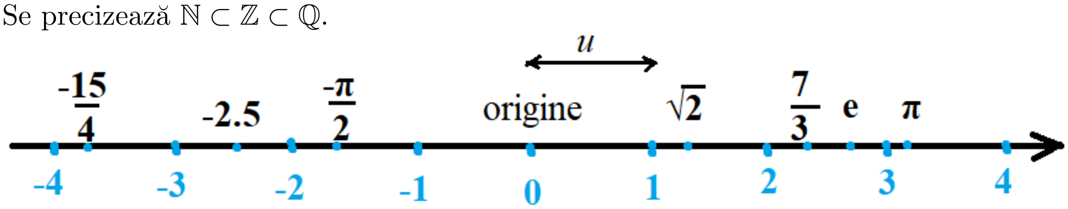
CURS NR. 1
Analiză matematică, AIA

CALCUL DIFERENŢIAL

1. Mulţimile $\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}$

1.1. $\mathbb{R} = (\mathbb{X}, +, \cdot, \leq, CD)$, $\overline{\mathbb{R}}$ (structura algebrică şi de ordine)

Se consideră cunoscute:
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$ mulţimea numerelor naturale;
$\mathbb{Z} = \{..., -n, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., n, ...\}$ mulţimea numerelor întregi;
$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ mulţimea numerelor raţionale.
Se precizează $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.



Din considerente practice, este necesar să se introducă o mulţime mai amplă decât $\mathbb{Q}$, în sensul incluziunii (de exemplu lungimea diagonalei unui pătrat cu latura de lungime 1 nu este un număr raţional, nu se poate exprima ca $\frac{m}{n}$ cu $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$).

Se defineşte axiomatic această nouă mulţime, care se va nota $\mathbb{R}$ şi se va numi mulţimea numerelor reale.

Definiţia 1.1.1. Fie $\mathbb{X} \neq \emptyset$ o mulţime. Se numeşte *corp comutativ total ordonat* cvadrupla ordonată $(\mathbb{X}, +, \cdot, \leq)$ unde

$+ : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}, \forall (x, y) \in \mathbb{X}^2, (x, y) \rightsquigarrow x + y$

este o operaţie internă pe $\mathbb{X}$ (numită *adunare*) şi

$\cdot : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}, \forall (x, y) \in \mathbb{X}^2, (x, y) \rightsquigarrow x \cdot y$

este o operaţie internă pe $\mathbb{X}$ (numită *înmulţire*),

$\leq$

este o relaţie pe $\mathbb{X}$ (dacă scriem $x \leq y$ spunem că x *este mai mic sau egal decât* y),
ce verifică axiomele:
(i) (GA_1) $\forall (x, y, z) \in \mathbb{X}^3 : (x + y) + z = x + (y + z)$
(axioma de asociativitate pentru adunare);
(GA_2) $\exists 0 \in \mathbb{X}$ (numit *zero*) astfel încât

$\forall x \in \mathbb{X} : x + 0 = 0 + x = x$

(axioma de existenţă a elementului neutru pentru adunare);
(GA_3) $\forall x \in \mathbb{X}, \exists (-x) \in \mathbb{X}$ (numit *opusul elementului* x) astfel încât

$x + (-x) = (-x) + x = 0$

(axioma de existenţă pentru orice element a elementului simetrizabil relativ la adunare);
(GA_4) $\forall (x, y) \in \mathbb{X}^2 : x + y = y + x$
(axioma de comutativitate pentru adunare);
adică $(\mathbb{X}, +)$ este grup abelian.

(ii) (GM_1) $\forall (x, y, z) \in \mathbb{X}^3 : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
(axioma de asociativitate pentru înmulţire);
(GM_2) $\exists 1 \in \mathbb{X}$ (numit *unu*) astfel încât
$\forall x \in \mathbb{X} : x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
(axioma de existenţă a elementului neutru pentru înmulţire);
(GM_3) $\forall x \in \mathbb{X} \setminus \{0\}, \exists x^{-1} \in \mathbb{X} \setminus \{0\}$ (numit *inversul elementului diferit de zero* x) astfel încât
$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$
(axioma de existenţă pentru orice element diferit de zero a elementului simetrizabil relativ la înmulţire);
(GM_4) $\forall (x, y) \in \mathbb{X}^2 : x \cdot y = y \cdot x$
(axioma de comutativitate pentru înmulţire);
(iii) (D) $\forall (x, y, z) \in \mathbb{X}^3 : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
(axioma de distributivitate a înmulţirii faţă de adunare; asigură compatibilitatea între operaţiile interne de adunare şi înmulţire);
(iv) (O_1) $\forall x \in \mathbb{X} : x \leq x$
(axioma de reflexivitate pentru relaţia de ordine);
(O_2) $\forall (x, y, z) \in \mathbb{X}^3 : x \leq y$ şi $y \leq z \Rightarrow x \leq z$
(axioma de tranzitivitate pentru relaţia de ordine);
(O_3) $\forall (x, y) \in \mathbb{X}^2 : x \leq y$ şi $y \leq x \Rightarrow x = y$
(axioma de antisimetrie pentru relaţia de ordine);
adică $\leq$ este o relaţie de ordine pe $\mathbb{X}$.
(v) (O_4) $\forall (x, y) \in \mathbb{X}^2 : x \leq y$ sau $y \leq x$.
(axioma de totală ordine pentru relaţia de ordine);
(vi) (O_5) $\forall (x, y, z) \in \mathbb{X}^3 : x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
(axioma de compatibilitate a relaţiei de ordine cu adunarea);
(O_6) $\forall (x, y, z) \in \mathbb{X}^3 : [x \leq y$ şi $0 \leq z] \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$
(axioma de compatibilitate a relaţiei de ordine cu înmulţirea).

Notaţiile 1.1.1. Fie $(\mathbb{X}, +, \cdot, \leq)$ un corp comutativ total ordonat. Atunci

$\forall (x, y) \in \mathbb{X}^2 : x + (-y) \overset{\text{se notează}}{=} x - y$ (*scădere*);

$\forall x \in \mathbb{X} \setminus \{0\} : x^{-1} \overset{\text{se notează}}{=} \dfrac{1}{x}$;

$\forall (x, y) \in \mathbb{X} \times (\mathbb{X} \setminus \{0\}) : x \cdot \left(y^{-1}\right) \overset{\text{se notează}}{=} \dfrac{x}{y} \overset{\text{se notează}}{=} x : y$ (*împărţire*);

$\forall x \in \mathbb{X} : x^n \overset{\text{se notează}}{=} \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ ori}}$(*ridicarea la putere* naturală)$, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

Nu se atribuie nici un sens pentru 0^0.

