se caută A,B,C a.î. $(*)\ \dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2-x+1},\forall x\in\mathbb{I}.$

<u>modul 1.</u> $(*)\ \dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{{}^{x^2-x+1)}A}{x+1}+\dfrac{{}^{x+1)}Bx+C}{x^2-x+1},\forall x\in\mathbb{I}\Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{A\left(x^2-x+1\right)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)},\forall x\in\mathbb{I}\Leftrightarrow$

$1=A\left(x^2-x+1\right)+B\left(x^2+x\right)+C(x+1),\forall x\in\mathbb{I}\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{l} x^2:\\ x^1:\\ x^0:\end{array}\begin{cases}0=A+B\\ 0=-A+B+C\\ 1=A\qquad +C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{3}\\ B=\frac{-1}{3}\\ C=\frac{2}{3}\end{cases}$$

<u>modul 2.</u>-se aplică doar parţial

•pentru $A=?$

$(*)|\cdot(x+1)\Rightarrow\dfrac{1}{x^2-x+1}=A+(Bx+C)\dfrac{x+1}{x^2-x+1}$

$x\to-1\Rightarrow\frac{1}{3}=A+0.$

•pentru $B,C=?$ se înlocuieşte A găsit în sistemul de la modul 1.

Concluzie: $\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{\frac{1}{3}}{x+1}+\dfrac{\frac{-1}{3}x+\frac{2}{3}}{x+2},\forall x\in\mathbb{I}.$

Exerciţiul 9. Să se determine domeniul maxim de definiţie pentru funcţiile:

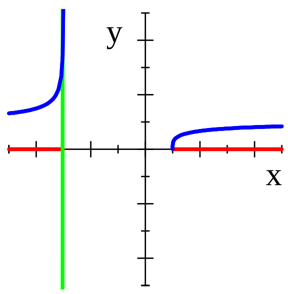
a) $f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+3}};$

Rezolvare.

$$C.E.\begin{cases}\dfrac{x-1}{x+3}\geq 0-\text{pentru radical de ordin par}\\ x+3\neq 0-\text{pentru fracţie}\end{cases}$$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$x-1$		$---$	$-$	$---$	0	$+++$	
$x+3$		$---$	0	$+++$	$+$	$+++$	
$\dfrac{x-1}{x+3}$		$+++$	$\vert$	$---$	0	$+++$	

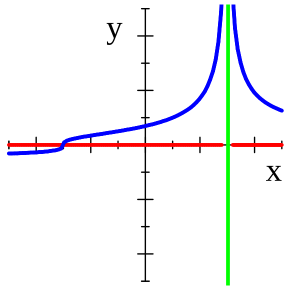
$D=\left]-\infty,-3\right[\cup\left[1,+\infty\right[.$



b) $f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{x^2-6x+9}};$

Rezolvare. $C.E.\begin{cases} \dfrac{x+3}{x^2-6x+9} - \text{pentru radical de ordin impar nu se impun } C.E. \\ x^2-6x+9 \neq 0 - \text{pentru fracţie} \end{cases}$

$D = \left]-\infty, 3\right[\cup \left]3, +\infty\right[.$

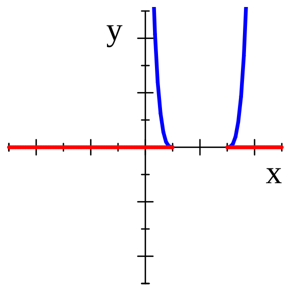


Exerciţiul 10. Să se determine domeniul maxim de definiţie pentru funcţia:

$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \left(x^2 - 4x + 3\right)^{\sqrt{7}};$

Rezolvare. $C.E.\left\{x^2 - 4x + 3 > 0 - \text{pentru funcţia putere de exponent real } \sqrt{7}\right.$

$D = \left]-\infty, 1\right[\cup \left]3, +\infty\right[.$



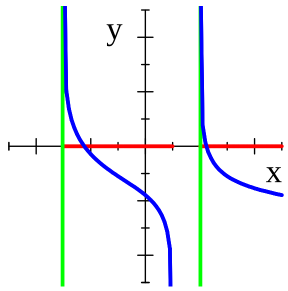
Exerciţiul 11. Să se determine domeniul maxim de definiţie pentru funcţia:

$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \ln \dfrac{x-1}{x^2+x-6};$

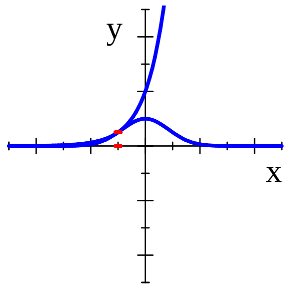
Rezolvare. $C.E.\begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2+x-6} > 0 - \text{pentru funcţia logaritm} \\ x^2+x-6 \neq 0 - \text{pentru fracţie} \end{cases}$

