

CURS NR. 10

Analiză matematică, AIA

# CALCUL INTEGRAL

## Teoria integrabilității pentru $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

### 1. Integrala nedefinită (primitive) pentru $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

#### 1.1. Definiții. Exemple. Proprietăți

A se recapitula din liceu. În continuare, este prezentată o schiță.

**Definiția 1.1.1.** Fie  $I \subseteq \mathbb{R}$  un interval cu interior nevid și  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Funcția  $f$  admite primitivă pe  $I$  dacă există o funcție  $F : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât

- (i)  $F$  este derivabilă pe  $I$ .
- (ii)  $F'(x) = f(x), \forall x \in I$ .

Dacă există, funcția  $F : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se numește *primitivă (antiderivată) pe intervalul  $I$  a funcției  $f$* .

Se va reaminti pentru ce funcții  $f$  există primitive  $F$ , se va studia unicitatea primitivei unei funcții  $f$  în caz de existență și metodele de determinare a unei primitive  $F$  pentru o funcție  $f$ .

**Propoziția 1.1.1.** Fie  $I \subseteq \mathbb{R}$  un interval cu interior nevid și  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă  $F : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este o primitivă pe intervalul  $I$  a funcției  $f$ , atunci toate primitivele funcției  $f$  sunt de forma  $F + C$ , unde

$$C : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, C(x) = c, c \in \mathbb{R}$$

este o funcție constantă.

**Observația 1.1.1.** Din Propoziția 1.1.1 se obține că, dacă o funcție  $f$  admite primitivă pe un interval, atunci  $f$  admite o infinitate de primitive pe un interval. Din acest motiv, se precizează " $f$  admite primitive" în loc de " $f$  admite primitivă".

**Observația 1.1.2. a)** Definiția primitivei s-ar putea extinde și la funcții definite pe reuniuni finite de intervale disjuncte, deoarece condițiile din definiție au sens și în acest caz, mai general. Însă nu este adevărat că două astfel de primitive diferă printr-o constantă. De exemplu, fie

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}.$$

Atunci funcțiile

$$F, G : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} \ln(-x), & \text{dacă } x \in ]-\infty, 0[ \\ \ln x, & \text{dacă } x \in ]0, +\infty[ \end{cases}; G(x) = \begin{cases} \ln(-x) + 1, & \text{dacă } x \in ]-\infty, 0[ \\ \ln x + 2, & \text{dacă } x \in ]0, +\infty[ \end{cases}$$

sunt derivabile pe  $]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$  și verifică

$$F'(x) = f(x), \forall x \in ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[ \text{ și } G'(x) = f(x), \forall x \in ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[.$$

Totuși diferența este  $G(x) - F(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in ]-\infty, 0[ \\ 2, & \text{dacă } x \in ]0, +\infty[ \end{cases}$ .

○ **Observația 1.1.3.** O funcție care admite primitive are proprietatea lui Darboux. Reciproc nu, există funcții care au proprietatea lui Darboux și totuși nu au primitive. De exemplu:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \in ]-\infty, 0[ \\ \frac{1}{2}, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}.$$

În exerciții, se poate folosi că, dacă  $f$  nu are proprietatea lui Darboux, atunci  $f$  nu admite primitive. De exemplu:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x \in ]-\infty, 0[ \\ 1, & \text{dacă } x \in [0, +\infty[ \end{cases}$$

**Propoziția 1.1.2.** Fie  $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$  un interval cu interior nevid. Dacă  $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă pe  $\mathbb{I}$  atunci  $f$  admite primitive pe  $\mathbb{I}$ .

Reciproc nu, există funcții care nu sunt continue și totuși admit primitive.

**Observația 1.1.4.** Există funcții  $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$  care admit primitive pe  $\mathbb{I}$ , dar aceste primitive nu pot fi exprimate cu funcții elementare. De exemplu, integralele nedefinite

$$\int e^{-x^2} dx, x \in \mathbb{R}; \int \cos x^2 dx, x \in \mathbb{R}; \int \sin x^2 dx, x \in \mathbb{R}; \\ \int \frac{\sin x}{x} dx, x \in ]0, +\infty[; \int \frac{\cos x}{x} dx, x \in ]0, +\infty[; \int \frac{x}{\ln x} dx, x \in ]0, +\infty[; \\ \int R(x, \sqrt{P(x)}) dx, \text{ cu grad } P \geq 3 \text{ ș.a.}$$

există, dar nu se pot exprima cu funcții elementare.

**Exemplul 1.1.1.** Să se studieze dacă următoarele funcții admit primitive pe intervalul pe care sunt definite:

$$\text{a) } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{x \cos x}{x - \frac{\pi}{2}}, & \text{dacă } x \neq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{dacă } x = \frac{\pi}{2} \end{cases};$$

**Rezolvare.** Este un exemplu de funcție care este continuă pe  $\mathbb{R}$  (și în  $a = 0$ ), deci admite primitive pe  $\mathbb{R}$ . Se studiază dacă  $f$  este continuă pe  $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ .

- $f$  este continuă pe  $]-\infty, \frac{\pi}{2}[ \cup ]\frac{\pi}{2}, +\infty[$ ;
- $f$  este continuă în  $a = \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R} \cap \mathbb{R}' \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = f(\frac{\pi}{2})$ .

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (-x) \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\frac{\pi}{2} - x} = -\frac{\pi}{2} = f(\frac{\pi}{2}).$$

Deci  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R} \Rightarrow f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$

(dar aceste primitive nu pot fi exprimate cu funcții elementare).

$$\text{b) } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases};$$

**Rezolvare.** Este un exemplu de funcție care nu este continuă pe  $\mathbb{R}$  (în  $a = 0$ ), dar admite primitive pe  $\mathbb{R}$ . Se studiază dacă  $f$  este continuă pe  $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ .

- $f$  este continuă pe  $]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$ ;
- $f$  este continuă în  $a = 0 \in \mathbb{R} \cap \mathbb{R}' \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ .

$$\text{Cum } \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

Deci  $f$  nu este continuă pe  $\mathbb{R}$ . Nu se poate afirma dacă  $f$  admite sau nu primitive pe  $\mathbb{R}$ .

Se presupune că există  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  care să fie primitivă pentru  $f$  pe  $\mathbb{R}$ , adică o funcție care să verifice (i) și (ii) din Definiție. Se observă că

$$\left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right)' = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, \forall x \in ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[.$$

Atunci  $F$  ar avea legea de asociere

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + c_1, & \text{dacă } x \in ]-\infty, 0[ \\ c_2, & \text{dacă } x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} + c_3, & \text{dacă } x \in ]0, +\infty[ \end{cases}, \text{ cu } c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Se anticipează că mulțimea de primitive va depinde de o singură constantă  $c \in \mathbb{R}$ . Pentru ca  $F$  să

fie derivabilă pe  $\mathbb{R}$  e necesar să Se impune ca  $F$  să fie continuă pe  $\mathbb{R}$ .

- $F$  este continuă pe  $]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$ ;
- $F$  este continuă în  $a = 0 \in \mathbb{R} \cap \mathbb{R}' \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = F(0)$ .

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} F(x) &= \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \left( x^2 \sin \frac{1}{x} + c_1 \right) = 0 + c_1 \\ \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} F(x) &= \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \left( x^2 \sin \frac{1}{x} + c_3 \right) = 0 + c_3 \\ F(0) &= c_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 \stackrel{\text{not}}{=} c \in \mathbb{R}.$$

Se obține  $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + c, & \text{dacă } x \neq 0 \\ c, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$ , cu  $c \in \mathbb{R}$ .

Se impune ca  $F$  să fie derivabilă pe  $\mathbb{R}$

- $F$  este derivabilă pe  $]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$ ; în plus

$$F'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} = f(x), \forall x \in ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$$

- $F$  este derivabilă în  $a = 0 \in \mathbb{R} \cap \mathbb{R}' \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}$ . Într-adevăr

$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} + c - c}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \\ \Rightarrow F &\text{ este derivabilă în } a = 0 \text{ și } F'(0) = 0. \end{aligned}$$

Dar  $f(0) = 0 = F'(0) \Rightarrow F$  este primitivă pentru  $f$ .

$$\circ \mathbf{c)} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in ]-\infty, 0] \\ \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \in ]0, +\infty[ \end{cases};$$

**Indicație:** Este un exemplu de funcție care nu este continuă pe  $\mathbb{R}$  (în  $a = 0$ ) și nici nu admite primitive pe  $\mathbb{R}$ . Se demonstrează că nu admite primitive analog cu b), încercând

$$F(x) = \begin{cases} c_1, & \text{dacă } x \in ]-\infty, 0[ \\ c_2, & \text{dacă } x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} + c_3, & \text{dacă } x \in ]0, +\infty[ \end{cases}, \text{ cu } c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}, c_3 \in \mathbb{R}.$$

**Definiția 1.1.2.** Fie  $I \subseteq \mathbb{R}$  un interval cu interior nevid și  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă există, mulțimea tuturor primitivelor pe intervalul  $I$  ale funcției  $f$ ,

$$\{F + C; F \text{ este o primitivă pe intervalul } I \text{ a funcției } f \text{ și } C : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, C(x) = c, c \in \mathbb{R}\}$$

se numește *integrala nedefinită a funcției  $f$  pe intervalul  $I$*  și se notează  $\int f(x) dx$ .

Operația de determinare a primitivelor unei funcții (care admite primitive) se numește *integrare*.

În exerciții se utilizează notația clasică

$$\int f(x) dx = F(x) + c = F(x; c), \forall x \in I \text{ (variabila primitivei sau variabilă de integrare), } \forall c \in \mathbb{R} \text{ (constantă de indexare a mulțimii de primitive)}.$$

**Observația 1.1.5.** Dacă  $g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este derivabilă pe  $I$ , atunci ea este o primitivă pentru funcția derivată  $g' : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , adică

$$\int g'(x) dx = g(x) + c, \forall x \in I \text{ (variabila primitivei sau variabila de integrare), } \forall c \in \mathbb{R} \text{ (constantă)}.$$

De exemplu,

$$\int 2 \sin x \cos x dx = \int \left( (\sin x)^2 \right)' dx = (\sin x)^2 + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}.$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int (\arctg x)' dx = \arctg x + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}.$$

**Teorema 1.1.2. (de liniaritate a integralei nedefinite)** Fie  $I \subseteq \mathbb{R}$  un interval cu interior nevid

și  $f, g : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Fie  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dacă  $f$  și  $g$  admit primitive pe  $\mathbb{I}$  atunci funcțiile  $f + g$  și  $\alpha f$  admit primitive pe  $\mathbb{I}$  și

$$\int (f + g)(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx, \forall x \in \mathbb{I}; \int (\alpha \cdot f)(x) dx = \alpha \int f(x) dx, \forall x \in \mathbb{I}.$$

**Demonstrație.** Rezultă imediat din Definiția 1.1.1. Se menționează că

$$\int f(x) dx = \int f(x) dx + c, \forall x \in \mathbb{I}, c \in \mathbb{R}.$$

Se anticipează secțiunea 1.3 și se prezintă în comun pentru funcții simplu și compus definite:

**Teorema 1.1.1. (integrale nedefinite ale funcțiilor elementare)** Fie  $u : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție derivabilă pe  $\mathbb{I}$  cu derivata continuă, unde  $\mathbb{I}$  este interval cu interior nevid din  $\mathbb{R}$ .

1°. •Pentru  $n \in \mathbb{N}$  fixat  $\Rightarrow$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$$

$$\int u^n(x) \cdot u'(x) dx = \frac{1}{n+1} u^{n+1}(x) + c, \forall x \in \mathbb{I}, c \in \mathbb{R}.$$

**Exemple: a)**  $\int x^{2020} dx = \frac{1}{2021} x^{2021} + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$

**b)**  $\int (5x^7 + 3x + 2)^{2020} \cdot (35x^6 + 3) dx = \frac{1}{2021} (5x^7 + 3x + 2)^{2021} + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$

**c)**  $\int (\sin x)^{2020} \cdot (\cos x) dx = \frac{1}{2021} (\sin x)^{2021} + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$

**d)**  $\int (\arctg x)^{2020} \cdot \left(\frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{1}{2021} (\arctg x)^{2021} + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$

•Pentru  $m \in \mathbb{Z}, m \leq -2$  fixat  $\Rightarrow$

$$\int x^m dx = \begin{cases} \frac{1}{m+1} x^{m+1} + c_1, & \forall x \in ]-\infty, 0[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{m+1} x^{m+1} + c_2, & \forall x \in ]0, +\infty[, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

$$\int u^m(x) \cdot u'(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{m+1} u^{m+1}(x) + c_1, & \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } u(x) \in ]-\infty, 0[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{m+1} u^{m+1}(x) + c_2, & \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } u(x) \in ]0, +\infty[, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

**Exemple: a)**  $\int \frac{1}{x^7} dx = \int x^{-7} dx = \begin{cases} \frac{1}{-6} x^{-6} + c_1, & \forall x \in ]-\infty, 0[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{-6} x^{-6} + c_2, & \forall x \in ]0, +\infty[, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

**b)**  $\int \frac{1}{(x-3)^2} dx = \int (x-3)^{-2} (x-3)' dx =$

$$= \begin{cases} \frac{1}{-1} (x-3)^{-1} + c_1, & \forall x \in ]-\infty, 3[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{-1} (x-3)^{-1} + c_2, & \forall x \in ]3, +\infty[, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases} = \begin{cases} \frac{-1}{x-3} + c_1, & \forall x \in ]-\infty, 3[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \frac{-1}{x-3} + c_2, & \forall x \in ]3, +\infty[, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

**c)**  $\int \frac{1}{(x+1)^3} dx = \int (x+1)^{-3} (x+1)' dx =$

$$= \begin{cases} \frac{1}{-2} (x+1)^{-2} + c_1, & \forall x \in ]-\infty, -1[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{-2} (x+1)^{-2} + c_2, & \forall x \in ]-1, +\infty[, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases} = \begin{cases} \frac{-1}{2} \frac{1}{(x+1)^2} + c_1, & \forall x \in ]-\infty, -1[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \frac{-1}{2} \frac{1}{(x+1)^2} + c_2, & \forall x \in ]-1, +\infty[, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

**d)**  $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^3} dx = \int (x^2+x+1)^{-3} (x^2+x+1)' dx = \frac{1}{-2} (x^2+x+1)^{-2} + c =$

$$= \frac{1}{-2} \frac{1}{(x^2+x+1)^2} + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R};$$

$$\text{e) } \int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^2} dx = \int (x^2-3x+2)^{-2} (x^2-3x+2)' dx =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{-1} (x^2-3x+2)^{-1} + c_1, & \forall x \in ]-\infty, 1[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{-1} (x^2-3x+2)^{-1} + c_2, & \forall x \in ]1, 2[, c_2 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{-1} (x^2-3x+2)^{-1} + c_3, & \forall x \in ]2, +\infty[, c_3 \in \mathbb{R} \end{cases} = \begin{cases} \frac{-1}{x^2-3x+2} + c_1, & \forall x \in ]-\infty, 1[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \frac{-1}{x^2-3x+2} + c_2, & \forall x \in ]1, 2[, c_2 \in \mathbb{R} \\ \frac{-1}{x^2-3x+2} + c_3, & \forall x \in ]2, +\infty[, c_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{f) } \int \frac{1}{(x^2-8)^2} \cdot (2x) dx = \begin{cases} \frac{1}{-1} (x^2-8)^{-1} + c_1, & \forall x \in ]-\infty, -2\sqrt{2}[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{-1} (x^2-8)^{-1} + c_2, & \forall x \in ]-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}[, c_2 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{-1} (x^2-8)^{-1} + c_3, & \forall x \in ]2\sqrt{2}, +\infty[, c_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{g) } \int \frac{\sin 2x}{(2+\sin^2 x)^{20}} dx = \int (2+\sin^2 x)^{-20} (2+\sin^2 x)' dx = \frac{1}{-19} (2+\sin^2 x)^{-19} + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$$