$\forall (x, y) \in \mathbb{X}^2$: dacă $x \leq y$ se notează cu $y \geq x$ (dacă se scrie $y \geq x$ atunci se spune că y *este mai mare sau egal cu* x);

$\forall (x, y) \in \mathbb{X}^2$: dacă $x \leq y$ şi $x \neq y$ se notează cu $x < y$ (dacă se scrie $x < y$ atunci se spune că x *este mai mic strict decât* y);

$\forall (x, y) \in \mathbb{X}^2$: dacă $y \geq x$ şi $x \neq y$ se notează cu $y > x$ (dacă se scrie $y > x$ atunci se spune că y *este mai mare strict decât* x);

Propoziţia 1.1.1. Fie $(\mathbb{X}, +, \cdot, \leq)$ un corp comutativ total ordonat. Atunci
(P_1) $\forall x \in \mathbb{X} : x \cdot 0 = 0$;
(P_2) $\forall x \in \mathbb{X} : (-1) \cdot x = -x$;
(P_3) $\forall (x, y, z) \in \mathbb{X}^3 : x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z$;

(P_4) $\forall (x,y) \in \mathbb{X}^2 : x \cdot y = 0 \Leftrightarrow (x = 0$ sau $y = 0)$
($\mathbb{X}$ nu are divizori ai lui zero);
(P_5) $\forall (x,y) \in \mathbb{X}^2 : x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x$;
(P_6) $\forall (x,y) \in \mathbb{X}^2 : 0 < x \leq y \Leftrightarrow \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{x}$;
(P_7) $\forall x \in \mathbb{X} : 0 \leq x^2$;
(P_8) $\forall (x,y) \in \mathbb{X}^2 : x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x = 0$ şi $y = 0)$.
Observaţia 1.1.1. Deoarece şi $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ verifică toate axiomele de corp comutativ total ordonat, rezultă că aceste axiome nu sunt suficiente pentru a introduce $\mathbb{R}$.
Definiţia 1.1.2. Fie $(\mathbb{X}, +, \cdot, \leq)$ un corp comutativ total ordonat şi $A \subseteq \mathbb{X}$ o submulţime nevidă.
a) Mulţimea A se numeşte *minorată* (*mărginită inferior*) dacă
$\exists x \in \mathbb{X}$ a.î. $x \leq a, \forall a \in A$,
iar elementul $x \in \mathbb{X}$, dacă există, se numeşte *minorant* pentru mulţimea A. Se notează cu $A_{\leq}$ mulţimea tuturor minoranţilor mulţimii A.
b) Mulţimea A se numeşte *majorată* (*mărginită superior*) dacă
$\exists y \in \mathbb{X}$ a.î. $a \leq y, \forall a \in A$,
iar elementul $y \in \mathbb{X}$, dacă există, se numeşte *majorant* pentru mulţimea A. Se notează cu $A_{\geq}$ mulţimea tuturor majoranţilor mulţimii A.
c) Mulţimea A se numeşte *mărginită* dacă este şi minorată şi majorată, adică
$\exists (x,y) \in \mathbb{X}^2$ a.î. $x \leq a \leq y, \forall a \in A$.
Propoziţia 1.1.2. Fie $(\mathbb{X}, +, \cdot, \leq)$ un corp comutativ total ordonat. Fie $A \subseteq \mathbb{X}$ o submulţime nevidă.
a) Dacă x este un minorant pentru mulţimea A atunci orice element mai mic decât x este un minorant pentru mulţimea A.
b) Dacă y este un majorant pentru mulţimea A atunci orice element mai mare decât y este un majorant pentru mulţimea A.
Definiţia 1.1.3. Fie $(\mathbb{X}, +, \cdot, \leq)$ un corp comutativ total ordonat şi fie $A \subseteq \mathbb{X}$ o submulţime nevidă.
a) Cel mai mare minorant pentru A, dacă există în $\mathbb{X}$, se numeşte *margine inferioară*, notată $\inf A$. Dacă $\inf A \in A$ atunci marginea inferioară se numeşte *minimul lui* A şi se notează $\min A$.
b) Cel mai mic majorant pentru A, dacă există în $\mathbb{X}$, se numeşte *margine superioară*, notată $\sup A$. Dacă $\sup A \in A$ atunci marginea superioară se numeşte *maximul lui* A şi se notează $\max A$.
Propoziţia 1.1.3. Fie $(\mathbb{X}, +, \cdot, \leq)$ un corp comutativ total ordonat şi $A \subseteq \mathbb{X}$ o submulţime nevidă.
a) Dacă există, marginea inferioară $\inf A$ este unică.
b) Dacă există, marginea superioară $\sup A$ este unică.
Observaţia 1.1.2. Fie $(\mathbb{X}, +, \cdot, \leq)$ un corp comutativ total ordonat şi $A \subseteq \mathbb{X}$ o submulţime nevidă majorată. Se pune problema dacă în mulţimea majoranţilor există un majorant care să fie cel mai mic? Pe baza axiomelor de corp comutativ total ordonat nu se poate da un răspuns.

Definiţia 1.1.4. Se numeşte *mulţimea numerelor reale* mulţimea cu cel puţin două elemente $\mathbb{X} \overset{notată}{=} \mathbb{R}$, unde $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ este un corp comutativ total ordonat în care se verifică axioma
(CD) Dacă $A \subseteq \mathbb{R}$ este o submulţime nevidă majorată atunci există un majorant care este cel mai mic, adică $\exists \sup A \in \mathbb{R}$.
(axioma Cantor-Dedekind sau axioma de existenţă a marginii superioare).

Observaţia 1.1.3. $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ este un corp comutativ total ordonat, dar nu satisface axioma (CD). De exemplu, submulţimea
$A = \left\{x \in \mathbb{Q}; 0 < x^2 < 7\right\} \subset \mathbb{Q}$

este nevidă şi majorată în $\mathbb{Q}$ (exemple de majoranţi: $\frac{27}{10}, ..., 3, ..., \frac{7}{2}, ..., 4$), ş.a. Dar nu admite un cel mai mic majorant în $\mathbb{Q}$. Dacă se consideră

$A = \left\{x \in \mathbb{Q}; 0 < x^2 < 7\right\} \subset \mathbb{R}$,

atunci există un cel mai mic majorant în $\mathbb{R}$, $\sup A = \sqrt{7}$.

Propoziţia 1.1.4. Dacă $A \subseteq \mathbb{R}$ este o submulţime nevidă minorată atunci există un minorant care este cel mai mare, adică $\exists \inf A \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.1.1.(**de caracterizare a marginii inferioare**) Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o submulţime nevidă. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca numărul real $\underline{x}$ să fie marginea inferioară a mulţimii $A, \inf A = \underline{x} \in \mathbb{R}$ este ca

(i) $\forall a \in A, \underline{x} \leq a$ ($\underline{x}$ este un minorant pentru A)

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon \in A : \underbrace{\underline{x} \leq a_\varepsilon}_{\text{în plus}} < \underline{x} + \varepsilon$ ($\underline{x}$ este cel mai mare minorant pentru A).

Teorema 1.1.2.(**de caracterizare a marginii superioare**) Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o submulţime nevidă. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca numărul real $\overline{x}$ să fie marginea superioară a mulţimii $A, \sup A = \overline{x} \in \mathbb{R}$ este ca

(i) $\forall a \in A, a \leq \overline{x}$ ($\overline{x}$ este un majorant pentru A)

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon \in A : \overline{x} - \varepsilon < \underbrace{a_\varepsilon \leq \overline{x}}_{\text{în plus}}$ ($\overline{x}$ este cel mai mic majorant pentru A).