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$x-1$		$---$	$-$	$---$	0	$+++$	$+$	$+++$	
x^2+x-6		$+++$	0	$---$	$-$	$---$	0	$+++$	
$\dfrac{x-1}{x^2+x-6}$		$---$	$\vert$	$+++$	0	$---$	$\vert$	$+++$	

$D = \left]-3, 1\right[\cup \left]2, +\infty\right[.$



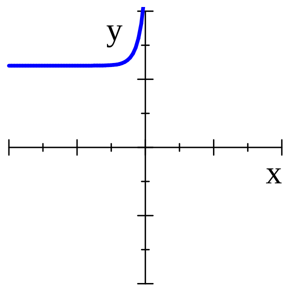
Exercițiul 12. Să se rezolve (să se scrie mulțimea tuturor soluțiilor) pentru:
a) $(*)\, 2^{2x+1} = 2^{-x^2}$.
Rezolvare. $(*) \overset{\text{funcţia exponenţială cu baza 2}}{\underset{\text{este injectivă}}{\Leftrightarrow}} 2x+1 = -x^2 \Leftrightarrow x = -1; S = \{-1\}$.



b) $(*)\, 7^{2x} + 5 \cdot 7^x + 6 = 0$.
Rezolvare. Se face substituția: $7^x = t, t > 0$.

$$(*) \Leftrightarrow t^2 + 5t + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -2 \\ t_2 = -3 \end{cases}$$

Se revine la substituție: $\begin{cases} 7^x = -2 < 0 - \text{imposibil} \\ 7^x = -3 < 0 - \text{imposibil} \end{cases} \Rightarrow S = \emptyset.$

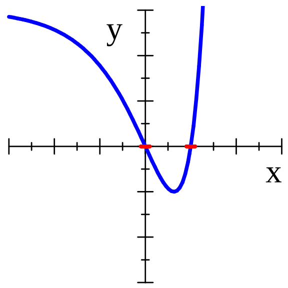


c) $(*)\, 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$.
Rezolvare. Se face substituția: $3^x = t, t > 0$.

$$(*) \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 3 \end{cases}$$

Se revine la substituție:

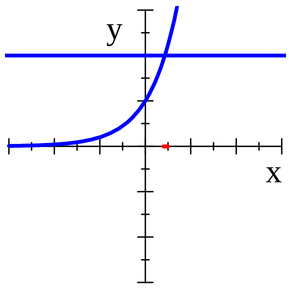
$$\begin{cases} 3^x = 1 \\ 3^x = 3 \end{cases} \overset{\text{funcţia exponenţială cu baza 3}}{\underset{\text{este injectivă}}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow S = \{0, 1\}.$$



d) $(*)\, 5^x = 2$

Rezolvare. modul 1 $(*) \Leftrightarrow x = \log_5 2; S = \{\log_5 2\}$.

modul 2 $(*)| \Leftrightarrow \ln 5^x = \ln 2 \Leftrightarrow x \ln 5 = \ln 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 2}{\ln 5}; S = \left\{\dfrac{\ln 2}{\ln 5}\right\}$.



e) $(*)\, 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 7^x + 7^{x+1} + 7^{x+2}$.

Rezolvare. $(*) \Leftrightarrow 5^x\left(1+5+5^2\right) = 7^x\left(1+7+7^2\right) \Leftrightarrow 5^x \cdot 31 = 7^x \cdot 57 \Leftrightarrow$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^x = \frac{57}{31}\Big|\ln \Leftrightarrow \ln\left(\frac{5}{7}\right)^x = \ln\frac{57}{31} \Leftrightarrow x\ln\left(\frac{5}{7}\right) = \ln\frac{57}{31} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\ln 57 - \ln 31}{\ln 5 - \ln 7}; S = \left\{\frac{\ln 57 - \ln 31}{\ln 5 - \ln 7}\right\}.$$

f) $(*)\, 2^{20x+1} < 64$.

Rezolvare. $(*) \Leftrightarrow 2^{20x+1} < 2^6 \underset{\text{este strict crescătoare}}{\overset{\text{f. exponenţială de bază } a=2>1}{\Leftrightarrow}} 20x+1 < 6 \Leftrightarrow x < \dfrac{5}{20} \Leftrightarrow$

$$x \in \left]-\infty, \frac{1}{4}\right[\Leftrightarrow S = \left]-\infty, \frac{1}{4}\right[.$$

g) $(*)\, 4^x - 2\cdot 5^{2x} < 10^x$.