• Pentru  $m = -1 \Rightarrow$

$$\int \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \ln(-x) + c_1, & \forall x \in ]-\infty, 0[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \ln x + c_2, & \forall x \in ]0, +\infty[, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{u(x)} u'(x) dx = \begin{cases} \ln(-u(x)) + c_1, & \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } u(x) \in ]-\infty, 0[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \ln u(x) + c_2, & \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } u(x) \in ]0, +\infty[, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{Exemple: a) } \int \frac{1}{x-3} dx = \int \frac{1}{x-3} (x-3)' dx = \begin{cases} \ln(-x+3) + c_1, & \forall x \in ]-\infty, 3[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \ln(x-3) + c_2, & \forall x \in ]3, +\infty[, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{b) } \int \frac{1}{x+1} dx = \int \frac{1}{x+1} (x+1)' dx = \begin{cases} \ln(-x-1) + c_1, & \forall x \in ]-\infty, -1[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \ln(x+1) + c_2, & \forall x \in ]-1, +\infty[, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{c) } \int \frac{1}{2x^2+x+2} \cdot (4x+1) dx = \ln(2x^2+x+2) + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{d) } \int \frac{1}{x^2-5x+6} \cdot (2x-5) dx = \begin{cases} \ln(x^2-5x+6) + c_1, & \forall x \in ]-\infty, 2[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \ln(-x^2+5x-6) + c_2, & \forall x \in ]2, 3[, c_2 \in \mathbb{R} \\ \ln(x^2-5x+6) + c_3, & \forall x \in ]3, +\infty[, c_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{e) } \int \frac{\sin 2x}{2+\sin^2 x} dx = \int \frac{1}{2+\sin^2 x} (2+\sin^2 x)' dx = \ln(2+\sin^2 x) + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$$

• Pentru  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  fixat  $\Rightarrow$

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c, \forall x \in ]0, +\infty[, c \in \mathbb{R}.$$

$$\int u^\alpha(x) \cdot u'(x) dx = \frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1}(x) + c, \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } u(x) \in ]0, +\infty[, c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Exemple: a) } \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + c, \forall x \in ]0, +\infty[, c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{b) } \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^7}} dx = \int x^{-\frac{7}{3}} dx = \frac{1}{-\frac{7}{3}+1} x^{-\frac{7}{3}+1} + c, \forall x \in ]0, +\infty[, c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{c) } \int \frac{1}{x^\pi} dx = \int x^{-\pi} dx = \frac{1}{-\pi+1} x^{-\pi+1} + c, \forall x \in ]0, +\infty[, c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{d) } \int x^e dx = \frac{1}{e+1} x^{e+1} + c, \forall x \in ]0, +\infty[, c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{e) } \int x\sqrt{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int (x^2+1)^{\frac{1}{2}} (2x) dx = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (x^2+1)^{\frac{1}{2}+1} + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{f) } \int \frac{1}{\sqrt{3x-x^2-2}} \cdot (3-2x) dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} (3x-x^2-2)^{-\frac{1}{2}+1} + c, \forall x \in ]1, 2[, c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{g) } \int \frac{1}{\sqrt[3]{(11x^2 + 20x + 20)^2}} \cdot (22x + 20) dx = \frac{1}{-\frac{2}{3} + 1} (11x^2 + 20x + 20)^{-\frac{2}{3} + 1} + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{h) } \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{2 + \cos^2 x}} dx = - \int \frac{1}{\sqrt{2 + \cos^2 x}} \cdot (2 + \cos^2 x)' dx = \frac{1}{-\frac{1}{2} + 1} (2 + \cos^2 x)^{-\frac{1}{2} + 1} + c,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$$

2°. •Pentru  $a \in ]0, +\infty[$  fixat  $\Rightarrow$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$$

$$\int \frac{1}{u^2(x) + a^2} \cdot u'(x) dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u(x)}{a} + c, \forall x \in \mathbb{I}, c \in \mathbb{R}.$$

**Exemple:** a)  $\int \frac{1}{x^2 + 5} dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$

b)  $\int \frac{1}{4x^2 + 4x + 7} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(2x + 1)^2 + (\sqrt{6})^2} \cdot (2x + 1)' dx = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{6}} + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$

c)  $\int \frac{\cos x}{3 + \sin^2 x} dx = \int \frac{1}{(\sin x)^2 + (\sqrt{3})^2} \cdot (\sin x)' dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sin x}{\sqrt{3}} + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$

c)  $\int \frac{1}{3 + \ln^2 x} \cdot \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{(\ln x)^2 + (\sqrt{3})^2} \cdot (\ln x)' dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\ln x}{\sqrt{3}} + c, \forall x \in ]0, +\infty[, c \in \mathbb{R}.$

•Pentru  $a \in ]0, +\infty[$  fixat  $\Rightarrow$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \begin{cases} \frac{1}{2a} \ln \frac{x - a}{x + a} + c_1, & \forall x \in ]-\infty, -a[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{2a} \ln \frac{a - x}{x + a} + c_2, & \forall x \in ]-a, a[, c_2 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{2a} \ln \frac{x - a}{x + a} + c_3, & \forall x \in ]a, +\infty[, c_3 \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

$$\int \frac{1}{u^2(x) - a^2} \cdot u'(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2a} \ln \frac{u(x) - a}{u(x) + a} + c_1, & \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } u(x) \in ]-\infty, -a[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{2a} \ln \frac{a - u(x)}{u(x) + a} + c_2, & \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } u(x) \in ]-a, a[, c_2 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{2a} \ln \frac{u(x) - a}{u(x) + a} + c_3, & \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } u(x) \in ]a, +\infty[, c_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

**Exemple:** a)  $\int \frac{1}{x^2 - 3} dx = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \frac{x - \sqrt{3}}{x + \sqrt{3}} + c_1, & \forall x \in ]-\infty, -\sqrt{3}[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{3} - x}{x + \sqrt{3}} + c_2, & \forall x \in ]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[, c_2 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \frac{x - \sqrt{3}}{x + \sqrt{3}} + c_3, & \forall x \in ]\sqrt{3}, +\infty[, c_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$

b)  $\int \frac{1}{4x^2 + 4x - 2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(2x + 1)^2 - (\sqrt{3})^2} \cdot (2x + 1)' dx =$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{(2x+1) - \sqrt{3}}{(2x+1) + \sqrt{3}} + c_1, & \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } (2x+1) \in ]-\infty, -\sqrt{3}[ , c_1 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{3} - (2x+1)}{(2x+1) + \sqrt{3}} + c_2, & \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } (2x+1) \in ]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[ , c_2 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{(2x+1) - \sqrt{3}}{(2x+1) + \sqrt{3}} + c_3, & \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } (2x+1) \in ]\sqrt{3}, +\infty[ , c_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3°. •Pentru  $a \in ]0, +\infty[$  fixat  $\Rightarrow$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + c, \forall x \in ]-a, a[ , c \in \mathbb{R}.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2(x)}} \cdot u'(x) dx = \arcsin \frac{u(x)}{a} + c, \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } u(x) \in ]-a, a[ , c \in \mathbb{R}.$$

**Exemple:** a)  $\int \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3} - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}} + c, \forall x \in ]-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}[ , c \in \mathbb{R}.$

b)  $\int \frac{1}{\sqrt{4 - 4x^2 + 4x}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - (2x-1)^2}} \cdot (2x-1)' dx =$   
 $= \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{5}} + c, \forall x \in ]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}[ , c \in \mathbb{R}.$

•Pentru  $a \in ]0, +\infty[$  fixat  $\Rightarrow$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2(x) + a^2}} \cdot u'(x) dx = \ln \left( u(x) + \sqrt{u^2(x) + a^2} \right) + c, \forall x \in \mathbb{I}, c \in \mathbb{R}.$$

**Exemple:** a)  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2\pi}} dx = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + 2\pi} \right) + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$

b)  $\int \frac{1}{\sqrt{9x^2 + 6x + 8}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{(3x+1)^2 + (\sqrt{7})^2}} \cdot (3x+1)' dx =$   
 $= \frac{1}{3} \ln \left( (3x+1) + \sqrt{(3x+1)^2 + (\sqrt{7})^2} \right) + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$

•Pentru  $a \in ]0, +\infty[$  fixat  $\Rightarrow$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \begin{cases} \ln \left( -x - \sqrt{x^2 - a^2} \right) + c_1, & \forall x \in ]-\infty, -a[ , c_1 \in \mathbb{R} \\ \ln \left( x + \sqrt{x^2 - a^2} \right) + c_2, & \forall x \in ]a, +\infty[ , c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2(x) - a^2}} \cdot u'(x) dx = \begin{cases} \ln \left( -u(x) - \sqrt{u^2(x) - a^2} \right) + c_1, & \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } u(x) \in ]-\infty, -a[ , c_1 \in \mathbb{R} \\ \ln \left( u(x) + \sqrt{u^2(x) - a^2} \right) + c_2, & \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } u(x) \in ]a, +\infty[ , c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

**Exemple:** a)  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - e}} dx = \begin{cases} \ln \left( -x - \sqrt{x^2 - e} \right) + c_1, & \forall x \in ]-\infty, -\sqrt{e}[ , c_1 \in \mathbb{R} \\ \ln \left( x + \sqrt{x^2 - e} \right) + c_2, & \forall x \in ]\sqrt{e}, +\infty[ , c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

b)  $\int \frac{1}{\sqrt{9x^2 + 6x - 5}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{(3x+1)^2 - (\sqrt{6})^2}} \cdot (3x+1)' dx =$

$$= \begin{cases} \frac{1}{3} \ln \left( -(3x+1) - \sqrt{(3x+1)^2 - (\sqrt{6})^2} \right) + c_1, & \forall x \in \left] -\infty, \frac{-1-\sqrt{6}}{3} \right[ , c_1 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{3} \ln \left( (3x+1) + \sqrt{(3x+1)^2 - (\sqrt{6})^2} \right) + c_2, & \forall x \in \left] \frac{-1+\sqrt{6}}{3}, +\infty \right[ , c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

4°. •Pentru  $a \in ]0, +\infty[ \setminus \{1\}$  fixat  $\Rightarrow$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$$

$$\int a^{u(x)} \cdot u'(x) dx = \frac{1}{\ln a} a^{u(x)} + c, \forall x \in \mathbb{I}, c \in \mathbb{R}.$$

**Exemple:** a)  $\int 3^x dx = \frac{1}{\ln 3} 3^x + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$

b)  $\int 7^{x^2+1} (x^2+1)' dx = \frac{1}{\ln 7} 7^{x^2+1} + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$

•Pentru  $a = e \Rightarrow$

$$\int e^x dx = e^x + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$$

$$\int e^{u(x)} \cdot u'(x) dx = e^{u(x)} + c, \forall x \in \mathbb{I}, c \in \mathbb{R}, \text{ unde } a, b \in \mathbb{R}^*.$$

**Comentariu:**  $\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$

**Exemple:** a)  $\int e^{2x+3} dx = \frac{1}{2} \int e^{2x+3} \cdot (2x+3)' dx = \frac{1}{2} e^{2x+3} + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$

b)  $\int e^{-3x} dx = \frac{1}{-3} \int e^{-3x} \cdot (-3x)' dx = \frac{1}{-3} e^{-3x} + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$

c)  $\int e^{\sin x} (\cos x) dx = e^{\sin x} + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$

5°.  $\int (\cos x) dx = \sin x + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}; \int (\sin x) dx = -\cos x + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$

$$\int (\cos u(x)) \cdot u'(x) dx = \sin u(x) + c, \forall x \in \mathbb{I}, c \in \mathbb{R}; \int (\sin u(x)) \cdot u'(x) dx = -\cos u(x) + c, \forall x \in \mathbb{I}, c \in \mathbb{R}.$$

**Comentariu:**

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}, \text{ unde } a, b \in \mathbb{R}^*.$$

$$\int \sin(ax+b) dx = \frac{-\cos(ax+b)}{a} + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}, \text{ unde } a, b \in \mathbb{R}^*.$$

**Exemple:** a)  $\int \cos(3x+2) dx = \frac{1}{3} \int (\cos(3x+2)) \cdot 3 dx = \frac{1}{3} \sin(3x+2) + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$

b)  $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx = \sin(\ln x) + c, \forall x \in ]0, +\infty[, c \in \mathbb{R}.$

c)  $\int \sin(5x+7) dx = \frac{1}{5} \int (\sin(5x+7)) \cdot 5 dx = \frac{1}{5} (-\cos(5x+7)) + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$

d)  $\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} dx = -\cos(\sqrt{x}) + c, \forall x \in ]0, +\infty[, c \in \mathbb{R}.$

$$\int (\operatorname{tg} x) dx = \left\{ -\ln |\cos x| + c_k, k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \left] k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} \right[ , c_k \in \mathbb{R} \right.$$

$$\left. \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \left\{ \operatorname{tg} x + c_k, k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \left] k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} \right[ , c_k \in \mathbb{R} \right. \right.$$

$$\left. \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = \left\{ \operatorname{tg} x + c_k, k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \left] k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} \right[ , c_k \in \mathbb{R} \right. \right.$$

$$\left. \int (\operatorname{ctg} x) dx = \left\{ \ln |\sin x| + c_k, k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \left] k\pi, k\pi + \pi \right[ , c_k \in \mathbb{R} \right. \right.$$

$$\left. \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \left\{ -\operatorname{ctg} x + c_k, k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \left] k\pi, k\pi + \pi \right[ , c_k \in \mathbb{R} \right. \right.$$

$$\left. \int (1 + \operatorname{ctg}^2 x) dx = \left\{ -\operatorname{ctg} x + c_k, k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \left] k\pi, k\pi + \pi \right[ , c_k \in \mathbb{R} \right. \right.$$



$$\int (\operatorname{tg} u(x)) \cdot u'(x) dx = \left\{ -\ln |\cos u(x)| + c_k, k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } u(x) \in \right] k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} [ , c_k \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 u(x)} \cdot u'(x) dx = \left\{ \operatorname{tg} u(x) + c_k, k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } u(x) \in \right] k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} [ , c_k \in \mathbb{R}$$

$$\int (1 + \operatorname{tg}^2 u(x)) \cdot u'(x) dx = \left\{ \operatorname{tg} u(x) + c_k, k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } u(x) \in \right] k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} [ , c_k \in \mathbb{R}$$

$$\int (\operatorname{ctg} u(x)) \cdot u'(x) dx = \left\{ \ln |\sin u(x)| + c_k, k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } u(x) \in \right] k\pi, k\pi + \pi [ , c_k \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 u(x)} \cdot u'(x) dx = \left\{ -\operatorname{ctg} u(x) + c_k, k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } u(x) \in \right] k\pi, k\pi + \pi [ , c_k \in \mathbb{R}$$

$$\int (1 + \operatorname{ctg}^2 u(x)) \cdot u'(x) dx = \left\{ -\operatorname{ctg} u(x) + c_k, k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } u(x) \in \right] k\pi, k\pi + \pi [ , c_k \in \mathbb{R}$$