Propoziţia 1.1.5. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ şi $B \subseteq \mathbb{R}$ două submulţimi nevide.

a) Dacă $A \subseteq B$ şi

A, B sunt minorate, atunci $\inf A \geq \inf B$;

A, B sunt majorate atunci $\sup A \leq \sup B$.

b) Dacă A este mărginită, atunci

$\inf(-A) = -\sup A$ şi $\sup(-A) = -\inf A$.

c) Dacă A, B sunt minorate, atunci $A + B$ este minorată şi $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$;

Dacă A, B sunt majorate, atunci $A + B$ este majorată şi $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$;

Lema 1.1.1.(**Eudoxos-Arhimede**) Pentru orice număr real $x \in \mathbb{R}$ există un număr natural $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $x < n$.

Definiţia 1.1.5. Se numeşte *parte întreagă* a numărului real $x \in \mathbb{R}$ numărul întreg $n \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea $n \leq x < n + 1$. Se notează $n = [x]$.

Definiţia 1.1.6. O submulţime nevidă $A \subseteq \mathbb{R}$ se numeşte *densă în sensul ordinii în* $\mathbb{R}$ dacă

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y, \exists a \in A$ a.î. $x < a < y$.

Teorema 1.1.3.(**de densitate a $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$**) Între orice două numere reale există măcar un număr raţional

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y, \exists q \in \mathbb{Q}$ a.î. $x < q < y$.

Teorema 1.1.4. Există în $\mathbb{R}$ numere care nu sunt raţionale (*iraţionale*).

Teorema 1.1.5.(**de densitate a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$**) Între orice două numere reale există măcar un număr iraţional.

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y, \exists \widetilde{q} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ a.î. $x < \widetilde{q} < y$.

Definiţia 1.1.7. Următoarele submulţimi din $\mathbb{R}$ se numesc

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$-*interval deschis, cu capetele* a, b;

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$-*interval închis, cu capetele* a, b;

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$-*interval închis la stânga şi deschis la dreapta, cu capetele* a, b;

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$-*interval deschis la stânga şi închis la dreapta, cu capetele* a, b;

$]a, a[= \emptyset; [a, a] = \{a\}$.

Propoziţia 1.1.6.
a) Intervalele din Definiţia 1.1.7 sunt mulţimi mărginite
$\inf\,]a,b[= a, \nexists \min\,]a,b[\,; \sup\,]a,b[= b; \nexists \max\,]a,b[\,;$
$\inf\, [a,b] = a, \exists \min\, [a,b] = a; \sup\, [a,b] = b; \exists \max\, [a,b] = b;$
$\inf\, [a,b[= a, \exists \min\, [a,b[= a; \sup\, [a,b[= b; \nexists \max\, [a,b[\,;$
$\inf\,]a,b] = a, \nexists \min\,]a,b]\,; \sup\,]a,b] = b; \exists \max\,]a,b] = b;$
$\inf \{a\} = a = \min \{a\}\,; \sup \{a\} = a = \max \{a\}\,.$
b) $]a,b[\subset [a,b[\subset [a,b]$ şi $]a,b[\subset]a,b] \subset [a,b]\,.$

Definiţia 1.1.8. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$.
a) Dacă A nu este mărginită inferior în $\mathbb{R}$ spunem că este *mărginită inferior de* $-\infty$ şi că are marginea inferioară $\inf A = -\infty$;
b) Dacă A nu este mărginită superior în $\mathbb{R}$ spunem că este *mărginită superior de* $+\infty$ şi că are marginea superioară $\sup A = +\infty$.
c) Se notează $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}\,.$
Teorema 1.1.6.(**de caracterizare a** $\inf A = -\infty$) Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o submulţime nevidă. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca $\inf A = -\infty$ este ca
(i)-(ii) $\forall \alpha < 0, \exists a_\alpha \in A : a_\alpha < \alpha.$
Teorema 1.1.7.(**de caracterizare a** $\sup A = +\infty$) Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o submulţime nevidă. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca $\sup A = +\infty$ este ca
(i)-(ii) $\forall \alpha > 0, \exists a_\alpha \in A : \alpha < a_\alpha.$
Observaţia 1.1.3. Se prelungeşte relaţia de ordine de pe $\mathbb{R}$ pe $\overline{\mathbb{R}}$ impunând ca numerele "improprii" $-\infty$ şi $+\infty$ să satisfacă:
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow$
sau $-\infty < x < y < +\infty$
sau $-\infty < y < x < +\infty$
sau $-\infty < x = y < +\infty.$
Se prelungesc operaţiile de adunare şi înmulţire de pe $\mathbb{R}$ pe $\overline{\mathbb{R}}$ impunând ca numerele "improprii" $-\infty$ şi $+\infty$ să satisfacă:
1. $-(+\infty) = -\infty =, -(-\infty) = +\infty;$
2. $+\infty + (+\infty) = +\infty;$
$-\infty + (-\infty) = -\infty;$
$\forall x \in \mathbb{R} : x + (\pm\infty) = \pm\infty;$
3. $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,$
$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$
$(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty,$
$\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 : x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty;$
$\forall x \in \mathbb{R}, x < 0 : x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty;$
4. $\forall x \in \mathbb{R} : \dfrac{x}{\pm\infty} = 0;$
Nu se atribuie niciun sens pentru:
$$+\infty - \infty, -\infty + \infty, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0 \cdot (\pm\infty)\,, (\pm\infty) \cdot 0, \tfrac{0}{0}, 0^{\pm\infty}.$$
Observaţia 1.1.4. Se convine ca
1. $x^{+\infty} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } 0 < x < 1 \\ +\infty, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}\,; x^{-\infty} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x > 1 \\ +\infty, & \text{dacă } 0 < x < 1 \end{cases}$

2. $(+\infty)^m = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } m > 0 \\ 0, & \text{dacă } m < 0 \end{cases}$

Nu se atribuie niciun sens pentru:

$0^{\pm\infty}, (\pm\infty)^0$.

Definiţia 1.1.9. Următoarele submulţimi din $\mathbb{R}$ se numesc

$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}; -\infty < x < b\}$-*interval nemărginit la* $-\infty$, *deschis în* b;

$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; -\infty < x \leq b\}$-*interval nemărginit la* $-\infty$, *închis în* b;

$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; a < x < +\infty\}$-*interval nemărginit la* $+\infty$, *deschis în* a;

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < +\infty\}$-*interval nemărginit la* $+\infty$, *închis în* a;

$]-\infty, -\infty[= \emptyset;]+\infty, +\infty[= \emptyset;]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Propoziţia 1.1.7.

a) Intervalele din Definiţia 1.1.9 sunt mulţimi nemărginite

$\inf]-\infty, b[= -\infty, \nexists \min]-\infty, b[; \sup]-\infty, b[= b; \nexists \max]-\infty, b[$;

$\inf]-\infty, b] = -\infty, \nexists \min]-\infty, b] ; \sup]-\infty, b] = b; \exists \max]-\infty, b] = b$;

$\inf]a, +\infty[= a, \nexists \min]a, +\infty[; \sup]a, +\infty[= +\infty; \nexists \max]a, +\infty[$;

$\inf [a, +\infty[= a, \exists \min [a, +\infty[= a; \sup [a, +\infty[= +\infty; \nexists \max [a, +\infty[$;

$\inf]-\infty, +\infty[= -\infty, \nexists \min]-\infty, +\infty[; \sup]-\infty, +\infty[= +\infty; \nexists \max]-\infty, +\infty[$.