Rezolvare. $(*) \Leftrightarrow 2^{2x} - 2\cdot 5^{2x} < 2^x \cdot 5^x \big| : 5^{2x} \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{5}\right)^{2x} - \left(\dfrac{2}{5}\right)^x - 2 < 0.$

Notând $u = \left(\dfrac{2}{5}\right)^x$, $u > 0$, inecuaţia devine $u^2 - u - 2 < 0 \Leftrightarrow u \in \left]-1, 2\right[$.

Deci $u \in \left]0, +\infty\right[\cap \left]-1, 2\right[= \left]0, 2\right[$.

Se revine la substituţie $0 < u < 2 \Leftrightarrow 0 < \left(\dfrac{2}{5}\right)^x < 2$.

- $0 < \left(\dfrac{2}{5}\right)^x \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow S_1 = \mathbb{R}$.
- $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x < 2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{5}\right)^x < \left(\dfrac{2}{5}\right)^{\log_{\frac{2}{5}} 2} \underset{\text{este strict descrescătoare}}{\overset{\text{f. exponenţială de bază } a=\frac{2}{5}<1}{\Leftrightarrow}}$

$x > \log_{\frac{2}{5}} 2 \Leftrightarrow x \in \left]\log_{\frac{2}{5}} 2, +\infty\right[\Leftrightarrow S_2 = \left]\log_{\frac{2}{5}} 2, +\infty\right[.$

$S = S_1 \cap S_2 = \left]\log_{\frac{2}{5}} 2, +\infty\right[.$

Exercițiul 13. Să se rezolve (să se scrie mulțimea tuturor soluțiilor) pentru:

a) $(*) \log_{x+4}\left(x^2 - 1\right) = \log_{x+4}(5 - x)$.

Rezolvare. Se determină D_E, domeniul maxim de studiu.

$$C.E. \begin{cases} x^2 - 1 > 0 - \text{pentru funcţia logaritm} \\ 5 - x > 0 - \text{pentru funcţia logaritm} \\ x + 4 > 0, x + 4 \neq 1 - \text{pentru funcţia logaritm} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\\ x \in]-\infty, 5[\\ x \in]-4, -3[\cup]-3, +\infty[\end{cases}$$

$D_E =]-4, -3[\cup]-3, -1[\cup]1, 5[.$

$$(*) \underset{\text{este injectivă}}{\overset{\text{funcţia logaritm cu baza } x+4}{\Leftrightarrow}} x^2 - 1 = 5 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \notin D_E \\ x_2 = 2 \in D_E \end{cases}$$

$S = \{2\}.$

b) $(*) \log_3\left(\dfrac{1 + 2x}{1 + x}\right) < 1.$

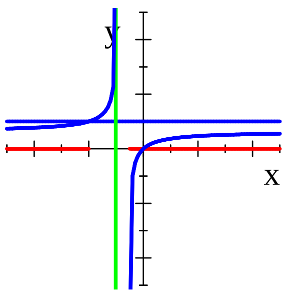
Rezolvare. $$C.E. \begin{cases} \dfrac{1 + 2x}{1 + x} > 0 - \text{pentru funcţia logaritm} \\ 1 + x \neq 0 - \text{pentru funcţia raţională} \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\ x \in]-\infty, -1[\cup \left]\tfrac{-1}{2}, +\infty\right[\right.$$

$D_E =]-\infty, -1[\cup \left]\frac{-1}{2}, +\infty\right[$

$$(*) \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{1 + 2x}{1 + x}\right) < \log_3 3 \underset{\text{este strict crescătoare}}{\overset{\text{f. logaritmică de bază } a=3>1}{\Leftrightarrow}} \frac{1 + 2x}{1 + x} < 3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1 + 2x - 3 - 3x}{1 + x} < 0 \Leftrightarrow \frac{-x - 2}{1 + x} < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]-1, +\infty[.$$

$S = D_E \cap (]-\infty, -2[\cup]-1, +\infty[) =]-\infty, -2[\cup \left]\frac{-1}{2}, +\infty\right[$



Exercițiul 14. Să se rezolve (să se scrie mulțimea tuturor soluțiilor) pentru:

a) $(*) \sin x = 0, x \in [0, 2\pi]$.
$S = \{0, \pi, 2\pi\}$.

b) $(*) \cos x = \frac{1}{2}, x \in [0, \pi]$.
$S = \left\{\frac{\pi}{3}\right\}$

c) $(*) \operatorname{tg} x \leq 1, x \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
$S = \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.