**Exemple: a)**  $\int \frac{\cos(2x)}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int \frac{1}{\cos^2 x} dx =$   
 $= -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + c_k, \forall x \in \mathbb{I}_k, c_k \in \mathbb{R}$

**b)**  $\int 2x \operatorname{tg}(x^2) dx = \left\{ -\ln |\cos x^2| + c_k, k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ a.î. } x^2 \in \right] k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} [ , c_k \in \mathbb{R}$

**c)**  $\int \frac{1}{\cos^2 x^3} \cdot 3x^2 dx = \left\{ \operatorname{tg} x^3 + c_k, k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ a.î. } x^3 \in \right] k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} [ , c_k \in \mathbb{R}$

6°. Pentru  $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$  și  $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$  se obține:

$$\int (\operatorname{ch} x) dx = \operatorname{sh} x + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}; \int (\operatorname{sh} x) dx = \operatorname{ch} x + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$$

$$\int (\operatorname{ch} u(x)) \cdot u'(x) dx = \operatorname{sh} u(x) + c, \forall x \in \mathbb{I}, c \in \mathbb{R}; \int (\operatorname{sh} u(x)) \cdot u'(x) dx = \operatorname{ch} u(x) + c, \forall x \in \mathbb{I}, c \in \mathbb{R}.$$

**Exemplul 1.1.3.** Să se calculeze

**a)**  $\int 2^x e^x dx, x \in \mathbb{R}.$

**Rezolvare.** etapa 1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^x e^x.$

$f$  este continuă pe  $\mathbb{R} \Rightarrow f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}.$

etapa 2. Se aplică tabelul cu primitive

$$\int 2^x e^x dx = \int (2e)^x dx = \frac{1}{\ln(2e)} (2e)^x + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}.$$

$$F(x; c) = \frac{2^x \cdot e^x}{1 + \ln 2} + c, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (variabilă)}, \forall c \in \mathbb{R} \text{ (constantă)}$$

sunt toate primitivele funcției  $f$  pe  $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ , familia de primitive fiind indexată după constanta  $c \in \mathbb{R}.$

**b)**  $\int x(x+1)(x+2) dx, x \in \mathbb{R}.$

**Rezolvare.** etapa 1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x(x+1)(x+2)$

$f$  este continuă pe  $\mathbb{R} \Rightarrow f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}.$

etapa 2. Se aplică teorema de liniaritate și tabelul cu primitive

$$\int x(x+1)(x+2) dx = \int (x^3 + 3x^2 + 2x) dx = \frac{x^4}{4} + x^3 + x^2 + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}.$$

$$F(x; c) = \frac{x^4}{4} + x^3 + x^2 + c, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (variabilă)}, \forall c \in \mathbb{R} \text{ (constantă)}$$

sunt toate primitivele funcției  $f$  pe  $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ , familia de primitive fiind indexată după constanta  $c \in \mathbb{R}.$

**c)**  $\int \left( \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx, x \in ]0, +\infty[$  - A se vedea Seminar.

## 1.2. Integrale nedefinite determinate cu formula integrării prin părți

**Teorema 1.2.1. (de integrare prin părți pentru integrala nedefinită)** Fie  $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$  un interval cu interior nevid. Dacă  $u, v : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sunt derivabile pe  $\mathbb{I}$  și funcția  $u' \cdot v$  admite primitive pe  $\mathbb{I}$ , atunci funcția  $u \cdot v'$  admite primitive pe  $\mathbb{I}$  și

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) dx, \forall x \in \mathbb{I}. \quad (1)$$

**Demonstrație.** Deoarece  $u$  și  $v$  sunt derivabile pe  $\mathbb{I} \Rightarrow u \cdot v$  este derivabilă pe  $\mathbb{I}$  și

$$(u \cdot v)'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x), \forall x \in \mathbb{I}.$$

Cum funcția  $u' \cdot v$  admite primitive pe  $\mathbb{I} \Rightarrow$  Se consideră  $H$  o primitivă a funcției  $u' \cdot v$ .

Conform formulei de derivare a  $u \cdot v$ , conform observației 1.1.2 și Teoremei 1.1.2  $\Rightarrow u \cdot v'$  admite primitive pe  $\mathbb{I}$  și  $u \cdot v - H$  este o astfel de primitivă, de unde rezultă și formula de calcul din enunț.

**Exemplul 1.2.1.** Să se calculeze:

a)  $\int x^2 \cos x dx, x \in \mathbb{R}$ ;

**Rezolvare.** etapa 1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 \cos x$

$f$  este continuă pe  $\mathbb{R} \Rightarrow f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .

etapa 2. Se aplică de două ori formula integrării prin părți, apoi tabelul

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos x dx &= \int x^2 (\sin x)' dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx = x^2 \sin x + 2 \int x (\cos x)' dx \\ &= x^2 \sin x + 2(x \cos x - \int 1 \cos x dx) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c, \\ &\forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$F(x; c) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (variabilă)}, \forall c \in \mathbb{R} \text{ (constantă)}$$

sunt toate primitivele funcției  $f$  pe  $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ , familia de primitive fiind indexată după constanta  $c \in \mathbb{R}$ .

b)  $\int x e^{-2x} dx, x \in \mathbb{R}$  - A se vedea seminar.

**REGULĂ:** Calculul primitivelor de tipul

$$\int P(x) \cdot \cos(ax + b) dx; \int P(x) \cdot \sin(ax + b) dx; \int P(x) \cdot e^{ax+b} dx$$

se poate face cu formula integrării prin părți, alegând

$$u(x) = P(x); v'(x) = \cos(ax + b) / \sin(ax + b) / e^{ax+b}.$$

Formula integrării prin părți se aplică de un număr de ori egal cu gradul polinomului, până se ajunge la calculul unei integrale pe baza unei formule din tabel.

c)  $\int (\cos^2 x) dx, x \in \mathbb{R}$ .

**Rezolvare.** etapa 1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos^2 x$

$f$  este continuă pe  $\mathbb{R} \Rightarrow f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .

etapa 2. modul 1. Se aplică formula integrării prin părți și tabelul

$$\begin{aligned} \int \cos x \cos x dx &= \int (\cos x) (\sin x)' dx = \cos x \sin x - \int \sin x \sin x dx = \cos x \sin x + \int (1 - \cos^2 x) dx = \\ &= \cos x \sin x + \int 1 dx - \int (\cos^2 x) dx = \cos x \sin x + x - \int (\cos^2 x) dx, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\int (\cos^2 x) dx = \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}.$$

$$F(x; c) = \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) + c, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (variabilă)}, \forall c \in \mathbb{R} \text{ (constantă)}$$

sunt toate primitivele funcției  $f$  pe  $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ , familia de primitive fiind indexată după constanta  $c \in \mathbb{R}$ .

modul 2. Se aplică formula  $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$  și tabelul

$$\int (\cos^2 x) dx = \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}.$$

Analog cu c), modul 1 sau modul 2, cu  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\int (\sin^2 x) dx = \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x) + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}.$$

**REGULĂ:** Calculul primitivelor de tipul

$$\int e^{ax} \cdot \cos (bx) dx, \int e^{ax} \cdot \sin (bx) dx,$$

$$\int \sin (ax) \cdot \cos (bx) dx, \int \sin (ax) \cdot \sin (bx) dx, \int \cos (ax) \cdot \cos (bx) dx,$$

se face cu formula integrării prin părți, aplicată de două ori, alegând inițial

$$u(x) = e^{ax}; v'(x) = \cos (bx) / \sin (bx).$$

$$u(x) = \sin (ax) / \cos (ax); v'(x) = \cos (bx) / \sin (bx).$$

Pentru cele cu produs de funcții trigonometrice, se pot folosi formulele de transformare a produselor în sume.

$$\sin x \cos y = \frac{\sin (x+y) + \sin (x-y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\cos x \cos y = \frac{\cos (x+y) + \cos (x-y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\sin x \sin y = \frac{-\cos (x+y) + \cos (x-y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

d)  $\int e^{ax} \cos (bx) dx, x \in \mathbb{R}$ , unde  $a, b \in \mathbb{R}^*$ ;

**Rezolvare.** etapa 1.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{ax} \cos (bx) dx$

$f$  este continuă pe  $\mathbb{R} \Rightarrow f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .

etapa 2. Se aplică de două ori formula integrării prin părți

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \cos (bx) dx &= \int e^{ax} \left( \frac{\sin (bx)}{b} \right)' dx = e^{ax} \cdot \frac{\sin (bx)}{b} - \int e^{ax} \cdot a \cdot \frac{\sin (bx)}{b} dx = \\ &= \frac{1}{b} e^{ax} \sin (bx) - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin (bx) dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin (bx) - \frac{a}{b} \int e^{ax} \left( \frac{\cos (bx)}{-b} \right)' dx = \\ &= \frac{1}{b} e^{ax} \sin (bx) - \frac{a}{b} \left( e^{ax} \cdot \frac{\cos (bx)}{-b} - \int e^{ax} \cdot a \cdot \frac{\cos (bx)}{-b} dx \right) = \\ &= \frac{1}{b} e^{ax} \sin (bx) + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos (bx) - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos (bx) dx \Rightarrow \\ &\left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right) \int e^{ax} \cos (bx) dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin (bx) + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos (bx) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\int e^{ax} \cos (bx) dx = \frac{be^{ax} \sin (bx) + ae^{ax} \cos (bx)}{a^2 + b^2} + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}.$$

$$F(x; c) = \frac{e^{ax} (b \sin (bx) + a \cos (bx))}{a^2 + b^2} + c, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (variabilă)}, \forall c \in \mathbb{R} \text{ (constantă)}$$

sunt toate primitivele funcției  $f$  pe  $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ , familia de primitive fiind indexată după constanta  $c \in \mathbb{R}$ .

Analog,

$$\int e^{ax} \sin (bx) dx = \frac{ae^{ax} \sin (bx) - be^{ax} \cos (bx)}{a^2 + b^2} + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}.$$

e)  $\int \cos (\ln x) dx, x \in ]0, +\infty[$ .

**Rezolvare.** etapa 1.  $f: ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos (\ln x)$ .

$f$  este continuă pe  $]0, +\infty[ \Rightarrow f$  admite primitive pe  $]0, +\infty[$ .

etapa 2. Se aplică formula integrării prin părți

$$\begin{aligned} \int \cos (\ln x) dx &= \int (\cos (\ln x)) \cdot (x)' dx = (\cos (\ln x)) \cdot (x) - \int (-1 \sin (\ln x)) \left( \frac{1}{x} \right) \cdot x dx \\ &= x \cos (\ln x) + \int \sin (\ln x) dx = x \cos (\ln x) + \int (\sin (\ln x)) \cdot (x)' dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x \cos(\ln x) + (\sin(\ln x)) \cdot (x) - \int (\cos(\ln x)) \left(\frac{1}{x}\right) \cdot x dx = \\
&= x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx \Rightarrow \\
\int \cos(\ln x) dx &= \frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + c, \forall x \in ]0, +\infty[, \forall c \in \mathbb{R}. \\
F(x; c) &= \frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + c, \forall x \in ]0, +\infty[ \text{ (variabilă)}, \forall c \in \mathbb{R} \text{ (constantă)}
\end{aligned}$$

sunt toate primitivele funcției  $f$  pe  $\mathbb{I} = ]0, +\infty[$ , familia de primitive fiind indexată după constanta  $c \in \mathbb{R}$ .

f)  $\int \sqrt{x^2 + 4} dx, x \in \mathbb{R}$ .

**Rezolvare.** etapa 1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ .

$f$  este continuă pe  $\mathbb{R} \Rightarrow f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .

etapa 2. modul 1.  $\int \sqrt{x^2 + 4} dx = \int (\sqrt{x^2 + 4}) x' dx = (\sqrt{x^2 + 4}) x - \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} \cdot x dx =$

$$\begin{aligned}
&= x\sqrt{x^2 + 4} - \int \frac{x^2 + 4}{\sqrt{x^2 + 4}} dx + \int \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = x\sqrt{x^2 + 4} - \int \sqrt{x^2 + 4} dx + 4 \ln(x + \sqrt{x^2 + 2^2}) \Rightarrow \\
\int \sqrt{x^2 + 4} dx &= \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2 + 4} + 4 \ln(x + \sqrt{x^2 + 2^2})) + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

○ modul 2.  $\int \sqrt{x^2 + 4} dx = \int \frac{x^2 + 4}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 4}} dx + \int \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$ .

Se folosește  $(\sqrt{x^2 + 4})' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$  și se aplică formula integrării prin părți  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2 + 4} dx &= \int x (\sqrt{x^2 + 4})' dx + \int \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = x (\sqrt{x^2 + 4}) - \int 1 \sqrt{x^2 + 4} dx + 4 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx \\
&= x\sqrt{x^2 + 4} - \int \sqrt{x^2 + 4} dx + 4 \ln(x + \sqrt{x^2 + 2^2}) \Rightarrow \\
\int \sqrt{x^2 + 4} dx &= \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2 + 4} + 4 \ln(x + \sqrt{x^2 + 2^2})) + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

$$F(x; c) = \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2 + 4} + 4 \ln(x + \sqrt{x^2 + 2^2})) + c, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (variabilă)}, \forall c \in \mathbb{R} \text{ (constantă)}$$

sunt toate primitivele funcției  $f$  pe  $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ , familia de primitive fiind indexată după constanta  $c \in \mathbb{R}$ .