(mulţimea $\mathbb{R}$ nu este nici minorată, nici majorată)

b) $]-\infty, b[\subset]-\infty, b]$ şi $]a, +\infty[\subset [a, +\infty[$.

Interpretare geometrică pentru $\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}$.

$\mathbb{R}$ se reprezintă ca o dreaptă.

$\overline{\mathbb{R}}$ se reprezintă ca o dreaptă "încheiată".

Intervalele $]a, b[, [a, b] , [a, b[,]a, b]$ se reprezintă ca segmente.

Intervalele $]-\infty, b[,]-\infty, b] ,]a, +\infty[, [a, +\infty[$ se reprezintă ca semidrepte.

Definiţia 1.1.10. O mulţime A se numeşte *mulţime finită* dacă $\exists n \in \mathbb{N}^*$ şi $\exists \varphi : \{1, ..., n\} \to A$ funcţie bijectivă. În acest caz, n se numeşte cardinalul mulţimii A şi se notează $\text{card}\, A$. O mulţime care nu este finită se numeşte *mulţime infinită*.

$A = \{-3, 7\}$ este mulţime finită.

Definiţia 1.1.11. O mulţime A se numeşte *mulţime numărabilă* dacă $\exists \varphi : \mathbb{N} \to A$ funcţie bijectivă.

Corolarul 1.1.1. $A = \mathbb{N}$ este mulţime infinită şi numărabilă.

Propoziţia 1.1.8. Orice reuniune finită de mulţimi numărabile este mulţime numărabilă.

Corolarul 1.1.2. $A = \mathbb{Z}$ este mulţime infinită şi numărabilă.

Schiţă de dem. $\mathbb{Z}$ se scrie ca şi reuniune a două mulţimi numărabile.

Corolarul 1.1.3. $A = \mathbb{Q}$ este mulţime infinită şi numărabilă.

Schiţă de dem. $\mathbb{Q}$ se scrie ca şi reuniune finită de mulţimi numărabile. $\mathbb{Q}_+$ se poate reprezenta în tabloul

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & ... \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & ... \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & ... \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{array}$$

Corolarul 1.1.4. $\mathbb{R}$ este mulţime infinită dar nu este numărabilă.

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ este mulţime infinită, dar nu este numărabilă.

Corolarul 1.1.5. Intervalele $]a, b[, [a, b] , [a, b[,]a, b] ,]-\infty, b[,]-\infty, b] ,]a, +\infty[, [a, +\infty[$ sunt mulţimi infinite, dar nu sunt numărabile.

Exemplul 1.1.1. Să se determine minoranţii, majoranţii, $\inf A$, $\sup A$, $\min A$, $\max A$, mărginirea pentru $A \subseteq \mathbb{R}$ dată prin:
a) $A = \left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right], B = \left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right] \cap \mathbb{Q}$;**b)** $A = \left]0, 1\right] \cup \{2\}$;
c) $A = \left]-\infty, 0\right]$;**d)** $A = \{1, 7, -1, 5, 100\}$;**e)** $A = \left[-1, 0\right[\cup \mathbb{N}^*$.
Rezolvare. a)
$\bullet A = \left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right]$. Se reprezintă A pe axa numerelor reale:

$A_{\leq} = \left]-\infty, \sqrt{2}\right]$ este mulţimea tuturor minoranţilor mulţimii A.
$A_{\geq} = \left[\sqrt{3}, +\infty\right[$ este mulţimea tuturor majoranţilor mulţimii A.
$\inf A = \sqrt{2}$ deoarece

(i) $\forall a \in A, \sqrt{2} \leq a$ ($\sqrt{2}$ este un minorant pentru A);

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon \in A : \sqrt{2} \leq a_\varepsilon < \sqrt{2} + \varepsilon$ ($\sqrt{2}$ este cel mai mare minorant pentru A). Ultima afirmaţie are loc

$\bullet$sau "prin densitate": Fie $\forall \varepsilon > 0$. Atunci $\sqrt{2}$ şi $\sqrt{2}+\varepsilon$ sunt numere reale distincte în această ordine $\sqrt{2} < \sqrt{2}+\varepsilon$ şi, conform Teoremei de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R} \Longrightarrow$ există $a_\varepsilon \in A$ "între ele", adică $\sqrt{2} < a_\varepsilon < \sqrt{2} + \varepsilon$.

$\bullet$sau "prin atingere": Fie $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists a_\varepsilon = \sqrt{2} \in A : \sqrt{2} = \sqrt{2} < \sqrt{2} + \varepsilon$.

Cum $\sqrt{2} \in A \Rightarrow \exists \min A = \sqrt{2}$.
$\sup A = \sqrt{3}$ deoarece

(i) $\forall a \in A, a \leq \sqrt{3}$ ($\sqrt{3}$ este un majorant pentru A);

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon \in A : \sqrt{3} - \varepsilon < a_\varepsilon \leq \sqrt{3}$ ($\sqrt{3}$ este cel mai mic majorant pentru A). Ultima afirmaţie are loc

$\bullet$sau "prin densitate": Fie $\forall \varepsilon > 0$. Atunci $\sqrt{3}-\varepsilon$ şi $\sqrt{3}$ sunt numere reale distincte în această ordine $\sqrt{3} - \varepsilon < \sqrt{3}$ şi, conform Teoremei de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, există $a_\varepsilon \in A$ "între ele", adică $\sqrt{3} - \varepsilon < a_\varepsilon < \sqrt{3}$.

$\bullet$sau "prin atingere": Fie $\forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon = \sqrt{3} \in A : \sqrt{3} - \varepsilon < \sqrt{3} = \sqrt{3}$.

Cum $\sqrt{3} \in A \Rightarrow \exists \max A = \sqrt{3}$.
A este mulţime mărginită deoarece
$$\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{3}, \forall a \in A.$$
Se menţionează că A este mulţime infinită (ulterior).
$\bullet B = \left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right] \cap \mathbb{Q}$. Se reprezintă B pe axa numerelor reale:

$B_{\leq} = \left]-\infty, \sqrt{2}\right]$ este mulţimea tuturor minoranţilor mulţimii B.
$B_{\geq} = \left[\sqrt{3}, +\infty\right[$ este mulţimea tuturor majoranţilor mulţimii B.
$\inf B = \sqrt{2}$ deoarece

(i) $\forall b \in B, \sqrt{2} \lneqq b$ ($\sqrt{2}$ este un minorant pentru B);

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists b_\varepsilon \in B : \sqrt{2} \lneqq b_\varepsilon < \sqrt{2} + \varepsilon$ ($\sqrt{2}$ este cel mai mare minorant pentru B). Ultima afirmaţie are loc

•sau "prin densitate": Fie $\forall \varepsilon > 0$. Atunci $\sqrt{2}$ şi $\sqrt{2}+\varepsilon$ sunt numere reale distincte în această ordine $\sqrt{2} < \sqrt{2}+\varepsilon$ şi, conform Teoremei de densitate a $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R} \Longrightarrow$ există $b_\varepsilon \in \mathbb{Q}$ "între ele", adică $\sqrt{2} < b_\varepsilon < \sqrt{2}+\varepsilon$.

•sau "prin atingere": NU, deoarece $\sqrt{2} \notin B$.

Cum $\sqrt{2} \notin B \Rightarrow \nexists \min B$.
$\sup B = \sqrt{3}$ deoarece

(i) $\forall b \in B, b \lneqq \sqrt{3}$ ($\sqrt{3}$ este un majorant pentru B);

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists b_\varepsilon \in B : \sqrt{3} - \varepsilon < b_\varepsilon \lneqq \sqrt{3}$ ($\sqrt{3}$ este cel mai mic majorant pentru B). Ultima afirmaţie are loc

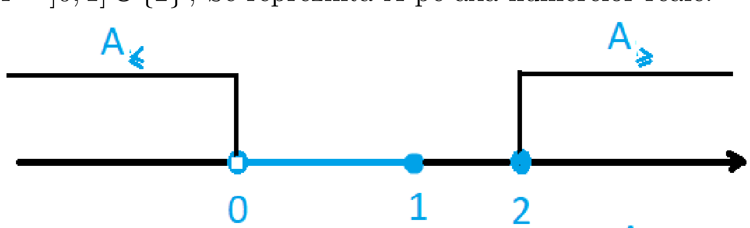
•sau "prin densitate": Fie $\forall \varepsilon > 0$. Atunci $\sqrt{3}-\varepsilon$ şi $\sqrt{3}$ sunt numere reale distincte în această ordine $\sqrt{3} - \varepsilon < \sqrt{3}$ şi, conform Teoremei de densitate a $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$, există $b_\varepsilon \in \mathbb{Q}$ "între ele", adică $\sqrt{3} - \varepsilon < b_\varepsilon < \sqrt{3}$.

•sau "prin atingere": NU, deoarece $\sqrt{3} \notin B$.

Cum $\sqrt{3} \notin B \Rightarrow \nexists \max B$.
B este mulţime mărginită deoarece

$$\sqrt{2} \lneqq b \lneqq \sqrt{3}, \forall b \in B.$$

Se menţionează că B este mulţime infinită şi numărabilă (ulterior).
b) $A = \left]0, 1\right] \cup \{2\}$; Se reprezintă A pe axa numerelor reale:

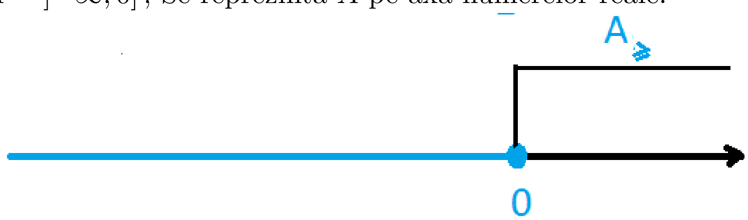


$A_{\leq} = \left]-\infty, 0\right]$ este mulţimea tuturor minoranţilor mulţimii A.
$A_{\geq} = \left[2, +\infty\right[$ este mulţimea tuturor majoranţilor mulţimii A.
$\inf A = 0$ "prin densitate". Cum $0 \notin A \Rightarrow \nexists \min A$.

$\sup A = 2$ "prin atingere". Cum $2 \in A \Rightarrow \exists \max A = 2$.
A este mulţime mărginită deoarece

$$0 \lneqq a \leq 2, \forall a \in A.$$

Se menţionează că A este mulţime infinită (ulterior).
c) $A =]-\infty, 0]$; Se reprezintă A pe axa numerelor reale:



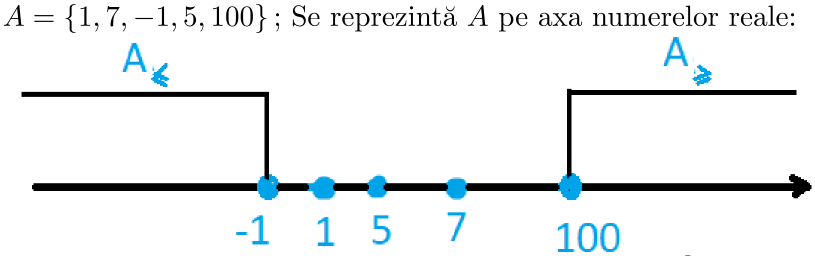
$A_{\leq} = \emptyset$ este mulţimea tuturor minoranţilor mulţimii A.
$A_{\geq} = [0, +\infty[$ este mulţimea tuturor majoranţilor mulţimii A.
$\inf A = -\infty$ deoarece

(i)-(ii) $\forall \alpha < 0, \exists a_\alpha \in A : a_\alpha < \alpha$. Ultima afirmaţie are loc datorită Teoremei de neminorare a $\mathbb{R}$.

$\nexists \min A$.
$\sup A = 0$ sau "prin densitate" sau "prin atingere".
Cum $0 \in A \Rightarrow \exists \max A = 0$.
A este mulţime nemărginită (nemărginită inferior şi mărginită superior).

$$-\infty < a \leq 0, \forall a \in A.$$

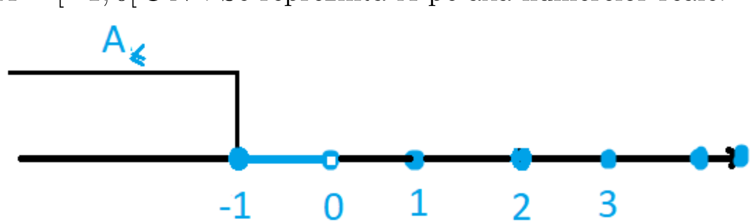
Se menţionează că A este mulţime infinită.
d) $A = \{1, 7, -1, 5, 100\}$; Se reprezintă A pe axa numerelor reale:



$A_{\leq} =]-\infty, -1]$ este mulţimea tuturor minoranţilor mulţimii A.
$A_{\geq} = [100, +\infty[$ este mulţimea tuturor majoranţilor mulţimii A.
$\inf A = -1$ "prin atingere". Cum $-1 \in A \Rightarrow \exists \min A = -1$.
$\sup A = 100$ sau "prin atingere". Cum $100 \in A \Rightarrow \exists \max A = 100$.
A este mulţime mărginită deoarece

$$-1 \leq a \leq 100, \forall a \in A.$$

Se menţionează că A este mulţime finită (are 5 elemente).
e) $A = [-1, 0[\cup \mathbb{N}^*$. Se reprezintă A pe axa numerelor reale:



$A_{\leq} =]-\infty, -1]$ este mulţimea tuturor minoranţilor mulţimii A.
$A_{\geq} = \emptyset$ este mulţimea tuturor majoranţilor mulţimii A.