**Observația 1.2.1.** Procedând ca în Exemplitul 1.2.1, f), Tabelul de primitive se poate completa cu:

7°. • Pentru  $a \in ]0, +\infty[$  fixat  $\Rightarrow$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})) + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}.$$

$$\int \sqrt{u^2(x) + a^2} u'(x) dx = \frac{1}{2} (u(x) \sqrt{u^2(x) + a^2} + a^2 \ln(u(x) + \sqrt{u^2(x) + a^2})) + c, \forall x \in \mathbb{I}, \forall c \in \mathbb{R}.$$

• Pentru  $a \in ]0, +\infty[$  fixat  $\Rightarrow$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \begin{cases} \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2 - a^2} + a^2 \ln(-x - \sqrt{x^2 - a^2})) + c_1, & \forall x \in ]-\infty, -a[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2 - a^2} + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})) + c_2, & \forall x \in ]a, +\infty[, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\int \sqrt{u^2(x) - a^2} u'(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2} (u(x) \sqrt{u^2(x) - a^2} + a^2 \ln(-u(x) - \sqrt{u^2(x) - a^2})) + c_1, & \forall u(x) \in ]-\infty, -a[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{2} (u(x) \sqrt{u^2(x) - a^2} + a^2 \ln(u(x) + \sqrt{u^2(x) - a^2})) + c_2, & \forall u(x) \in ]a, +\infty[, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

• Pentru  $a \in ]0, +\infty[$  fixat  $\Rightarrow$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left( x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + c, \forall x \in ]-a, a[, c \in \mathbb{R}.$$

$$\int \sqrt{a^2 - u^2(x)} u'(x) dx = \frac{1}{2} \left( u(x) \sqrt{a^2 - u^2(x)} + a^2 \arcsin \frac{u(x)}{a} \right) + c, \forall u(x) \in ]-a, a[, c \in \mathbb{R}.$$

**Exemple:** a)  $\int \sqrt{x^2 + 2} dx = \frac{1}{2} \left( x\sqrt{x^2 + 2} + 2 \ln \left( x + \sqrt{x^2 + 2} \right) \right) + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}.$

b)  $\int \sqrt{x^2 + x + 1} dx = \int \sqrt{x^2 + 2x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} dx = \int \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)' dx =$   
 $= \frac{1}{2} \left( \left(x + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{3}{4} \ln \left( \left(x + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right) \right) + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}.$

c)  $\int \sqrt{x^2 - 3} dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( x\sqrt{x^2 - 3} + 3 \ln \left( -x - \sqrt{x^2 - 3} \right) \right) + c_1, & \forall x \in ]-\infty, -\sqrt{3}[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{2} \left( x\sqrt{x^2 - 3} + 3 \ln \left( x + \sqrt{x^2 - 3} \right) \right) + c_2, & \forall x \in ]\sqrt{3}, +\infty[, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

d)  $\int \sqrt{x^2 - 5x + 6} dx = \int \sqrt{x^2 + 2x \cdot \frac{-5}{2} + \left(\frac{-5}{2}\right)^2 - \left(\frac{-5}{2}\right)^2 + 6} dx =$   
 $= \int \sqrt{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} \cdot \left(x - \frac{5}{2}\right)' dx =$   
 $= \begin{cases} \frac{1}{2} \left( \left(x - \frac{5}{2}\right) \sqrt{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} + \frac{1}{4} \ln \left( -\left(x - \frac{5}{2}\right) - \sqrt{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} \right) \right) + c_1, & \forall x \in ]-\infty, 2[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{2} \left( \left(x - \frac{5}{2}\right) \sqrt{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} + \frac{1}{4} \ln \left( \left(x - \frac{5}{2}\right) + \sqrt{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} \right) \right) + c_2, & \forall x \in ]3, +\infty[, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

e)  $\int \sqrt{\pi - x^2} dx = \frac{1}{2} \left( x\sqrt{\pi - x^2} + \pi \arcsin \frac{x}{\sqrt{\pi}} \right) + c, \forall x \in ]-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}[, c \in \mathbb{R}.$

f)  $\int \sqrt{3x - x^2 - 2} dx = \int \sqrt{-(x^2 - 3x + 2)} dx = \int \sqrt{-\left[x^2 + 2x \cdot \frac{-3}{2} + \left(\frac{-3}{2}\right)^2 - \left(\frac{-3}{2}\right)^2 + 2\right]} dx =$   
 $= \int \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2} \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right)' dx =$   
 $= \frac{1}{2} \left( \left(x - \frac{3}{2}\right) \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2} + \frac{1}{4} \arcsin \frac{x - \frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} \right) + c, \forall x \in ]1, 2[, c \in \mathbb{R}.$

### 1.3. Integrale nedefinite determinate cu teoreme de schimbare de variabilă de integrare

**Teorema 1.3.1. (teorema 1 de schimbare de variabilă în integrala nedefinită)** Fie  $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $g : \mathbb{J} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $\mathbb{I}$  și  $\mathbb{J}$  sunt intervale cu interior nevid din  $\mathbb{R}$ . Fie  $u : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{J} \subseteq \mathbb{R}$  o funcție derivabilă pe  $\mathbb{I}$ , cu proprietatea că

$$f = (g \circ u) \cdot u' \text{ pe } \mathbb{I}.$$

Dacă  $g$  admite o primitivă  $G$  pe  $\mathbb{J}$ , atunci  $f$  admite  $G \circ u$  drept primitivă pe intervalul  $\mathbb{I}$ , adică

$$\int f(x) dx = (G \circ u)(x) + c, \forall x \in \mathbb{I}, \forall c \in \mathbb{R}, \text{ adică}$$

$$\int g(u(x)) \cdot u'(x) dx = G(u(x)) + c, \forall x \in \mathbb{I}, \forall c \in \mathbb{R}.$$

**Teorema 1.3.2. (tabel cu integrale nedefinite).** Scris și exemplificat anticipat în Secțiunea 1.1.1.

**Exemplul 1.3.1.** Să se calculeze

a)  $\int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx, x \in \mathbb{R}$  -A se vedea Seminar

b)  $\int \frac{1}{\sin x} dx, x \in ]0, \pi[.$

**Rezolvare.** etapa 1.  $f : ]0, \pi[ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sin x}$

$f$  este continuă pe  $]0, \pi[ \Rightarrow f$  admite primitive pe  $]0, \pi[$ .

etapa 2. Se determină  $F(x; c)$ , aplicând prima teoremă de schimbare de variabilă de integrare.

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}} dx = \int \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} dx$$

modul 1. Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$\begin{cases} \underbrace{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}_{=u(x), x \in ]0, \pi[} = t, t \in ]0, +\infty[ \text{ se diferențiază} \\ (1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}) \cdot \frac{1}{2} dx = dt \end{cases}$$

Se înlocuiește  $\Rightarrow F(t; \tilde{c}) = \int \frac{dt}{t} = \ln t + \tilde{c}, \forall t \in ]0, +\infty[, \forall \tilde{c} \in \mathbb{R}$ .

Se revine la substituție  $\Rightarrow$

$$F(x; c) = \ln \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + c, \forall x \in ]0, \pi[, \forall c \in \mathbb{R}$$

sunt toate primitivele funcției  $f$  pe  $]0, \pi[$ , familia de primitive fiind indexată după constanta  $c \in \mathbb{R}$ .

modul 2. Se determină  $F(x; c)$ , aplicând Teorema 1.3.2

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} dx = \int \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)' dx = \ln \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + c, \forall x \in ]0, \pi[, \forall c \in \mathbb{R}$$

$$F(x; c) = \ln \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + c, \forall x \in ]0, \pi[, \forall c \in \mathbb{R}$$

sunt toate primitivele funcției  $f$  pe  $]0, \pi[$ , familia de primitive fiind indexată după constanta  $c \in \mathbb{R}$ .

c)  $\int \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} dx, x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

**Rezolvare.** etapa 1.  $f : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}$

$f$  este continuă pe  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \Rightarrow f$  admite primitive pe  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

etapa 2. Se determină  $F(x; c)$ , aplicând prima teoremă de schimbare de variabilă de integrare.

$$\int \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} dx = \int \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} dx$$

modul 1. Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$\begin{cases} \underbrace{\operatorname{tg} x}_{=u(x), x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} = v, v \in \mathbb{R} \text{ se diferențiază} \\ (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = dv \end{cases}$$

Se înlocuiește  $\Rightarrow F(v; \tilde{c}) = \int \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}} dt = \ln \left( v + \sqrt{1 + v^2} \right) + \tilde{c}, \forall v \in \mathbb{R}, \forall \tilde{c} \in \mathbb{R}$ .

Se revine la substituție  $\Rightarrow$

$$F(x; c) = \ln \left( \operatorname{tg} x + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} \right) + c, \forall x \in \mathbb{I}, \forall c \in \mathbb{R}$$

sunt toate primitivele funcției  $f$  pe  $\mathbb{I}$ , familia de primitive fiind indexată după constanta  $c \in \mathbb{R}$ .

$$\text{modul 2. } \int \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} dx = \int \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} \cdot (\operatorname{tg} x)' dx$$

$$= \ln \left( \operatorname{tg} x + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} \right), \forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \forall c \in \mathbb{R}$$

$$F(x; c) = \ln \left( 1 + \sin^2 x \right), \forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \forall c \in \mathbb{R}$$

sunt toate primitivele funcției  $f$  pe  $\mathbb{I} = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , familia de primitive fiind indexată după constanta  $c \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 1.3.2. (teorema 2 de schimbare de variabilă în integrala nedefinită)** Fie  $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $g : \mathbb{J} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $\mathbb{I}$  și  $\mathbb{J}$  sunt intervale cu interior nevid din  $\mathbb{R}$ . Fie  $v : \mathbb{J} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$  o funcție bijectivă și derivabilă pe  $\mathbb{J}$ , cu proprietatea că

$$v' \neq 0 \text{ pe } \mathbb{J} \text{ și } g = (f \circ v) \cdot v' \text{ pe } \mathbb{J}.$$

Dacă  $g$  admite o primitivă  $G$  pe  $\mathbb{J}$ , atunci  $f$  admite  $G \circ v^{-1}$  drept primitivă pe intervalul  $\mathbb{I}$ , adică

$$\int f(x) dx = (G \circ v^{-1})(x) + c, \forall x \in \mathbb{I}, \forall c \in \mathbb{R}, \text{ adică}$$

$$\int f(x) dx = G(v^{-1}(x)) + c, \forall x \in \mathbb{I}, \forall c \in \mathbb{R}.$$

**Exemplul 1.3.2.** Să se calculeze:

a)  $\int \sin \sqrt{x} dx, x \in ]0, +\infty[$

**Rezolvare.** etapa 1.  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin \sqrt{x}$

$f$  este continuă pe  $]0, +\infty[ \Rightarrow f$  admite primitive pe  $\mathbb{I} \subseteq ]0, +\infty[$

etapa 2. Se determină  $F(x; c)$ , aplicând a doua teoremă de schimbare de variabilă de integrare.

Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$\begin{cases} \sqrt{x} = t, t \in ]0, +\infty[ \text{ se inversează} \\ x = t^2, t \in ]0, +\infty[ \text{ se diferențiază} \\ dx = 2tdt \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Se înlocuiește} \Rightarrow F(t; \tilde{c}) &= \int (\sin t) 2tdt = -2 \int t (\cos t)' dt = -2t \cos t + 2 \int \cos t dt \\ &= -2t \cos t + 2 \sin t + \tilde{c}, \forall t \in ]0, +\infty[, \forall \tilde{c} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Se revine la substituție  $\Rightarrow$

$$F(x; c) = -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + c, \forall x \in ]0, +\infty[, \forall c \in \mathbb{R}$$

sunt toate primitivele funcției  $f$  pe  $\mathbb{I} = ]0, +\infty[$ , familia de primitive fiind indexată după constanta  $c \in \mathbb{R}$ .

#### 1.4. Integrale nedefinite având ca integrant funcții raționale în $x$

**Forma generală:**  $\int R(x) dx, x \in \mathbb{I},$  (2)

unde  $R : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}, R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  este funcție rațională în  $x$ .

**Rezolvare: I.** Dacă  $\text{grad } P \geq \text{grad } Q$  atunci, conform teoremei împărțirii cu rest, există funcțiile polinomiale  $K, P_1$  cu  $\text{grad } P_1 < \text{grad } Q$  astfel încât

$$P(x) = K(x) \cdot Q(x) + P_1(x), \forall x \in \mathbb{I} \Rightarrow \int R(x) dx = \int K(x) dx + \int \frac{P_1(x)}{Q(x)} dx, \forall x \in \mathbb{I}.$$

$$\int K(x) dx \text{ se determină folosind, pentru } n \in \mathbb{N}, \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}.$$

$$\int \frac{P_1(x)}{Q(x)} dx \text{ se determină folosind } \mathbf{II}.$$

**II.** Dacă  $\text{grad } P < \text{grad } Q$  atunci  $R$  se descompune în fracții simple și se aplică teoria din liceu pentru a calcula

$$\int \frac{A}{(x-a)^m} dx, x \in \mathbb{I}, \text{ unde } A \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}^* \text{ și}$$

$$\int \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^m} dx, x \in \mathbb{I}, \text{ unde } A, B \in \mathbb{R}, a, b, c \in \mathbb{R} \text{ cu } b^2 - 4ac < 0, m \in \mathbb{N}^*.$$

În descompunerea funcției  $R(x)$  în fracții simple apar situațiile:

- $Q(x)$  are rădăcini reale simple;
- $Q(x)$  are rădăcini reale multiple;
- $Q(x)$  are rădăcini complexe conjugate simple;
- $Q(x)$  are rădăcini complexe conjugate multiple.

**Comentariu.** Cazurile  $I$  și  $II$  din teorie se pot reduce la determinarea directă a coeficienților polinomului  $K$  cu grad  $K = \text{grad } P - \text{grad } Q$  și a coeficienților descompunerii în fracții simple pentru  $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$  din relația

$$R(x) = K(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}, \forall x \in \mathbb{I}.$$

**Exemplul 1.4.1.** Să se calculeze >

a)  $\int \frac{2x+1}{3x^2+2x+3} dx, x \in \mathbb{R}.$

**Rezolvare.** etapa 1.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x+1}{3x^2+2x+3}$

$f$  este continuă pe  $\mathbb{R} \Rightarrow f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$

etapa 2. Se determină  $F(x; c)$ , aplicând teoria.

Se observă că  $f$  este de forma (2), cu  $P(x) = 2x+1, Q(x) = 3x^2+2x+3, \Pi.$

$$Q(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1+2i\sqrt{2}}{3} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, & m(x_1) = 1 \\ x_2 = \frac{-1-2i\sqrt{2}}{3} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, & m(x_2) = 1 \end{cases}$$

Cum  $\Delta < 0 \Rightarrow f$  este deja fracție simplă.

Se observă că  $(3x^2+2x+3)' = 6x+2 \neq 3(2x+1)$ . Atunci

$$\begin{aligned} F(x; c) &= \frac{1}{3} \int \frac{6x+3}{3x^2+2x+3} dx = \frac{1}{3} \int \frac{6x+2}{3x^2+2x+3} dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{3x^2+2x+3} dx = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{(3x^2+2x+3)'}{3x^2+2x+3} dx + \frac{1}{3 \cdot 3} \int \frac{(x+\frac{1}{3})'}{(x+\frac{1}{3})^2 + (\frac{2\sqrt{2}}{3})^2} dx = \\ &= \frac{1}{3} \ln(3x^2+2x+3) + \frac{1}{3 \cdot 3} \cdot \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} \arctg \frac{x+\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

sunt toate primitivele funcției  $f$  pe  $\mathbb{R}$ , familia de primitive fiind indexată după constanta  $c \in \mathbb{R}$ .

b)  $\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x} dx, x \in ]0, +\infty[.$

**Rezolvare.** etapa 1.  $f: ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}$

$f$  este continuă pe  $]0, +\infty[ \Rightarrow f$  admite primitive pe  $]0, +\infty[$

etapa 2. Se determină  $F(x; c)$ , aplicând teoria. Se observă că

$$(x^3+2x^2+x)' = 3x^2+4x+1 \neq x^2-3x+2.$$

Atunci, cum  $\text{grad } P < \text{grad } Q$ , se descompune  $f$  în fracții simple. Se poate arăta că

$$\begin{aligned} \frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2} &= \frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{6}{(x+1)^2}, \forall x \in ]0, +\infty[ \Rightarrow \\ \int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x} dx &= \int \left( \frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{6}{(x+1)^2} \right) dx = 2 \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{(x+1)'}{x+1} dx - 6 \int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \\ &= 2 \ln x + \ln(x+1) - 6 \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + c, \forall x \in ]0, +\infty[, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

sunt toate primitivele funcției  $f$  pe  $]0, +\infty[$ , indexate după constantele  $c \in \mathbb{R}$ .

c)  $\int \frac{1}{x^3+1} dx, x \in ]-1, +\infty[.$



**Rezolvare.** etapa 1.  $f : ]-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^3 + 1}$

$f$  este continuă pe  $]-1, +\infty[ \Rightarrow f$  admite primitive pe  $]0, +\infty[$

etapa 2. Se determină  $F(x; c)$ , aplicând teoria. Se observă că

$$(x^3 + 1)' = 3x^2 \neq 1.$$

Atunci, cum  $\text{grad } P < \text{grad } Q$ , se descompune  $f$  în fracții simple. Se poate arăta că

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{x + 1} - \frac{\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}}{x^2 - x + 1}, \forall x \in ]-1, +\infty[ \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^3 + 1} dx &= \int \left( \frac{\frac{1}{3}}{x + 1} - \frac{\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}}{x^2 - x + 1} \right) dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x + 1} dx - \frac{1}{6} \int \frac{2x - 4}{x^2 - x + 1} dx = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x + 1} (x + 1)' dx - \frac{1}{6} \int \frac{1}{x^2 - x + 1} (x^2 - x + 1)' dx - \frac{-3}{6} \int \frac{1}{(x - \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} (x - \frac{1}{2})' dx = \\ &= \frac{1}{3} \ln(x + 1) - \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctg \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c, \forall x \in ]-1, +\infty[, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

sunt toate primitivele funcției  $f$  pe  $]-1, +\infty[$ , indexate după constantele  $c \in \mathbb{R}$ .

d)  $\int \frac{1}{x^4 + 4} dx, x \in \mathbb{R}$ .