$\inf A = -1$ sau "prin densitate" sau "prin atingere".
Cum $-1 \in A \Rightarrow \exists \min A = -1$.
$\sup A = +\infty$ deoarece

(i)-(ii) $\forall \alpha > 0, \exists a_\alpha \in A : a_\alpha > \alpha$. Ultima afirmaţie are loc datorită Teoremei de nemajorare a $\mathbb{N}$.

$\nexists \max A$.
A este mulţime nemărginită (mărginită inferior şi nemărginită superior),
$-1 \leq a < +\infty, \forall a \in A$.
Se menţionează că A este mulţime infinită. Nu este numărabilă, chiar dacă are drept submulţime o mulţime numărabilă, şi anume $\mathbb{N}^*$.

Definiţia 1.1.11. Se numeşte *modulul numărului real* $x \in \mathbb{R}$ numărul
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$
Propoziţia 1.1.9.
(P_1) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$ şi $[|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0]$;
(P_2) $\forall x \in \mathbb{R}, |-x| = |x|$;
(P_3) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x + y| \leq |x| + |y|$;
(P_4) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, ||x| - |y|| \leq |x + y|$;
(P_5) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, ||x| - |y|| \leq |x - y|$;
(P_6) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |xy| = |x| \cdot |y|$;
(P_7) $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$;
(P_8) $\forall (x, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, [|x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon]$;
(P_9) $\forall (x, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, [|x| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon]$;
(P_{10}) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \min\{x, y\} = \dfrac{x + y - |x - y|}{2}$;
(P_{11}) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \max\{x, y\} = \dfrac{x + y + |x - y|}{2}$.
Propoziţia 1.1.10. $\forall (x_0, r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, au loc următoarele egalităţi:
$[x_0 - r, x_0 + r] = \{x \in \mathbb{R}; |x - x_0| \leq r\}$;
$]x_0 - r, x_0 + r[= \{x \in \mathbb{R}; |x - x_0| < r\}$;
$\{x_0 - r, x_0 + r\} = \{x \in \mathbb{R}; |x - x_0| = r\}$.

1.2. $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$, $(\mathbb{R}, d)$,$(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{T}})$ (structura de convergenţă)

Teorema 1.2.1. a) $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ este spaţiu normat, cu *funcţia normă* uzuală pe $\mathbb{R}$

$\|\cdot\| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \|x\| = |x|$, adică

(N_1) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| \leq |x| + |y|$

(inegalitatea triunghiulară sau Minkovski);

(N_2) $\forall (\alpha, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |\alpha x| = |\alpha| \, |x|$;

(N_3) $\forall x \in \mathbb{R} : [|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0]$.

b) Deci $(\mathbb{R}, d)$ este spaţiu metric, cu *funcţia distanţă* uzuală pe $\mathbb{R}$

$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, d(x, y) = |x - y|$, adică

(M_1) $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

(inegalitatea triunghiulară sau Minkovski);

(M_2) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : d(x, y) = d(y, x)$;

(M_3) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : [d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y]$.

c) Deci $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ este spaţiu topologic, cu *topologia* uzuală pe $\mathbb{R}$ dată mulţimea $\mathcal{T}$ a tuturor mulţimilor deschise.

Definiţia 1.2.1. O mulţime $D \subseteq \mathbb{R}$ se numeşte *mulţime deschisă în* $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \text{dacă } D = \emptyset \text{ sau} \\ \text{dacă } D \neq \emptyset \text{ şi } \forall x \in D, \exists r_x > 0 \text{ a.î. } \ ]x - r_x, x + r_x[\subseteq D. \end{cases}$$

Observaţia 1.2.1. Fie $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$. Mulţimile deschise în $\mathbb{R}$ sunt:

-intervale $]a, a[= \emptyset,]a, b[,]a, +\infty[,]-\infty, b[,]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$;

-reuniuni oarecare de intervale anterioare;

-intersecţii finite de intervale anterioare.

Exemplul 1.2.1.

$A =]0, 1[\cup]2, +\infty[$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}$;

$B =]-\infty, 2[\cup [7, 10[$ nu este mulţime deschisă în $\mathbb{R}$;

$C = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty}]n, n + 1[$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}$.

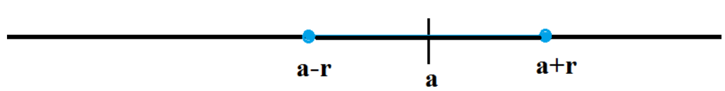
Definiţia 1.2.2. O mulţime $V \subseteq \mathbb{R}$ se numeşte *vecinătate în* $\mathbb{R}$ *a punctului* $x_0 \in \mathbb{R}$ dacă

$\exists r > 0$ a.î. $]x_0 - r, x_0 + r[\subseteq V$ $(\{x \in \mathbb{R}; |x - x_0| < r\} \subseteq V)$.

Se notează cu $\mathcal{V}(x_0)$ mulţimea tuturor vecinătăţilor punctului $x_0 \in \mathbb{R}$.

Observaţia 1.2.2. Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ şi $r > 0$.

Mulţimea $\{x \in \mathbb{R}; |x - x_0| = r\} = \{x_0 - r, x_0 + r\}$ este *sfera* cu centrul în x_0 şi de rază r.



Mulţimea $\{x \in \mathbb{R}; |x - x_0| < r\} =]x_0 - r, x_0 + r[$ este *interiorul sferei* (*sfera deschisă*) cu centrul în x_0 şi de rază r.

Mulţimea $\{x \in \mathbb{R}; |x - x_0| > r\} =]-\infty, x_0 - r[\cup]x_0 + r, +\infty[$ este *exteriorul sferei* cu centrul în x_0 şi de rază r.

Exemplul 1.2.2. Fie
$A =]-3, 2[\,; B =]-\infty, 0[\,; C =]-\infty, 0[\cup \{1\}\,;$
$D =]-\infty, 1] \cup \{2\} \cup [3, +\infty[\,; E =]-\infty, -7] \cup \{-1\} \cup [0, +\infty[\,.$
Atunci
$A \in \mathcal{V}(1)$ deoarece $\exists r > 0$ (de exemplu $r = \frac{1}{2}$) a.î. $]1 - r, 1 + r[\subseteq A$.
$B \notin \mathcal{V}(1)$ deoarece $1 \notin B$.
$C \notin \mathcal{V}(1)$ deoarece, chiar dacă $1 \in C$, totuşi $\forall r > 0$ avem $]1 - r, 1 + r[\nsubseteq C$.
$D \notin \mathcal{V}(1)$ deoarece, chiar dacă $1 \in C$, totuşi $\forall r > 0$ avem $]1 - r, 1 + r[\nsubseteq C$.
$E \in \mathcal{V}(1)$ deoarece $\exists r > 0$ (de exemplu $r = \frac{1}{10}$) a.î. $]1 - r, 1 + r[\subseteq E$.
Observaţia 1.2.3. În $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ care este spaţiu normat (deci $(\mathbb{R}, d)$ care este şi spaţiu metric), adică într-un spaţiu unde se pot defini sfere (sfera, sfera deschisă, sfera închisă), o mulţime $A \subseteq \mathbb{R}$ este *mărginită* dacă poate fi inclusă într-o sferă deschisă, mai precis dacă
$\exists x_0 \in \mathbb{R}$ şi $\exists r > 0$ astfel încât $A \subseteq \{x \in \mathbb{R}; |x - x_0| < r\} =]x_0 - r, x_0 + r[$
sau
$\exists M > 0$ astfel încât $A \subseteq \{x \in \mathbb{R}; |x - 0| < M\} =]-M, M[$
sau
$\exists M > 0$ astfel încât $|x| < M, \forall x \in A$.
Noţiunea de mărginire coincide cu cea dată în $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq, CD)$.
Exemplul 1.2.3.
$A =]2, 3]$ este mulţime mărginită în $\mathbb{R}$ deoarece
$\exists M = 4 > 0$ astfel încât $|x| < M, \forall x \in A$.
$B =]-7, +\infty[$ nu este mulţime mărginită în $\mathbb{R}$ deoarece
$\forall M > 0\ \exists x_M \in A$ astfel încât $|x| > M$.
$C = [-2, 2] \cup [3, 4[$ este mulţime mărginită în $\mathbb{R}$ deoarece
$\exists M = 4 > 0$ astfel încât $|x| < M, \forall x \in A$.
Definiţia 1.2.3. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o submulţime şi $x \in \mathbb{R}$ un punct. Punctul $x \in \mathbb{R}$ se numeşte
a) *punct interior în $\mathbb{R}$ al mulţimii A* dacă
$\exists V \in \mathcal{V}(x)$ a.î. $V \subseteq A$;
Se notează cu $\mathrm{int}_{\mathbb{R}} A$ mulţimea tuturor punctelor interioare în $\mathbb{R}$ ale mulţimii A şi se numeşte *interiorul în $\mathbb{R}$ al mulţimii A*;
b) *punct exterior în $\mathbb{R}$ al mulţimii A* dacă
$\exists V \in \mathcal{V}(x)$ a.î. $V \subseteq c_{\mathbb{R}} A$;
Se notează cu $\mathrm{ext}_{\mathbb{R}} A$ mulţimea tuturor punctelor exterioare în $\mathbb{R}$ ale mulţimii A şi se numeşte *exteriorul în $\mathbb{R}$ al mulţimii A*;
c) *punct frontieră în $\mathbb{R}$ al mulţimii A* dacă
$\forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow [V \cap A \neq \emptyset$ şi $V \cap c_{\mathbb{R}} A \neq \emptyset]$;

Se notează cu $\mathrm{fr}_{\mathbb{R}} A$ mulţimea tuturor punctelor frontieră în $\mathbb{R}$ ale mulţimii A şi se numeşte *frontiera în $\mathbb{R}$ a mulţimii A*;

d) *punct aderent în $\mathbb{R}$ al mulţimii A* dacă
$\forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset$;

Se notează cu $\mathrm{ad}_{\mathbb{R}} A$ mulţimea tuturor punctelor aderente în $\mathbb{R}$ ale mulţimii A şi se numeşte *aderenţa în $\mathbb{R}$ a mulţimii A*;

e) *punct de acumulare în $\mathbb{R}$ al mulţimii A* dacă
$\forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow V \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$;

Se notează cu $\mathrm{ac}_{\mathbb{R}} A$ (sau cu A') mulţimea tuturor punctelor de acumulare în $\mathbb{R}$ ale mulţimii A şi se numeşte *mulţimea derivată sau a punctelor de acumulare în $\mathbb{R}$ a mulţimii A*;

f) *punct izolat în $\mathbb{R}$ al mulţimii A* dacă
$\exists V \in \mathcal{V}(x)$ a.î. $V \cap A = \{a\}$;

Se notează cu $\mathrm{iz}_{\mathbb{R}} A$ mulţimea tuturor punctelor izolate în $\mathbb{R}$ ale mulţimii A şi se numeşte *mulţimea punctelor izolate în $\mathbb{R}$ ale mulţimii A.*

Propoziţia 1.2.1. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o submulţime. Atunci
a) $\mathrm{int}_{\mathbb{R}} A \subseteq A$; **b)** $\mathrm{int}_{\mathbb{R}}(c_{\mathbb{R}} A) = \mathrm{ext}_{\mathbb{R}} A \subseteq c_{\mathbb{R}} A$; **c)** $A' \subseteq \mathrm{ad}_{\mathbb{R}} A$; **d)** $\mathrm{iz}_{\mathbb{R}} A \subseteq A$ şi $\mathrm{iz}_{\mathbb{R}} A \subseteq \mathrm{ad}_{\mathbb{R}} A$;
e) Sistemul $(\mathrm{int}_{\mathbb{R}} A, \mathrm{fr}_{\mathbb{R}} A, \mathrm{ext}_{\mathbb{R}} A)$ este o partiţie a mulţimii $\mathbb{R}$.

Definiţia 1.2.4. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o submulţime. Se numeşte *închiderea în $\mathbb{R}$ a mulţimii A* mulţimea
$\overline{A}^{\mathbb{R}} = \mathrm{int}_{\mathbb{R}} A \cup \mathrm{fr}_{\mathbb{R}} A$.

Propoziţia 1.2.2. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o submulţime. Atunci
a) $\overline{A}^{\mathbb{R}} = \mathrm{ad}_{\mathbb{R}} A$; **b)** $\mathrm{fr}_{\mathbb{R}} A = \overline{A}^{\mathbb{R}} \cap \overline{c_{\mathbb{R}} A}^{\mathbb{R}}$; **c)** $\overline{A}^{\mathbb{R}} = A \cup A'$;
d) Sistemul $(A', \mathrm{iz}_{\mathbb{R}} A)$ este o partiţie a mulţimii $\overline{A}^{\mathbb{R}}$.

Teorema 1.2.2. (**de caracterizare a interiorului şi a închiderii unei mulţimi în** $\mathbb{R}$) Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o submulţime.
a) $\mathrm{int}_{\mathbb{R}} A$ este reuniunea mulţimilor deschise incluse în A
$\mathrm{int}_{\mathbb{R}} A = \cup \{D \in \mathcal{T}; D \subseteq A\} \in \mathcal{T}$;
b) $\overline{A}^{\mathbb{R}}$ este intersecţia mulţimilor închise care includ A
$\overline{A}^{\mathbb{R}} = \cap \{F \in \mathcal{F}; A \subseteq F\} \in \mathcal{F}$.

Teorema 1.2.3. (**de caracterizare a mulţimilor deschise şi a mulţimilor închise în** $\mathbb{R}$) Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o submulţime.
a) $A \in \mathcal{T}$(este mulţime <u>deschisă</u> în $\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow \mathrm{int}_{\mathbb{R}} A = A$;
b) $A \in \mathcal{F}$(este mulţime <u>închisă</u> în $\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow \overline{A}^{\mathbb{R}} = A \Leftrightarrow \overline{A}^{\mathbb{R}} \subseteq A \Leftrightarrow A' \subseteq A$.

Teorema 1.2.4. $\left(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{T}}\right)$ este doar spaţiu topologic.
Topologia uzuală $\overline{\mathcal{T}}$ pe $\overline{\mathbb{R}}$ este mulţimea formată din toate mulţimile deschise în $\overline{\mathbb{R}}$.