**Rezolvare.** etapa 1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^4 + 4}$

$f$  este continuă pe  $\mathbb{R} \Rightarrow f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$

etapa 2. Se determină  $F(x; c)$ , aplicând teoria. Se observă că

$$(x^4 + 4)' = 4x^3 \neq 1.$$

Atunci, cum  $\text{grad } P < \text{grad } Q$ , se descompune  $f$  în fracții simple. Se poate arăta că

$$\frac{1}{x^4 + 4} = \frac{\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}}{x^2 + 2x + 2} - \frac{\frac{1}{8}x - \frac{1}{4}}{x^2 - 2x + 2}, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^4 + 4} dx &= \int \left( \frac{\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}}{x^2 + 2x + 2} - \frac{\frac{1}{8}x - \frac{1}{4}}{x^2 - 2x + 2} \right) dx = \frac{1}{16} \int \frac{2x + 4}{x^2 + 2x + 2} dx - \frac{1}{16} \int \frac{2x - 4}{x^2 - 2x + 2} dx = \\ &= \frac{1}{16} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2} dx + \frac{1}{16} \int \frac{2}{x^2 + 2x + 2} dx - \frac{1}{16} \int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2} dx - \frac{1}{16} \int \frac{-2}{x^2 - 2x + 2} dx = \\ &= \frac{1}{16} \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} (x^2 + 2x + 2)' dx + \frac{1}{8} \int \frac{1}{(x + 1)^2 + 1^2} (x + 1)' dx - \\ &- \frac{1}{16} \int \frac{1}{x^2 - 2x + 2} (x^2 - 2x + 2)' dx + \frac{1}{8} \int \frac{1}{(x - 1)^2 + 1^2} (x - 1)' dx = \\ &= \frac{1}{16} \ln(x^2 + 2x + 2) + \frac{1}{8} \frac{1}{1} \arctg \frac{x + 1}{1} - \frac{1}{16} \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{1}{8} \frac{1}{1} \arctg \frac{x - 1}{1} + c = \\ &= \frac{1}{16} \ln \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 2x + 2} + \frac{1}{8} (\arctg(x + 1) + \arctg(x - 1)) + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

sunt toate primitivele funcției  $f$  pe  $\mathbb{R}$ , indexate după constantele  $c \in \mathbb{R}$ .

Se poate folosi, pentru  $u, v \in [0, 1[$ ,  $\arctg u + \arctg v = \arctg \frac{u + v}{1 - uv}$ .

e)  $\int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx, x \in \mathbb{R}$ .

**Rezolvare.** etapa 1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$

$f$  este continuă pe  $\mathbb{R} \Rightarrow f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$

etapa 2. Se determină  $F(x; c)$ , aplicând teoria. Se observă că este deja fracție simplă și că

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{x^2+1}\right)' &= \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \neq \frac{1}{(x^2+1)^2} \\
\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx &= \int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{1}{x^2+1} dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \\
&= \int \frac{1}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int x \cdot \frac{-2x}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{1}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int x \cdot \left(\frac{1}{x^2+1}\right)' dx = \\
&= \int \frac{1}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \left(x \cdot \frac{1}{x^2+1} - \int 1 \cdot \frac{1}{x^2+1} dx\right) = \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \arctg x + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

sunt toate primitivele funcției  $f$  pe  $\mathbb{R}$ , indexate după constantele  $c \in \mathbb{R}$ .

### 1.5. Integrale nedefinite având ca integrant funcții iraționale în $x$ , reductibile la cele din Secțiunea 1.4

**1.5.1. Forma generală:** 
$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_p}{n_p}}\right) dx, x \in \mathbb{I}, \quad (3)$$

unde  $R : \mathbb{I}_0 \times \mathbb{I}_1 \times \dots \times \mathbb{I}_p \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $R(y_0, y_1, \dots, y_p) = \frac{P(y_0, y_1, \dots, y_p)}{Q(y_0, y_1, \dots, y_p)}$  este funcție rațională în  $y_0 =$

$x, y_1 = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, y_p = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_p}{n_p}}$ , iar  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $m_1, \dots, m_p$  sunt numere întregi,  $n_1, \dots, n_p$  sunt numere întregi nenule astfel încât macar unul din numerele raționale  $\frac{m_i}{n_i}, i \in \{1, \dots, p\}$  să nu fie număr întreg.

**Rezolvare:** Se face schimbarea de variabilă de integrare: 
$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n, \quad (3')$$

unde  $n$  este cel mai mic multiplu comun al numerelor  $n_1, \dots, n_p$ , se obține o integrală ca în Secțiunea 1.4 în variabila  $t$ , se calculează și se revine la substituție.

**Exemplul 1.5.1.1.** Să se calculeze:

a)  $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx, x \in \mathbb{I}$ . -A se vedea Seminar.

b)  $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx, x \in ]1, +\infty[$ .

**Rezolvare.** etapa 1.  $CE : \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{x+1}{x-1} > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$

$$f : ]1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

$f$  este continuă pe  $]1, +\infty[ \Rightarrow f$  admite primitive pe  $\mathbb{I} = ]1, +\infty[$

etapa 2. Se determină  $F(x; c)$ , aplicând teoria.

Se observă că  $f(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}}{x^1}$ , adică e de forma (3), cu  $a = 1, b = 1, c = 1, d = -1, m_1 = 1, n_1 = 2$ . Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x-1} = t^2, t \in ]1, +\infty[ \text{ se inversează} \\ x = \frac{t^2+1}{t^2-1}, t \in ]1, +\infty[ \text{ se diferențiază} \\ dx = \frac{-4t}{(t^2-1)^2} dt \end{cases}$$

Se înlocuiește  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} F(t; \tilde{c}) &= \int \frac{t^2-1}{t^2+1} \cdot t \cdot \frac{-4t}{(t^2-1)^2} dt = \int \frac{-4t^2}{(t^2+1)(t^2-1)} dt = \int \left( -2 \frac{1}{t^2+1} - 2 \frac{1}{t^2-1} \right) dt = \\ &= -2 \operatorname{arctg} t - \ln \frac{t-1}{t+1} + \tilde{c}, \forall t \in ]1, +\infty[, \forall \tilde{c} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Se revine la substituție  $\Rightarrow$

$$F(x; c) = -2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \ln \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1} + c, \forall x \in ]1, +\infty[, \forall c \in \mathbb{R}$$

sunt toate primitivele funcției  $f$  pe  $\mathbb{I} = ]10, +\infty[$ , familia de primitive fiind indexată după constanta  $c \in \mathbb{R}$ .

○ **1.5.2. Forma generală:** 
$$\int \frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx, x \in \mathbb{I}, \quad (4)$$

unde  $P_m$  este funcție polinomială de grad  $m$  în variabila  $x$ , iar  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

**Rezolvare:** modul 1. (mai ales pentru  $m=0, m=1, m=2$ ) Folosind

- ( $m=0, m=1, m=2$ ) modul de calcul pentru  $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx, x \in \mathbb{I}$ ;
- ( $m=1, m=2$ )  $\left( \sqrt{ax^2+bx+c} \right)' = \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$
- ( $m=2$ ) modul de calcul pentru  $\int \sqrt{ax^2+bx+c} dx, x \in \mathbb{I}$ ;

modul 2. (mai ales pentru  $m \geq 2$ ) Se consideră relația

$$\int \frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = Q_{m-1}(x) \cdot \sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \cdot \int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx, x \in \mathbb{I}, \quad (4')$$

unde  $Q_{m-1}$  este funcție polinomială de grad  $m$  în variabila  $x$  cu coeficienți necunoscuți și  $\lambda \in \mathbb{R}$  este necunoscut. Coeficienții funcției polinomiale  $Q_{m-1}$  și numărul  $\lambda \in \mathbb{R}$  se determină derivând relația (4'), apoi indentificând coeficienții polinoamelor ce apar.

modul 3. Folosind substituțiile Euler de mai jos.

**Exemplul 1.5.2.1.** Să se calculeze:

a)  $\int \frac{2x+1}{\sqrt{3x^2-6x+5}} dx, x \in \mathbb{I}$ .

**Rezolvare.** etapa 1.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{3x^2-6x+5}}$

$f$  este continuă pe  $\mathbb{R} \Rightarrow f$  admite primitive pe  $\mathbb{I} = \mathbb{R}$

etapa 2. Se determină integrala, aplicând teoria. Se observă că  $f$  este de forma (4), cu  $P_1(x) = 2x+1, m=1$  și  $a=3, b=-6, c=5$ .

modul 1. Se folosește  $\left( \sqrt{3x^2-6x+5} \right)' = \frac{6x-6}{2\sqrt{3x^2-6x+5}} = \frac{3x-3}{\sqrt{3x^2-6x+5}}$ . Atunci

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{3x^2-6x+5}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{6x-6+9}{\sqrt{3x^2-6x+5}} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{3} \int \left( \sqrt{3x^2 - 6x + 5} \right)' dx + 3 \int \frac{1}{\sqrt{3x^2 - 6x + 5}} dx = \\
&= \frac{2}{3} \int \left( \sqrt{3x^2 - 6x + 5} \right)' dx + \frac{3}{\sqrt{3}} \int \frac{(x-1)'}{\sqrt{(x-1)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}} dx = \\
&= \frac{2}{3} \sqrt{3x^2 - 6x + 5} + \sqrt{3} \ln \left( x - 1 + \sqrt{(x-1)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} \right), \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

sunt toate primitivele funcției  $f$  pe  $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ , familia de primitive fiind indexată după constanta  $c \in \mathbb{R}$ .  
modul 3. Cu substituții Euler.

b)  $\int \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{2x^2 - 3x + 2}} dx, x \in \mathbb{I}$ .

**Rezolvare.** etapa 1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{2x^2 - 3x + 2}}$

$f$  este continuă pe  $\mathbb{R} \Rightarrow f$  admite primitive pe  $\mathbb{I} = \mathbb{R}$

etapa 2. Se determină  $F(x; c)$ , aplicând teoria.

Se observă că  $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{2x^2 - 3x + 2}}$ , adică este de forma (4), cu  $P_2(x) = x^2 + x + 1, m = 2$  și  $a = 2, b = -3, c = 2$ .

modul 1. Se folosește  $\left( \sqrt{2x^2 - 3x + 2} \right)' = \frac{4x - 3}{2\sqrt{2x^2 - 3x + 2}}$ . Se obține:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{2x^2 - 3x + 2}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x^2 + 2x + 2}{\sqrt{2x^2 - 3x + 2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x^2 - 3x + 2) + 5x}{\sqrt{2x^2 - 3x + 2}} dx = \\
&= \frac{1}{2} \int \sqrt{2x^2 - 3x + 2} dx + \frac{5}{2 \cdot 4} \int \frac{4x - 3}{\sqrt{2x^2 - 3x + 2}} dx + \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 4} \int \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 3x + 2}} dx
\end{aligned}$$

Se observă că:  $2x^2 - 3x + 2 = 2 \left( x^2 - \frac{3}{2}x + 1 \right) = 2 \left( \left( x - \frac{3}{4} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{7}}{4} \right)^2 \right)$ .

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{2x^2 - 3x + 2}} dx = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \int \sqrt{\left( x - \frac{3}{4} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{7}}{4} \right)^2} \cdot \left( x - \frac{3}{4} \right)' dx + \frac{5}{2 \cdot 2} \int \left( \sqrt{2x^2 - 3x + 2} \right)' dx + \\
&\quad + \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{\left( x - \frac{3}{4} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{7}}{4} \right)^2}} \left( x - \frac{3}{4} \right)' dx = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} \left( \left( x - \frac{3}{4} \right) \sqrt{\left( x - \frac{3}{4} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{7}}{4} \right)^2} + \left( \frac{\sqrt{7}}{4} \right)^2 \ln \left( \left( x - \frac{3}{4} \right) + \sqrt{\left( x - \frac{3}{4} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{7}}{4} \right)^2} \right) \right) + \\
&\quad + \frac{5}{2 \cdot 2} \sqrt{2x^2 - 3x + 2} + \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left( \left( x - \frac{3}{4} \right) + \sqrt{\left( x - \frac{3}{4} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{7}}{4} \right)^2} \right) + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

modul 2. Se consideră relația

$$(*) \int \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{2x^2 - 3x + 2}} dx = Q_1(x) \cdot \sqrt{2x^2 - 3x + 2} + \lambda \cdot \int \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 3x + 2}} dx, x \in \mathbb{I},$$

unde  $Q_1$  este funcție polinomială de grad 1 în variabila  $x$  cu coeficienți necunoscuți, adică  $Q_0(x) = a_0 + a_1x$  și  $\lambda \in \mathbb{R}$  este necunoscut. Se determină  $a_0, a_1$  și  $\lambda$ . Se derivează (\*)  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{2x^2 - 3x + 2}} &= a_1 \cdot \sqrt{2x^2 - 3x + 2} + (a_0 + a_1x) \frac{4x - 3}{2\sqrt{2x^2 - 3x + 2}} + \lambda \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 3x + 2}}, x \in \mathbb{I} \Rightarrow \\
2(x^2 + x + 1) &= 2a_1(2x^2 - 3x + 2) + (a_0 + a_1x)(4x - 3) + 2\lambda, x \in \mathbb{I}.
\end{aligned}$$

Identificarea coeficienților puterilor lui  $x \Rightarrow$

$$\begin{cases} 2 = 4a_1 + 4a_0 \\ 2 = -6a_1 - 3a_1 + 4a_0 \\ 2 = 4a_1 - 3a_0 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{4} \\ a_0 = \frac{2 + \frac{9}{4}}{4} = \frac{17}{16} \\ \lambda = 1 - \frac{4}{2} + \frac{3 \cdot 17}{2 \cdot 16} = \frac{67}{32} \end{cases}$$

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{2x^2 - 3x + 2}} dx = \left(\frac{1}{4} + \frac{17}{16}x\right) \sqrt{2x^2 - 3x + 2} + \frac{67}{32} \int \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 3x + 2}} dx =$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{17}{16}x\right) \sqrt{2x^2 - 3x + 2} + \frac{67}{32\sqrt{2}} \int \frac{(x - \frac{3}{4})'}{\sqrt{(x - \frac{3}{4})^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}} dx =$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{17}{16}x\right) \sqrt{2x^2 - 3x + 2} + \frac{67}{32\sqrt{2}} \ln \left( \left(x - \frac{3}{4}\right) + \sqrt{\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2} \right) + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}$$

sunt toate primitivele funcției  $f$  pe  $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ , familia de primitive fiind indexată după constanta  $c \in \mathbb{R}$ .  
modul 3. Cu substituții Euler.