Definiţia 1.2.5. O mulţime $D \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte *mulţime deschisă în* $\overline{\mathbb{R}}$

$$\begin{cases} \text{dacă } D = \emptyset \text{ sau} \\ \text{dacă } D \neq \emptyset \text{ şi } \forall x, \begin{cases} x \in D \cap \mathbb{R}, \exists r_x > 0 \text{ a.î. } \left]x - r_x, x + r_x\right[\subseteq D \\ x \in D \cap \{+\infty\}, \exists \alpha_x > 0 \text{ a.î. } \left]\alpha_x, +\infty\right] \subseteq D \\ x \in D \cap \{-\infty\}, \exists \alpha_x < 0 \text{ a.î. } \left[-\infty, \alpha_x\right[\subseteq D \end{cases} \\ \qquad \text{(atunci când intersecţiile sunt nevide).} \end{cases}$$

Observaţia 1.2.4. Fie $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$. Mulţimile deschise în $\overline{\mathbb{R}}$ sunt:

$$\text{-intervale} \begin{cases} \left]a, a\right[= \emptyset, \left]a, b\right[, \left]a, +\infty\right[, \left]-\infty, b\right[, \left]-\infty, +\infty\right[= \mathbb{R}, \\ \left]a, +\infty\right], \left[-\infty, b\right[, \\ \left[-\infty, +\infty\right[, \left]-\infty, +\infty\right], \left[-\infty, +\infty\right] = \overline{\mathbb{R}}; \end{cases};$$

-reuniuni oarecare de intervale anterioare;
-intersecţii finite de intervale anterioare.

Exemplul 1.2.4.

$A =]1, 2[\cup]3, +\infty[$ este mulţime deschisă în $\overline{\mathbb{R}}$;

$B = [-\infty, 0[\cup]1, +\infty]$ este mulţime deschisă în $\overline{\mathbb{R}}$;

$C = [-\infty, -5[\cup [-1, 10[$ nu este mulţime deschisă în $\overline{\mathbb{R}}$.

Definiţia 1.2.6. O mulţime $V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte *vecinătate în* $\overline{\mathbb{R}}$ *a punctului* $x_0 \in \mathbb{R}$ dacă

$\exists r > 0$ a.î. $]x_0 - r, x_0 + r[\subseteq V$ $(\{x \in \mathbb{R}; |x - x_0| < r\} \subseteq V)$.

O mulţime $V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte *vecinătate în* $\overline{\mathbb{R}}$ *a punctului* $+\infty$ dacă

$\exists \alpha > 0$ a.î. $]\alpha, +\infty] \subseteq V$.

O mulţime $V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte *vecinătate în* $\overline{\mathbb{R}}$ *a punctului* $-\infty$ dacă

$\exists \alpha < 0$ a.î. $[-\infty, \alpha[\subseteq V$.

Se notează cu $\mathcal{V}(x_0)$ mulţimea tuturor vecinătăţilor punctului $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Exemplul 1.2.5. Fie $A =]-3, 2[\,; B = [-\infty, 1[\cup]1, +\infty[\,; C =]-\infty, 0] \cup \{1\} \cup [2, +\infty]$. Atunci

$A \notin \mathcal{V}(-\infty)$ deoarece $-\infty \notin A$.

$A \in \mathcal{V}(0)$ deoarece $\exists r > 0$ (de exemplu $r = 1$) a.î. $]0 - r, 0 + r[\subseteq A$.

$A \in \mathcal{V}(1)$ deoarece $\exists r > 0$ (de exemplu $r = \frac{1}{2}$) a.î. $]1 - r, 1 + r[\subseteq A$.

$A \notin \mathcal{V}(+\infty)$ deoarece $+\infty \notin A$.

$B \in \mathcal{V}(-\infty)$ deoarece $\exists \alpha < 0$ (de exemplu $\alpha = -10^{10^{10}}$) a.î. $[-\infty, \alpha[\subseteq B$.

$B \in \mathcal{V}(0)$ deoarece $\exists r > 0$ (de exemplu $r = \frac{1}{9}$) a.î. $]0 - r, 0 + r[\subseteq B$.

$B \notin \mathcal{V}(1)$ deoarece $1 \notin B$.

$B \notin \mathcal{V}(+\infty)$ deoarece $+\infty \notin B$.

$C \notin \mathcal{V}(-\infty)$ deoarece $-\infty \notin C$.

$C \notin \mathcal{V}(0)$ deoarece, chiar dacă $0 \in C$, totuşi $\forall r > 0$ avem $]0 - r, 0 + r[\nsubseteq C$.

$C \notin \mathcal{V}(1)$ deoarece, chiar dacă $1 \in C$, totuşi $\forall r > 0$ avem $]1 - r, 1 + r[\nsubseteq C$.

$C \in \mathcal{V}(+\infty)$ deoarece $\exists \alpha > 0$ (de exemplu $\alpha = 11^{11^{11}}$) a.î. $]\alpha, +\infty] \subseteq C$.

Observaţia 1.2.5. Pentru definiţiile punctelor interioare, exterioare, frontieră, aderente, de acumulare, izolate şi a mulţimilor corespunzătoare în $\overline{\mathbb{R}}$-vezi spaţii topologice.

Exemplul 1.2.6. Să se determine $\mathrm{int}_X A$, $\mathrm{fr}_X A$, $\mathrm{ext}_X A$, $c_X A$, $\mathrm{ad}_X A$ (A'), $\mathrm{iz}_X A$, $\overline{A}^X$ pentru $A \subset X$, unde $X = \mathbb{R}$ este considerat cu topologia uzuală:

a) $A = [0, 2[\cup \{3\} \cup]4, +\infty[\,;$**b)** $A = \left[-\sqrt{2}, 0\right] \cap \mathbb{Q};$**c)** $A = \left\{ \dfrac{n+1}{(-1)^{n+1} n + 1}; n \in \mathbb{N} \right\};$

d) $A =]-2, -1] \cup \mathbb{N};$**e)** $A = \left\{ \dfrac{1 + (-1)^n}{n} + 1 - (-1)^n; n \geq 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$

Exemplul 1.2.7. Să se determine $\mathrm{int}_X A$, $\mathrm{fr}_X A$, $\mathrm{ext}_X A$, $\mathrm{ad}_X A$, $\mathrm{ad}_X A$ (A'), $\mathrm{iz}_X A$, $\overline{A}^X$ pentru $A \subset X$, unde $X = \mathbb{R}$ sau $X = \overline{\mathbb{R}}$ este considerat cu topologia uzuală:

a) $A = \mathbb{N}$, $A = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{Q}$ pentru $X = \mathbb{R}$;

b) $A = \mathbb{N}$, $A = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{Q}$, $A = \mathbb{R}$ pentru $X = \overline{\mathbb{R}}$;

c) $A = [0, 1[\cup \{2\}$ pentru $X = \mathbb{R}$ sau $X = \overline{\mathbb{R}}$;

d) $A = \mathbb{Z} \cup [0, +\infty[$ pentru $X = \mathbb{R}$ sau $X = \overline{\mathbb{R}}$.

○A se citi Anexa 1−Spaţii topologice, spaţii metrice, spaţii normate.