**1.5.3. Forma generală:** 
$$\int \frac{1}{(x-d)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}} dx, x \in \mathbb{I}, \quad (5)$$

unde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  și  $n \in \mathbb{N}^*$

**Rezolvare:** modul 1. Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$\frac{1}{x-d} = t, \quad (5')$$

și se obține o integrală ca în Secțiunea 1.5.2 în variabila  $t$ , se calculează și se revine la substituție.  
modul 2. Folosind substituțiile Euler de mai jos.

**Exemplul 1.5.3.1.** Să se calculeze

a)  $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx, x \in ]-\infty, 0[$

**Rezolvare.** etapa 1.  $f : ]-\infty, 0[ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$

$f$  este continuă pe  $]-\infty, 0[ \Rightarrow f$  admite primitive pe  $]-\infty, 0[$

etapa 2. Se determină  $F(x; c)$ , aplicând teoria.

Se observă că  $f(x) = \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$ , adică e de forma (5), cu  $d = 0, a = 1, b = 0, c = 1, n = 2$ . Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = t, t \in ]-\infty, 0[ \text{ se inversează} \\ x = \frac{1}{t}, t \in ]-\infty, 0[ \text{ se diferențiază} \\ dx = \frac{-1}{t^2} dt \end{cases}$$

Se înlocuiește  $\Rightarrow$

$$F(t; \tilde{c}) = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{t}\right)^2}} \frac{-1}{t^2} dt \stackrel{t < 0}{|t| = -t} \int \frac{t^2}{-\sqrt{t^2 + 1}} (-1) dt = \int \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}} dt$$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}} dt = \int t \left(\sqrt{t^2 + 1}\right)' dt = t\sqrt{t^2 + 1} - \int \sqrt{t^2 + 1} dt =$$

$$= t\sqrt{t^2+1} - \int \frac{t^2+1}{\sqrt{t^2+1}} dt = t\sqrt{t^2+1} - \int \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}} dt - \ln(t + \sqrt{t^2+1}) \Rightarrow$$

$$F(t; \tilde{c}) = \frac{1}{2} \left( t\sqrt{t^2+1} - \ln(t + \sqrt{t^2+1}) \right) + \tilde{c}, \forall t \in ]-\infty, 0[, \forall \tilde{c} \in \mathbb{R}.$$

Se revine la substituție  $\Rightarrow$

$$F(x; c) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1} - \ln \left( \frac{1}{x} + \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1} \right) \right) + c, \forall x \in ]-\infty, 0[, \forall c \in \mathbb{R}$$

sunt toate primitivele funcției  $f$  pe  $\mathbb{I} = ]-\infty, 0[$ , familia de primitive fiind indexată după constanta  $c \in \mathbb{R}$ .

b)  $\int \frac{1}{x\sqrt{7x-x^2-12}} dx, x \in \mathbb{I}.$

**Rezolvare.** etapa 1.  $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x\sqrt{7x-x^2-12}}$

Se impune  $CE : \begin{cases} x \neq 0 \\ 7x - x^2 - 12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in ]3, 4[.$

$f$  este continuă pe  $]3, 4[ \Rightarrow f$  admite primitive pe  $\mathbb{I} = ]3, 4[$

etapa 2. Se determină  $F(x; c)$ , aplicând teoria.

Se observă că  $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{-x^2+7x-12}}$ , adică e de forma (5), cu  $d = 0, a = -1, b = 7, c = -12, n = 1$ . Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = t, t \in ]\frac{1}{4}, \frac{1}{3}[ \text{ se inversează} \\ x = \frac{1}{t}, t \in ]\frac{1}{4}, \frac{1}{3}[ \text{ se diferențiază} \\ dx = \frac{-1}{t^2} dt \end{cases}$$

Se înlocuiește

$$F(t; \tilde{c}) = \int \frac{t}{\sqrt{-\left(\frac{1}{t}\right)^2 + 7\frac{1}{t} - 12}} \frac{-1}{t^2} dt \stackrel{t>0 \text{ pe } ]\frac{1}{4}, \frac{1}{3}[}{|t|=t} \int \frac{-1}{\sqrt{-1+7t-12t^2}} dt =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{12}} \int \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{12} + \frac{7}{12}t - t^2}} dt = -\frac{1}{\sqrt{12}} \int \frac{1}{\sqrt{-\left(t^2 - 2\frac{7}{24}t + \left(\frac{7}{24}\right)^2\right) + \left(\frac{7}{24}\right)^2 - \frac{1}{12}}} dt =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{12}} \int \frac{\left(t - \frac{7}{24}\right)'}{\sqrt{\left(\frac{1}{24}\right)^2 - \left(t - \frac{7}{24}\right)^2}} dt = -\frac{1}{\sqrt{12}} \arcsin \frac{t - \frac{7}{24}}{\frac{1}{24}} + \tilde{c}, \forall t \in ]\frac{1}{4}, \frac{1}{3}[, \forall \tilde{c} \in \mathbb{R}.$$

Se revine la substituție  $\Rightarrow$

$$F(x; c) = -\frac{1}{\sqrt{12}} \arcsin \frac{\frac{1}{x} - \frac{7}{24}}{\frac{1}{24}} + c, \forall x \in ]3, 4[, \forall c \in \mathbb{R}$$

sunt toate primitivele funcției  $f$  pe  $\mathbb{I} = ]3, 4[$ , familia de primitive fiind indexată după constanta  $c \in \mathbb{R}$ .

**1.5.4. Forma generală:**  $\boxed{\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx, x \in \mathbb{I},}$  (6)

unde  $R : \mathbb{I}_0 \times \mathbb{I}_1 \rightarrow \mathbb{R}, R(y_0, y_1) = \frac{P(y_0, y_1)}{Q(y_0, y_1)}$  este funcție rațională în  $y_0 = x, y_1 = \sqrt{ax^2+bx+c}$ , iar  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

**Rezolvare:** Se face una din schimbarea de variabilă (substituție Euler)

a) dacă  $a > 0$  :

$$\begin{cases} \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax} + t \text{ sau } \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax} - t \\ \sqrt{ax^2 + bx + c} = -\sqrt{ax} + t \text{ sau } \sqrt{ax^2 + bx + c} = -\sqrt{ax} - t \end{cases} \quad (6')$$

b) dacă  $c > 0$  :

$$\begin{cases} \sqrt{ax^2 + bx + c} = tx + \sqrt{c} \text{ sau } \sqrt{ax^2 + bx + c} = tx - \sqrt{c} \\ \sqrt{ax^2 + bx + c} = -tx + \sqrt{c} \text{ sau } \sqrt{ax^2 + bx + c} = -tx - \sqrt{c} \end{cases} \quad (6'')$$

c) dacă  $ax^2 + bx + c = 0$  are rădăcinile reale  $x_1, x_2$  :

$$\begin{cases} \sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1) \text{ sau } \sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_2) \end{cases} \quad (6''')$$

pentru  $x$  într-un subinterval al  $\mathbb{I}$  ce nu conține  $x_1$ , respectiv  $x_2$ .

Se obține o integrală ca în Secțiunea 1.4 în variabila  $t$ , se calculează și se revine la substituție.

**Exemplul 1.5.4.1.** Să se calculeze

a)  $\int \frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{1 + x + \sqrt{x^2 + x + 1}} dx, x \in \mathbb{I}.$

**Rezolvare.** etapa 1.  $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{1 + x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$

Se impune  $CE : \{1 + x + \sqrt{x^2 + x + 1} \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$

$f$  este continuă pe  $\mathbb{R} \Rightarrow f$  admite primitive pe  $\mathbb{I} = \mathbb{R}$

etapa 2. Se determină  $F(x; c)$ , aplicând teoria. Se observă că  $f(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{1 + x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$ , adică e

de forma (6), cu  $R(y_0, y_1) = \frac{y_0 + y_1}{1 + y_0 + y_1}, a = 1, b = 1, c = 1.$

Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + x + 1} = -x + t, t \in \mathbb{J} \text{ se exprimă } x \text{ în funcție de } t \\ x^2 + x + 1 = x^2 - 2xt + t^2 \Rightarrow \\ x = \frac{t^2 - 1}{1 + 2t}, t \in \mathbb{J} \text{ a.î. } t \neq \frac{-1}{2} \text{ se diferențiază} \\ dx = \frac{2t(1 + 2t) - (t^2 - 1)(+2)}{(1 + 2t)^2} dt \Rightarrow \\ dx = \frac{2t^2 + 2t + 2}{(1 + 2t)^2} dt \end{cases}$$

Se observă că

-inecuația  $\sqrt{x^2 + x + 1} + x > 0$  are ca soluții  $\forall x \in \mathbb{R}$

-inecuația  $\sqrt{x^2 + x + 1} + x \leq 0$  nu are soluții în  $\mathbb{R}.$

Deci  $\mathbb{J} \subseteq ]0, +\infty[.$

Se înlocuiește formal

$$\begin{aligned} F(t; \tilde{c}) &= \int \frac{\frac{t^2 - 1}{1 + 2t} + \left(-\frac{t^2 - 1}{1 + 2t} + t\right)}{1 + \frac{t^2 - 1}{1 + 2t} + \left(-\frac{t^2 - 1}{1 - 2t} + t\right)} \frac{2t^2 + 2t + 2}{(1 + 2t)^2} dt = \int \frac{t}{1 + t} \frac{2t^2 + 2t + 2}{(1 + 2t)^2} dt = \\ &= 2 \int \frac{t(t^2 + t + 1)}{(t + 1)(1 + 2t)^2} dt = 2 \int \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{t + 1} - \frac{3}{2} \frac{1}{2t + 1} - \frac{3}{4} \frac{1}{(2t + 1)^2} \right) dt = \\ &= \frac{2}{4} t - 2 \ln(t + 1) - 3 \frac{\ln(1 + 2t)}{2} - \frac{3}{2} \frac{(1 + 2t)^{-1}}{2(-1)} + \tilde{c}, \forall t \in \mathbb{J}, \forall \tilde{c} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Se revine la substituție  $\Rightarrow$

$$F(x; c) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{x^2 + x + 1} + x \right) - 2 \ln \left( \sqrt{x^2 + x + 1} + x + 1 \right) - \frac{\ln \left( 1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1} + 2x \right)}{2} - \frac{3 \left( 1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1} + 2x \right)^{-1}}{2(-1)} + c, \forall x \in \mathbb{I}, \forall c \in \mathbb{R}.$$

sunt toate primitivele funcției  $f$  pe  $\mathbb{I}$ , familia de primitive fiind indexată după constanta  $c \in \mathbb{R}$ .

b)  $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+2x+2}} dx, x \in ]-1, +\infty[.$

**Rezolvare.** etapa 1.  $f : ]-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+2x+2}}$

$f$  este continuă pe  $]-1, +\infty[ \Rightarrow f$  admite primitive pe  $]-1, +\infty[$

etapa 2. Se determină  $F(x; c)$ , aplicând teoria.

modul 2. Se observă că  $f(x) = \frac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+2x+2}}$ , adică e de forma (6), cu  $R(y_0, y_1) = \frac{1}{(1+y_0)y_1}$ ,

$a = 1, b = 2, c = 2.$

Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x^2 + 2x + 2} = x + t, t \in \mathbb{J} \text{ se exprimă } x \text{ în funcție de } t \\ x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2xt + t^2 \Rightarrow \\ x = \frac{t^2 - 2}{2 - 2t}, t \in \mathbb{J} \text{ a.î. } \frac{t^2 - 2}{2 - 2t} > -1 \\ x = \frac{t^2 - 2}{2 - 2t}, t \in ]2, +\infty[ \text{ se diferențiază} \\ dx = \frac{2t(2 - 2t) - (t^2 - 2)(-2)}{(2 - 2t)^2} dt \Rightarrow \\ dx = \frac{-2t^2 + 4t - 4}{(2 - 2t)^2} dt \end{array} \right.$$

Se menționează că

$$\frac{t^2 - 2}{2 - 2t} > -1 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 2t}{2 - 2t} > 0 \Leftrightarrow t \in ]-\infty, 0[ \cup ]2, +\infty[$$

$\sqrt{x^2 + 2x + 2} - x < 0$  nu are soluții în  $\mathbb{R}$  (deci  $t < 0$  este imposibil).

Se înlocuiește  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} F(t; \tilde{c}) &= \int \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2 - 2}{2 - 2t}\right) \left(\frac{t^2 - 2}{2 - 2t} + t\right)} \frac{-2t^2 + 4t - 4}{(2 - 2t)^2} dt = \int \frac{(-2)(t^2 - 2t + 2)}{(t^2 - 2t)(t^2 - 2 + 2t - 2t^2)} dt = \\ &= 2 \int \frac{1}{t^2 - 2t} dt = \int \left( \frac{1}{t - 2} - \frac{1}{t} \right) dt = \ln \frac{t - 2}{t} + \tilde{c}, \forall t \in ]2, +\infty[, \tilde{c} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Se revine la substituție  $\Rightarrow$

$$F(x; c) = \ln \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 2} - x - 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} - x} + c, \forall x \in \mathbb{I}, \forall c \in \mathbb{R}.$$

sunt toate primitivele funcției  $f$  pe  $\mathbb{I}$ , familia de primitive fiind indexată după constanta  $c \in \mathbb{R}$ .

modul 1. Se observă că  $f(x) = \frac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+2x+2}}$ , adică e de forma (5), cu  $d = -1, a = 1, b = 2,$

$c = 2, n = 1.$  Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1+x} = t, t \in \mathbb{J} \text{ se inversează} \\ x = \frac{1-t}{t}, t \in ]0, +\infty[ \text{ se diferențiază} \\ dx = \frac{-1}{t^2} dt \end{array} \right.$$



Se menționează că

$$\frac{1-t}{t} > -1 \Leftrightarrow \frac{1}{t} > 0 \Leftrightarrow t \in ]0, +\infty[.$$

Se înlocuiește

$$F(t; \tilde{c}) = \int \frac{t}{\sqrt{\frac{1}{t^2} + 1}} \frac{-1}{t^2} dt \stackrel{t>0 \text{ pe } ]0, +\infty[}{|t|=t} \int \frac{-1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt = -\ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) + \tilde{c},$$

$$\forall t \in ]0, +\infty[, \forall \tilde{c} \in \mathbb{R}.$$

Se revine la substituție  $\Rightarrow$

$$F(x; c) = -\ln\left(\frac{1}{1+x} + \sqrt{\frac{1}{(1+x)^2} + 1}\right) + c, \forall x \in ]-1, +\infty[, \forall c \in \mathbb{R}$$

c)  $\int \frac{1}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}} dx, x \in ]0, \frac{3}{2}[.$

**Rezolvare.** etapa 1.  $f : ]0, \frac{3}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$

$f$  este continuă pe  $]0, \frac{3}{2}[ \Rightarrow f$  admite primitive pe  $]0, \frac{3}{2}[$

etapa 2. Se determină  $F(x; c)$ , aplicând teoria.

modul 2. Se observă că  $f(x) = \frac{1}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$ , adică e de forma (6), cu  $R(y_0, y_1) = \frac{1}{(2y_0-3)y_1}$ ,

$$a = -1, b = 4, c = 0.$$

Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{4x-x^2} = tx, t \in \mathbb{J} \text{ se exprimă } x \text{ în funcție de } t \\ 4x-x^2 = t^2x^2 \Rightarrow \\ x = \frac{4}{t^2+1}, t \in \mathbb{J} \text{ a.î. } 0 < \frac{4}{t^2+1} < \frac{3}{2} \\ x = \frac{4}{t^2+1}, t \in ]0, \sqrt{\frac{5}{3}}[ \text{ se diferențiază} \\ dx = -4 \frac{2t}{(t^2+1)^2} dt \Rightarrow \\ dx = \frac{-8t}{(t^2+1)^2} dt \end{array} \right.$$

Se menționează că

$$0 < \frac{4}{t^2+1} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow 8 - 3t^2 - 3 < 0 \Leftrightarrow t \in ]-\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}[$$

$$\sqrt{4x-x^2} = tx \Rightarrow t > 0.$$

Se înlocuiește  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} F(t; \tilde{c}) &= \int \frac{1}{\left(2 \cdot \frac{4}{t^2+1} - 3\right) \cdot \frac{4t}{t^2+1}} \frac{-8t}{(t^2+1)^2} dt = 2 \int \frac{1}{3t^2-5} dt = \\ &= \frac{2}{3} \int \frac{1}{t^2 - \left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2} dt = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{5}{3}}} \cdot \ln\left(-\frac{t - \sqrt{\frac{5}{3}}}{t + \sqrt{\frac{5}{3}}}\right) + \tilde{c}, \forall t \in ]0, \sqrt{\frac{5}{3}}[, \tilde{c} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Se revine la substituție  $\Rightarrow$

$$F(x; c) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{5}{3}}} \cdot \ln\left(-\frac{\frac{\sqrt{4x-x^2}}{x} - \sqrt{\frac{5}{3}}}{\frac{\sqrt{4x-x^2}}{x} + \sqrt{\frac{5}{3}}}\right) + c, \forall x \in ]0, \frac{3}{2}[, \forall c \in \mathbb{R}.$$

sunt toate primitivele funcției  $f$  pe  $]0, \frac{3}{2}[$ , familia de primitive fiind indexată după constanta  $c \in \mathbb{R}$ .

modul 1. Se observă că  $f(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{(x - \frac{3}{2}) \sqrt{4x - x^2}}$ , adică e de forma (5), cu  $d = \frac{3}{2}$ ,  $a = -1$ ,  $b = 4$ ,  $c = 0$ ,  $n = 1$ . Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$\begin{cases} \frac{1}{x - \frac{3}{2}} = t, t \in \mathbb{J} \text{ se inversează} \\ x = \frac{1 + \frac{3}{2}t}{t}, t \in ]-\infty, -\frac{2}{3}[ \text{ se diferențiază} \\ dx = \frac{-1}{t^2} dt \end{cases}$$

Se menționează că

$$0 < \frac{1 + \frac{3}{2}t}{t} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow t \in ]-\infty, -\frac{2}{3}[.$$

Se înlocuiește  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} F(t; \tilde{c}) &= \int \frac{t}{\sqrt{4\frac{1 + \frac{3}{2}t}{t} - \left(\frac{1 + \frac{3}{2}t}{t}\right)^2}} \frac{-1}{t^2} dt \stackrel{t < 0 \text{ pe } ]-\infty, -\frac{2}{3}[}{\sqrt{t^2 = |t| = -t}} \int \frac{1}{\sqrt{4t + 6t^2 - 1 - 3t - \frac{9}{4}t^2}} dt = \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{\frac{15}{4}t^2 + t - 1}} dt = \frac{2}{\sqrt{15}} \int \frac{1}{\sqrt{t^2 + \frac{4}{15}t - \frac{4}{15}}} dt = \frac{2}{\sqrt{15}} \int \frac{(t - \frac{2}{15})'}{\sqrt{(t - \frac{2}{15})^2 - (\frac{8}{15})^2}} dt = \\ &= \frac{2}{\sqrt{15}} \ln \left( t - \frac{2}{15} + \sqrt{(t - \frac{2}{15})^2 - (\frac{8}{15})^2} \right) + \tilde{c}, \forall t \in ]-\infty, -\frac{2}{3}[ , \forall \tilde{c} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Se revine la substituție  $\Rightarrow$

$$F(x; c) = \frac{2}{\sqrt{15}} \ln \left( \frac{1}{x - \frac{3}{2}} - \frac{2}{15} + \sqrt{\left(\frac{1}{x - \frac{3}{2}} - \frac{2}{15}\right)^2 - \left(\frac{8}{15}\right)^2} \right) + c, \forall x \in ]0, \frac{3}{2}[ , \forall c \in \mathbb{R}$$

d)  $\int \frac{1}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}} dx, x \in ]0, -1 + \sqrt{2}[.$

**Rezolvare.** etapa 1.  $f : ]0, -1 + \sqrt{2}[ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}$

$f$  este continuă pe  $]0, -1 + \sqrt{2}[ \Rightarrow f$  admite primitive pe  $]0, -1 + \sqrt{2}[$

etapa 2. Se determină  $F(x; c)$ , aplicând teoria. Se observă că  $f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}$ , adică e de

forma (6), cu  $R(y_0, y_1) = \frac{1}{1 + y_1}$ ,  $a = -1$ ,  $b = -2$ ,  $c = 1$ .

Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$\begin{cases} \sqrt{1 - 2x - x^2} = tx - 1, t \in \mathbb{J} \text{ se exprimă } x \text{ în funcție de } t \\ 1 - 2x - x^2 = t^2 x^2 - 2tx + 1 \Rightarrow \\ x = \frac{2t - 2}{t^2 + 1}, t \in \mathbb{J} \text{ a.î. } 0 < \frac{2t - 2}{t^2 + 1} < -1 + \sqrt{2} \\ x = \frac{2t - 2}{t^2 + 1}, t \in \mathbb{J} \subset ]1, +\infty[ \text{ se diferențiază} \\ dx = \frac{2(t^2 + 1) - (2t - 2)2t}{(t^2 + 1)^2} dt \Rightarrow \\ dx = \frac{-2t^2 + 4t + 2}{(t^2 + 1)^2} dt \end{cases}$$

Se menționează că

$$0 < \frac{2t - 2}{t^2 + 1} < -1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow \dots$$

Se înlocuiește  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} F(t; \tilde{c}) &= \int \frac{1}{1+t} \cdot \frac{2t-2}{t^2+1} \cdot \frac{-2t^2+4t+2}{(t^2+1)^2} dt = \int \frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)(t^2+1)} dt = \\ &= \int \left( -\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} - \frac{2}{t^2+1} \right) dt = \\ &= -\ln t + \ln(t-1) - 2 \operatorname{arctg} t + \tilde{c}, \forall t \in \mathbb{J} \subset ]1, +\infty[, \tilde{c} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Se revine la substituție  $\Rightarrow$

$$F(x; c) = -\ln \frac{\sqrt{1-2x-x^2}+1}{x} + \ln \left( \frac{\sqrt{1-2x-x^2}+1}{x} - 1 \right) - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-2x-x^2}+1}{x} + c,$$

$\forall x \in ]0, -1 + \sqrt{2}[$ ,  $\forall c \in \mathbb{R}$ .

sunt toate primitivele funcției  $f$  pe  $]0, -1 + \sqrt{2}[$ , familia de primitive fiind indexată după constanta  $c \in \mathbb{R}$ .

○**1.5.5. Forma generală:**  $\boxed{\int x^m (ax^n + b)^p dx, x \in \mathbb{I}}$  (7)

unde  $a, b \in \mathbb{R}$  cu  $ab \neq 0$ ,  $m, n, p \in \mathbb{Q}$ .

**Rezolvare:** Se face una din schimbarea de variabilă (substituție Cebâșev)

a) dacă  $p \in \mathbb{Z}$ , atunci integrala (7) este de tip (3), și se face

$$\boxed{x = t^q}, \tag{7'}$$

unde  $q$  este cel mai mic multiplu comun al numitorilor lui  $m$  și  $n$ .

b) dacă  $p \notin \mathbb{Z}$ ,  $p = \frac{r}{s}$  ca fracție ireductibilă cu  $r \in \mathbb{Z}$  și  $s \in \mathbb{N}^*$  și  $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$  atunci se face

$$\boxed{ax^n + b = t^s}. \tag{7''}$$

c) dacă  $p \notin \mathbb{Z}$ ,  $p = \frac{r}{s}$  ca fracție ireductibilă cu  $r \in \mathbb{Z}$  și  $s \in \mathbb{N}^*$  și  $\frac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}$  și  $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$  atunci se face

$$\boxed{\frac{ax^n + b}{x^n} = t^s \text{ (sau } a + bx^{-n} = t^s)} \tag{7'''}$$

Se obține o integrală ca în Secțiunea 1.4 în variabila  $t$ , se calculează și se revine la substituție.

○**Exemplul 1.5.5.1.** Să se calculeze

a)  $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx, x \in \mathbb{I}$ .

**Rezolvare.** etapa 1.  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}$

$f$  este continuă pe  $]0, +\infty[ \Rightarrow f$  admite primitive pe  $\mathbb{I} = ]0, +\infty[$

etapa 2. Se determină  $F(x; c)$ , aplicând teoria.

Se observă că  $f(x) = x^{-\frac{1}{2}} \left( 1 \cdot x^{\frac{1}{4}} + 1 \right)^{\frac{1}{3}}$ , adică e de forma (7), cu  $a = 1, b = 1, m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{4}, p = \frac{1}{3}$ .

Se poate încerca și direct schimbarea de variabilă de integrare

$$\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} = t.$$

Sau, conform teoriei, deoarece  $p = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$  și  $\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$  Se face schimbarea de

variabilă de integrare  $1 \cdot x^{\frac{1}{4}} + 1 = t^3$ .

$$\begin{cases} 1 \cdot x^{\frac{1}{4}} + 1 = t^3, t \in ]1, +\infty[ \text{ se inversează} \\ x = (t^3 - 1)^4, t \in ]1, +\infty[ \text{ se diferențiază} \\ dx = 4(t^3 - 1)^3 \cdot 3t^2 dt \end{cases}$$

Se înlocuiește  $\Rightarrow$

$$F(t; \tilde{c}) = \int \frac{t}{(t^3 - 1)^2} 4(t^3 - 1)^3 \cdot 3t^2 dt = \int 12(t^6 - t^3) dt = 12 \left( \frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4} \right) + \tilde{c},$$

$$\forall t \in ]1, +\infty[, \forall \tilde{c} \in \mathbb{R}.$$

Se revine la substituție  $\Rightarrow$

$$F(x; c) = 2 \left( \frac{\left( \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}} \right)^7}{7} - \frac{\left( \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}} \right)^4}{4} \right) + c, \forall x \in ]0, +\infty[, \forall c \in \mathbb{R}$$

sunt toate primitivele funcției  $f$  pe  $\mathbb{I} = ]0, +\infty[$ , familia de primitive fiind indexată după constanta  $c \in \mathbb{R}$ .

b)  $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^3}} dx, x \in ]0, 1[.$

**Rezolvare.** etapa 1.  $f : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^3}}$

$f$  este continuă pe  $]0, 1[ \Rightarrow f$  admite primitive pe  $\mathbb{I} = ]0, 1[$

etapa 2. Se determină  $F(x; c)$ , aplicând teoria.

Se observă că  $f(x) = x^{-1}((-1) \cdot x^3 + 1)^{\frac{-1}{2}}$ , adică e de forma (7), cu  $a = -1, b = 1, m = -1, n = 3, p = \frac{-1}{2}$ .

Se poate încerca și direct schimbarea de variabilă de integrare

$$\sqrt{1-x^3} = t.$$

Sau, conform teoriei, deoarece  $p = \frac{-1}{2} \notin \mathbb{Z}$  și  $\frac{m+1}{n} = \frac{-1+1}{3} = 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$  Se face schimbarea de variabilă de integrare  $(-1) \cdot x^3 + 1 = t^2$ .

$$\begin{cases} 1 - x^3 = t^2, t \in ]0, 1[ \text{ se inversează} \\ x = (1 - t^2)^{\frac{1}{3}}, t \in ]0, 1[ \text{ se diferențiază} \\ dx = \frac{1}{3}(1 - t^2)^{\frac{-2}{3}}(-2t) dt \end{cases}$$

Se înlocuiește  $\Rightarrow$

$$F(t; \tilde{c}) = \int \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{1}{3}} \cdot t} \frac{1}{3}(1-t^2)^{\frac{-2}{3}}(-2t) dt = \frac{-2}{3} \int \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{-2}{3} \ln \frac{1-t}{1+t} + \tilde{c},$$

$$\forall t \in ]0, 1[, \forall \tilde{c} \in \mathbb{R}.$$

Se revine la substituție  $\Rightarrow$

$$F(x; c) = \frac{-2}{3} \ln \frac{1 - \sqrt{1-x^3}}{1 + \sqrt{1-x^3}} + c, \forall x \in ]0, 1[, \forall c \in \mathbb{R}$$

sunt toate primitivele funcției  $f$  pe  $\mathbb{I} = ]0, 1[$ , familia de primitive fiind indexată după constanta  $c \in \mathbb{R}$ .

c)  $\int \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}} dx, x \in ]0, +\infty[.$

**Rezolvare.** etapa 1.  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}$

$f$  este continuă pe  $]0, +\infty[ \Rightarrow f$  admite primitive pe  $\mathbb{I} = ]0, +\infty[$

etapa 2. Se determină  $F(x; c)$ , aplicând teoria.

Se observă că  $f(x) = x^{-4}(1 \cdot x^2 + 1)^{\frac{-1}{2}}$ , adică e de forma (7), cu  $a = 1, b = 1, m = -4, n = 2, p = \frac{-1}{2}$ .

Conform teoriei, deoarece

$$p = \frac{-1}{2} \notin \mathbb{Z} \text{ și } \frac{m+1}{n} = \frac{-4+1}{2} \notin \mathbb{Z} \text{ și } \frac{m+1}{n} + p = \frac{-4+1}{2} + \frac{-1}{2} \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$  Se face schimbarea de variabilă de integrare  $\frac{1 \cdot x^2 + 1}{x^2} = t^2$ .

$$\begin{cases} 1 + \frac{1}{x^2} = t^2, t \in ]1, +\infty[ \text{ se inversează} \\ x^2 = \frac{1}{t^2 - 1}, t \in ]1, +\infty[ \\ x = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}, t \in ]1, +\infty[ \text{ se diferențiază} \\ dx = \frac{-1}{2} (t^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} (2t) dt \end{cases}$$

Se înlocuiește, ținând cont că, pentru  $x \in ]0, +\infty[ \Rightarrow$

$$\frac{1}{x^4 \sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{x^5 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 \left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \Rightarrow$$

$$F(t; \tilde{c}) = \int \frac{(t^2 - 1)^2 \cdot \sqrt{t^2 - 1}}{t} \cdot \frac{-1}{2} (t^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} (2t) dt = - \int (t^2 - 1) dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + \tilde{c},$$

$\forall t \in ]1, +\infty[, \forall \tilde{c} \in \mathbb{R}$ .

Se revine la substituție  $\Rightarrow$

$$F(x; c) = -\frac{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)^3}{3} + \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{2} + c, \forall x \in ]0, +\infty[, \forall c \in \mathbb{R}$$

sunt toate primitivele funcției  $f$  pe  $\mathbb{I} = ]0, +\infty[$ , familia de primitive fiind indexată după constanta  $c \in \mathbb{R}$ .

### 1.6. Integrale nedefinite (primitive) având ca integrant funcții raționale în $e^x$ și $e^{-x}$ , respectiv în $\operatorname{ch} x$ și $\operatorname{sh} x$

**Forma generală:**  $\boxed{\int R(e^x, e^{-x}) dx, x \in \mathbb{I}}$ , chiar  $\boxed{\int R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x) dx, x \in \mathbb{I}}$ ,

unde  $R: \mathbb{I}_1 \times \mathbb{I}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $R(y_1, y_2) = \frac{P(y_1, y_2)}{Q(y_1, y_2)}$  este funcție rațională în  $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}$ .

**Rezolvare:** Se face schimbarea de variabilă

$$\begin{cases} \boxed{e^x = t}, t \in \mathbb{J} \text{ se inversează} \\ x = \ln t, t \in \mathbb{J} \text{ se diferențiază} \\ dx = \frac{1}{t} dt \end{cases}$$

Se obține o integrală ca în Secțiunea 1.4. în variabila  $t$ , se calculează și se revine la substituție.

**Exemplul 1.6.1.** Să se calculeze

a)  $\int \frac{1 + e^x}{1 + e^{2x}} dx, x \in \mathbb{R}$ . - A se vedea Seminar

**1.7. Integrale nedefinite având ca integrant funcții raționale în  $\cos x$ ,  $\sin x$ , reductibile la cele din Secțiunea 1.4**

**Forma generală:**  $\int R(\cos x, \sin x) dx, x \in \mathbb{I},$  (8)

unde  $R : \mathbb{I}_1 \times \mathbb{I}_2 \rightarrow \mathbb{R}, R(y_1, y_2) = \frac{P(y_1, y_2)}{Q(y_1, y_2)}$  este funcție rațională în  $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$ .

**Rezolvare: I.** În general, se face schimbarea de variabilă de integrare

$\boxed{\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, t \in \mathbb{J}}$  (8')

unde  $\mathbb{J}$  este un interval corespunzător ales. Se folosește

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, t \in \mathbb{J} \text{ se inversează} \\ x = 2 \operatorname{arctg} t, t \in \mathbb{J} \text{ se diferențiază} \\ dx = \frac{2}{1+t^2} dt \end{array} \right. \text{ și } \left\{ \begin{array}{l} \cos x = \frac{1 - (\operatorname{tg} \frac{x}{2})^2}{1 + (\operatorname{tg} \frac{x}{2})^2}; \\ \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + (\operatorname{tg} \frac{x}{2})^2}; \end{array} \right.$$

**II.** În anumite situații particulare, se fac schimbările de variabilă de integrare:

**a)** dacă  $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$ , atunci se face

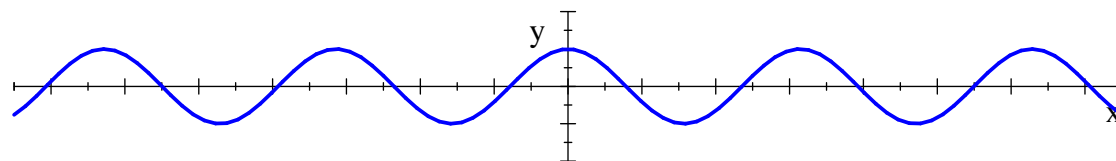
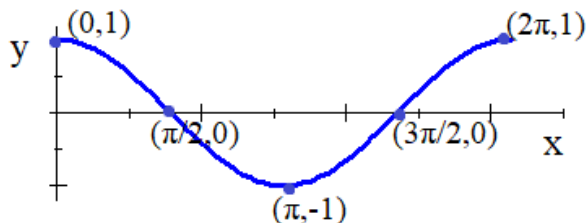
$\boxed{\operatorname{tg} x = t, t \in \mathbb{J}}$  (8'')

unde  $\mathbb{J}$  este un interval corespunzător ales. Se folosește

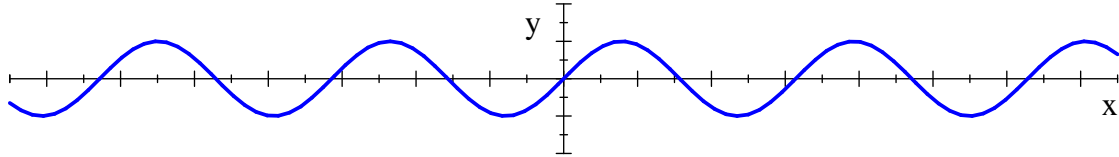
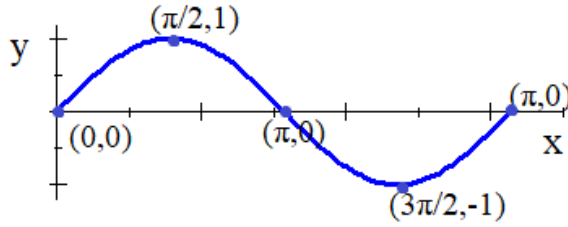
$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, t \in \mathbb{J} \text{ se inversează} \\ x = \operatorname{arctg} t, t \in \mathbb{J} \text{ se diferențiază} \\ dx = \frac{1}{1+t^2} dt \end{array} \right. \text{ și } \left\{ \begin{array}{l} \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + (\operatorname{tg} x)^2}} \\ \sin x = \pm \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + (\operatorname{tg} x)^2}}; \end{array} \right.$$

și unde  $\mathbb{J}$  este un interval corespunzător ales; semnele  $+, -$  se aleg în funcție de intervalul  $\mathbb{I}$  parcurs de  $x$  din graficele funcțiilor  $\cos$  și  $\sin$ .

$\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



$\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



b) dacă  $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$ , atunci se face

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos x = t, t \in \mathbb{J} \text{ se inversează} \\ x = \arccos t, t \in \mathbb{J} \text{ se diferențiază} \\ dx = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}} dt \end{array} \right. \text{ sau } \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t, t \in \mathbb{J} \text{ se diferențiază} \\ -\sin x dx = dt. \end{array} \right. \quad (8''')$$

unde  $\mathbb{J}$  este un interval corespunzător ales. Se folosește

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x = \pm \sqrt{1 - (\cos x)^2}; \end{array} \right.$$

unde semnele  $+$ ,  $-$  se aleg în funcție de intervalul  $\mathbb{I}$  parcurs de  $x$ .

c) dacă  $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$ , atunci se face

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x = t, t \in \mathbb{J} \text{ se inversează} \\ x = \arcsin t, t \in \mathbb{J} \text{ se diferențiază} \\ dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \end{array} \right. \text{ sau } \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t, t \in \mathbb{J} \text{ se diferențiază} \\ \cos x dx = dt \end{array} \right. \quad (8''''')$$

unde  $\mathbb{J}$  este un interval corespunzător ales. Se folosește

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos x = \pm \sqrt{1 - (\sin x)^2}; \end{array} \right.$$

unde semnele  $+$ ,  $-$  se aleg în funcție de intervalul  $\mathbb{I}$  parcurs de  $x$ .

Se obține o integrală ca în Secțiunea 1.4 în variabila  $t$ , se calculează și se revine la substituție.

**Exemplul 1.6.1.1.** Să se calculeze

a)  $\int \frac{1}{3 + 2 \sin x} dx, x \in \mathbb{R}$

**Rezolvare.** etapa 1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{3 + 2 \sin x}$

$f$  este continuă pe  $\mathbb{R} \Rightarrow f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$

etapa 2. Se determină  $F(x; c)$ , aplicând teoria. Se observă că  $f(x) = \frac{1}{3 + 2 \sin x}$ , adică e de forma

(8), cu

$$R(y_1, y_2) = \frac{1}{3 + 2y_2}.$$

Se face schimbarea de variabilă de integrare  $\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, t \in \mathbb{J} \text{ se inversează} \\ x = 2 \operatorname{arctg} t, t \in \mathbb{J} \text{ se diferențiază} \\ dx = \frac{2}{1+t^2} dt \end{cases}$

Se menționează că  $\mathbb{J}$  este un interval ce nu conține  $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned} \text{Se înlocuiește} \Rightarrow F(t; \tilde{c}) &= \int \frac{1}{3 + 2 \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{3t^2 + 4t + 3} dt = \\ &= \frac{2}{3} \int \frac{1}{t^2 + \frac{4}{3}t + 1} dt = \frac{2}{3} \int \frac{(t + \frac{2}{3})'}{(t + \frac{2}{3})^2 + (\frac{\sqrt{5}}{3})^2} dt = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \operatorname{arctg} \frac{t + \frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} + \tilde{c}, \forall t \in \mathbb{J}, \forall \tilde{c} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Se revine la substituție  $\Rightarrow F(x; c) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}$

sunt toate primitivele funcției  $f$  pe  $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ , familia de primitive fiind indexată după constanta  $c \in \mathbb{R}$ .

b)  $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + 2 \sin^2 x} dx, x \in \mathbb{R}$ - A se vedea Seminar.

c)  $\int \frac{1}{\sin x \cos^2 x} dx, x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ -A se vedea Seminar.

d)  $\int \frac{1}{(3 + \cos^2 x) \sin x} dx, x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$

**Rezolvare.** etapa 1.  $f : ]0, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{(3 + \cos^2 x) \sin x}$

$f$  este continuă pe  $]0, \frac{\pi}{2}[ \Rightarrow f$  admite primitive pe  $]0, \frac{\pi}{2}[$

etapa 2. Se determină integrala, aplicând teoria. Se observă că  $f$  este de forma (8), cu

$$R(y_1, y_2) = \frac{1}{(3 + y_1^2) \cdot y_2}.$$

modul 1. Se face schimbarea de variabilă de integrare:  $\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, t \in ]0, 1[[ \text{ se inversează} \\ x = 2 \operatorname{arctg} t, t \in ]0, 1[[ \text{ se diferențiază} \\ dx = \frac{2}{1+t^2} dt \end{cases}$

$$\text{Se înlocuiește} \Rightarrow F(t; \tilde{c}) = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} \cdot \left(3 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{(1+t^2)^2}{t(4+2t^2)^2} dt = ?$$

Se poate, deși este mult calcul. Indicație:

$$\frac{(1+t^2)^2}{t(4+2t^2)^2} = \frac{1}{16} \frac{1}{t} + \frac{3}{16} \frac{t}{t^2+2} - \frac{1}{8} \frac{t}{(t^2+2)^2}, t \in ]0, 1[$$

$$\int \frac{(1+t^2)^2}{t(4+2t^2)^2} dt = \frac{1}{16} \ln t + \frac{3}{32} \ln(t^2+2) + \frac{1}{16} \frac{1}{t^2+2} + \tilde{c}, \forall t \in ]0, 1[, \forall \tilde{c} \in \mathbb{R}.$$

$$\int \frac{1}{(3 + \cos^2 x) \sin x} dx = \frac{1}{16} \ln(\operatorname{tg} \frac{x}{2}) + \frac{3}{32} \ln\left(\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^2 + 2\right) + \frac{1}{16} \frac{1}{\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^2 + 2} + c,$$

$\forall x \in ]0, \frac{\pi}{2}[, \forall c \in \mathbb{R}.$

modul 2. Se observă că:

$$\int \frac{1}{(3 + \cos^2 x) \sin x} dx = \int \frac{1}{(3 + \cos^2 x) \sin^2 x} \sin x dx = \int \frac{1}{(3 + \cos^2 x) (1 - \cos^2 x)} \sin x dx,$$

Se face schimbarea de variabilă de integrare:  $\begin{cases} \cos x = v, v \in ]0, 1[[ \text{ se diferențiază} \\ -\sin x dx = dv, v \in ]0, 1[[ \end{cases}$



$$\begin{aligned}
 \text{Se înlocuiește} \Rightarrow F(v; \tilde{c}) &= \int \frac{1}{(3+v^2)(1-v^2)} (-1) dv = \int \frac{1}{(v^2-1)(v^2+3)} dv = \\
 &= \int \left( \frac{1}{4} \frac{1}{v^2-1} - \frac{1}{4} \frac{1}{v^2+3} \right) dv = \\
 &= \frac{1}{8} \ln \frac{-v+1}{v+1} - \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{v}{\sqrt{3}} + \tilde{c}, \forall v \in ]0, 1[, \forall \tilde{c} \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Se revine la substituție  $\Rightarrow$

$$F(x; c) = \frac{1}{8} \ln \frac{-\cos x + 1}{\cos x + 1} - \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{\sqrt{3}} + c, \forall x \in ]0, \frac{\pi}{2}[, \forall c \in \mathbb{R}$$

sunt toate primitivele funcției  $f$  pe  $\mathbb{I} = ]0, \frac{\pi}{2}[$ , familia de primitive fiind indexată după constanta  $c \in \mathbb{R}$ .

**Observația 1.7.1.** Uneori, apar integrale nedefinite cu

**a) Forma generală:**

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx, x \in \mathbb{I}, \quad (9)$$

unde  $R : \mathbb{I}_1 \times \mathbb{I}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $R(y_1, y_2) = \frac{P(y_1, y_2)}{Q(y_1, y_2)}$  este funcție rațională în  $y_1 = x, y_2 = \sqrt{a^2 - x^2}$ .

**Rezolvare:** Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$x = a \sin t, t \in \mathbb{J} \quad (9')$$

$$\text{sau } x = a \cos t, t \in \mathbb{J} \quad (9'')$$

unde  $\mathbb{J}$  este un interval corespunzător ales.

**b) Forma generală:**

$$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx, x \in \mathbb{I}, \quad (10)$$

unde  $R : \mathbb{I}_1 \times \mathbb{I}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $R(y_1, y_2) = \frac{P(y_1, y_2)}{Q(y_1, y_2)}$  este funcție rațională în  $y_1 = x, y_2 = \sqrt{a^2 + x^2}$ .

**Rezolvare:** Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$x = a \operatorname{tg} t, t \in \mathbb{J} \quad (10')$$

unde  $\mathbb{J}$  este un interval corespunzător ales.

**c) Forma generală:**

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx, x \in \mathbb{I}, \quad (11)$$

unde  $R : \mathbb{I}_1 \times \mathbb{I}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $R(y_1, y_2) = \frac{P(y_1, y_2)}{Q(y_1, y_2)}$  este funcție rațională în  $y_1 = x, y_2 = \sqrt{x^2 - a^2}$ .

**Rezolvare:** Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$x = a \frac{1}{\cos t}, t \in \mathbb{J} \quad (11')$$

$$\text{sau } x = a \frac{1}{\sin t}, t \in \mathbb{J} \quad (11'')$$

unde  $\mathbb{J}$  este un interval corespunzător ales.